

ESTRUCTURA TOPOLOGICA DE LA 3-ESFERA

Kemel GEORGE .

Introducción

Debido a una transformación especial denominada proyección de Hopf , es posible investigar la estructura topológica de S^3 , o sea , de la esfera de tres dimensiones . En el presente trabajo mostraremos que esta esfera está constituida por una familia de círculos entrelazados unos con otros . Además , debido a que estos círculos están contenidos en toros sólidos , podemos identificar la 3-esfera con dos toros sólidos unidos en sus fronteras .

Inicialmente definiremos algunos conjuntos que son bastante familiares , así como la proyección de Hopf . Luego pasaremos a demostrar los resultados topológicos que hemos mencionado .

1. LA ESFERA S^2

1.1 Sea \mathbb{C} el campo de los números

complejos .

Si $z \in \mathbb{C}$ entonces z puede ser expresado como

$$z = a + bi \quad \text{donde} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

El número complejo $\bar{z} = a - bi$ se denomina conjugado de z , y el número real

$$\|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

se llama la norma de z . Dos conjuntos serán de especial interés para nosotros : el círculo , definido como

$$S^1 = \{z \mid \|z\| = 1\},$$

y el disco , definido como

$$D^2 = \{z \mid \|z\| \leq 1\}.$$

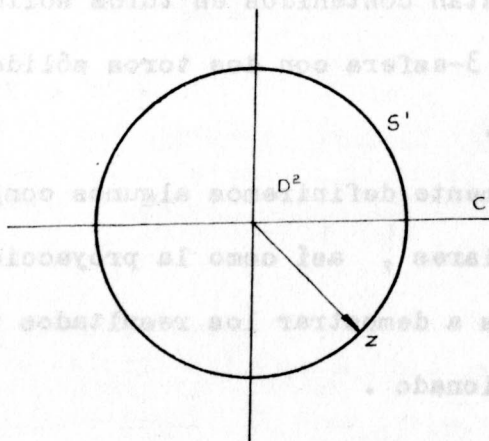


Figura 1.

El círculo S^1 es un conocido subgrupo multiplicativo $[1]$ del campo \mathbb{C} y como conjunto es la frontera topológica del disco D^2 (figura 1.). En general, da do $a > 0$, denotaremos por

$$D_a = \{z \mid \|z\| \leq a\},$$

$$S_a = \{z \mid \|z\| = a\},$$

al disco de radio a y al círculo de radio a respectivamente, donde S_a es la frontera de D_a . Una parametrización de los puntos z del disco es

$$z = b e^{it}, \quad 0 \leq b < a, \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

o en su notación real

$$z = (b \cos t, b \sin t), \quad 0 \leq b < a, \\ 0 \leq t < 2\pi,$$

La parametrización de su frontera es la misma anterior con $b = a$.

1.2 El espacio R^3 de las triplas ordenadas de números reales $x = (a, b, c)$ se puede identificar con el espacio

$$\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \{(z, r) \mid z \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}\},$$

haciendo $z = (a,b)$ y $r = c$.

Bajo esta identificación, un vector $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (z,r)$, tiene norma $\|x\| = \sqrt{z \cdot \bar{z} + r^2}$. Podemos entonces definir la esfera S^2 como el conjunto

$$S^2 = \{ (z,r) \mid z \cdot \bar{z} + r^2 = 1 \}$$

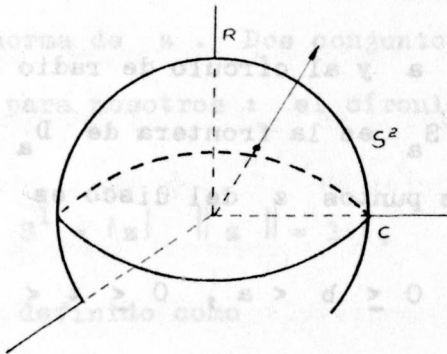


Figura 2

1.3 La esfera S^2 se puede proyectar sobre el plano complejo de la siguiente manera :

Sea $p = (0,0,1) \in S^2$ el polo norte de la esfera .

A un elemento $(z,r) \in S^2$, distinto de p , le asignamos el número complejo $\pi(z,r) = \frac{1}{1-r} \cdot z$ (fig. 3), que es exactamente la intersección con el plano complejo de la recta que sale de p y pasa por (z,r) .

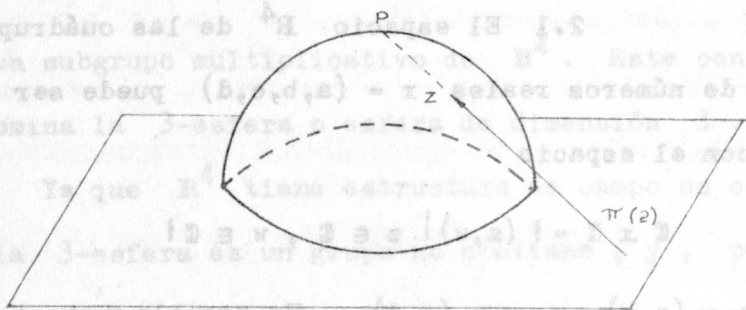


figura 3

El único punto que queda sin su correspondiente imagen es precisamente el punto p . Si ahora le agregamos el símbolo ∞ a \mathbb{C} , de manera continua $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, podemos definir

$$\pi(p) = \infty$$

con lo que π , llamada la proyección estereográfica

$$S^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

es una función biyectiva que nos permite identificar a la 2-esfera con el plano complejo más un punto, ∞ .

2. LA ESFERA S^3

2.1 El espacio R^4 de las cuádruplas ordenadas de números reales $x = (a, b, c, d)$ puede ser identificado con el espacio

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \{ (z, w) \mid z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C} \}$$

donde $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$. Es posible introducir una estructura de campo en R^4 mediante el producto

$$(z_1, w_1) \times (z_2, w_2) = (z_1 \cdot z_2 - w_1 \cdot \bar{w}_2, z_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot \bar{z}_2),$$

el cual es evidentemente bilineal y tiene la propiedad

$$(z_1, w_1) \times (z_2, w_2) = 0, \rightarrow, (z_1, w_1) = 0 \text{ ó } (z_2, w_2) = 0.$$

Con esta estructura $\boxed{3}$, R^4 se denomina el campo de los números cuaternios.

2.2 En particular, si $x \in R^4$ y $x = (z, w)$, su norma está dada por

$$\|x\| = \sqrt{z \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w}}.$$

Por consiguiente, como se cumple la identidad

$$\|x \times y\| = \|x\| \|y\|, \quad x, y \in R^4,$$

el conjunto

$$S^3 = \{ (z, w) \mid z \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} = 1 \}$$

es un subgrupo multiplicativo de R^4 . Este conjunto se denomina la 3-esfera o esfera de dimensión 3.

Ya que R^4 tiene estructura de campo no conmutativo la 3-esfera es un grupo no abeliano, y, por consiguiente, debe tenerse cuidado con el orden en que se efectúen las operaciones en S^3 .

2.3 La estructura topológica de S^3 es compatible con la estructura de grupo definida en la sección 2.2; en otras palabras, S^3 es un grupo topológico [4]. Además, como S^3 es cerrado y acotado, es un grupo topológico compacto.

Tomemos el conjunto

$$S^1 = \{ (z, 0) \mid z \cdot \bar{z} = 1 \}$$

Claramente S^1 es un subgrupo de S^3 (es, efectivamente, una copia del círculo definido en 1.1); por consiguiente, podemos tomar el conjunto S^3/S^1 de las clases laterales a la derecha:

$$S^1 \cdot X = \{ (z, 0) \cdot x \mid x \in S^3, z \cdot \bar{z} = 1 \}.$$

S^3/S^1 se denomina el espacio cociente de los desplazamientos laterales a la derecha de S^1 en S^3 .

Ya que S^1 y S^3 son compactos, el espacio cociente resultante es un espacio topológico compacto [5].

3. LA PROYECCION DE HOPF

3.1 Definamos la función

$$\delta : S^3 \rightarrow S^2$$

$$\text{por } \delta(z, w) = \frac{z}{w} \quad \text{si } w \neq 0$$

$$\delta(z, 0) = \infty.$$

La función δ , denominada proyección de Hopf [6], ha sido definida haciendo uso de la estructura topológica de S^3 y de la identificación de S^2 con los complejos extendidos $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La proyección de Hopf es evidentemente continua. A continuación, enumeraremos algunas de sus propiedades.

3.2 δ es una función sobreyectiva, porque si $z \in S^2$, $z \neq \infty$, y si hacemos

$$\alpha = \sqrt{1 + z \cdot \bar{z}}$$

y tomamos $x = \frac{1}{\alpha} (z, 1)$, $1 \in \mathbb{C}$, entonces claramente $x \in S^3$ y, además,

$$\delta(x) = \delta\left(\frac{z}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = z.$$

En caso de que $z = \infty$, sea $x = (1, 0)$. Evidentemente

$$\delta(1, 0) = \infty.$$

3.3 Sea $q \in S^2$; entonces, su preimagen

$$\delta^{-1}(q) = \{(z, w) \mid \delta(z, w) = q\}$$

es homeomorfo a un círculo. Para demostrarlo supongamos primero que $q = \infty$. En tal caso,

$$\delta^{-1}(\infty) = \{(z, w) \mid w = 0, z \cdot \bar{z} = 1\}.$$

Pero éste es precisamente el círculo

$$S^1 = \{(z, 0) \mid z \cdot \bar{z} = 1\}.$$

Supongamos ahora que $q \neq \infty$ y sea $(z_0, w_0) \in S^3$ tal que

$$\frac{z_0}{w_0} = q, \quad w_0 \neq 0.$$

Para todo complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\|\lambda\| = 1$, tenemos

que

$$(\lambda z_0, \lambda w_0) \in S^3$$

y además que

$$\delta(\lambda z_0, \lambda w_0) = \frac{\lambda z_0}{\lambda w_0} = q.$$

A su vez, para todo $(z, w) \in S^3$ tal que

$$\frac{z}{w} = \frac{z_0}{w_0}$$

obtenemos que $z = \lambda z_0$, $w = \lambda w_0$ y $\|\lambda\| = 1$; porque

si hacemos

$$\frac{z}{z_0} = \lambda, \rightarrow, \frac{w}{w_0} = \lambda, \rightarrow, z = \lambda z_0 \quad y \quad w = \lambda w_0.$$

Pero además

$$\|z\|^2 + \|w\|^2 = 1, \rightarrow, \|\lambda\|^2 (\|z_0\|^2 + \|w_0\|^2) = 1,$$

y se obtiene que

$$\|\lambda\| = 1.$$

De estos dos hechos se deduce que

$$\delta^{-1}(q) = \{(\lambda z_0, \lambda w_0) \mid \|\lambda\| = 1, \delta(z_0, w_0) = q\}$$

y esto es precisamente

$$\delta^{-1}(q) = \{(\lambda, 0) \times (z_0, w_0)\} = S^1 \cdot (z_0, w_0) .$$

De lo anterior , obtenemos los corolarios siguientes .

3.4 Las imágenes inversas $\delta^{-1}(q)$ de la proyección de Hopf son precisamente los desplazamientos laterales a la derecha del círculo $S^1 \subset S^3$.

3.5 El espacio cociente S^3/S^1 y la esfera S^2 son homeomorfos , o sea

$$S^3/S^1 \cong S^2$$

puesto que δ es continua y S^3/S^1 es compacto .

4. TEOREMA

Sea $\delta : S^3 \rightarrow S^2$ la proyección de Hopf . Entonces , cualquier par de círculos $\delta^{-1}(q_1)$, $\delta^{-1}(q_2)$ se encuentran entrelazados en la 3-esfera .

La demostración se basa en una idea geométrica muy peculiar de entrelazamientos de curvas , que en nada res_ ta rigor a la definición topológica [7] , cuando se trata de curvas muy sencillas , como en nuestro caso son los círculos .

Procederemos en una serie de pasos :

4.1 Si $p = \omega$ entonces $\delta^{-1}(\omega) = S^1$. Además cualquiera de los conjuntos $\delta^{-1}(q)$ es de la forma

$$\delta^{-1}(q) = S^1 \cdot x, \quad x \in S^3.$$

Por consiguiente, demostraremos primero que cualquier desplazamiento lateral $S^1 \cdot x$ de S^1 está enlazado con S^1 . La idea general es la siguiente (fig. 4): adjuntamos una membrana a S^1 . Si el círculo $S^1 \cdot x$ está enlazado con S^1 , necesariamente cortará esta membrana en un único punto a .

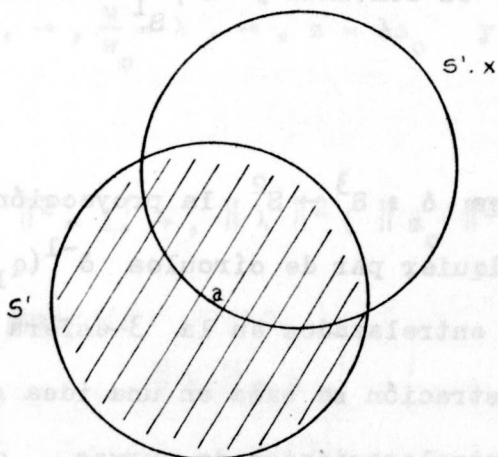


figura 4

Evidentemente, hay que tener cuidado de que la membrana esté contenida en la 3-esfera. Vamos a escoger

una muy especial , precisamente , el hemisferio norte de la esfera S^2 , que es homeomorfo a un disco . El resto se reduce a calcular la intersección y a mostrar la unicidad del punto a .

4.2 Sea

$$D = \{ (z, w) \mid z \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} = 1 , \operatorname{Re} w \geq 0 , \operatorname{Im} w = 0 \} .$$

$D \subset S^3$ corresponde al casquete superior de la esfera S^2 ; en efecto , si $w = r$,

$$D = \{ (z, r) \mid z \cdot \bar{z} + r^2 = 1 , r \geq 0 \} .$$

Además , la frontera ∂D del conjunto D es

$$\partial D = \{ (z, r) \mid z \cdot \bar{z} + r^2 = 1 , r = 0 \} = S^1 .$$

Por consiguiente , D es un disco contenido en S^3 que tiene como frontera el círculo S^1 .

El que $S^1 \cdot x$ y S^1 estén enlazadas , se traduce en que la intersección

$$S^1 \cdot x \cap D$$

sea un único punto $a \in S^3$; o lo que es lo mismo , que exista un único $\lambda \in \mathbb{E}$, tal que

$$\|\lambda\| = 1, \lambda x \in D. \quad (\text{fig. 5})$$

Ahora, sea $x = (z_0, w_0)$. Si existe $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda\| = 1, (\lambda z_0, \lambda w_0) \in D \Rightarrow \lambda w_0 \in \mathbb{R} \text{ y } \lambda w_0 \geq 0.$$

Esto implica que

$$\lambda = \frac{\overline{w_0}}{\|w_0\|}.$$

Hagamos entonces

$$\lambda_0 = \frac{\overline{w_0}}{\|w_0\|}.$$

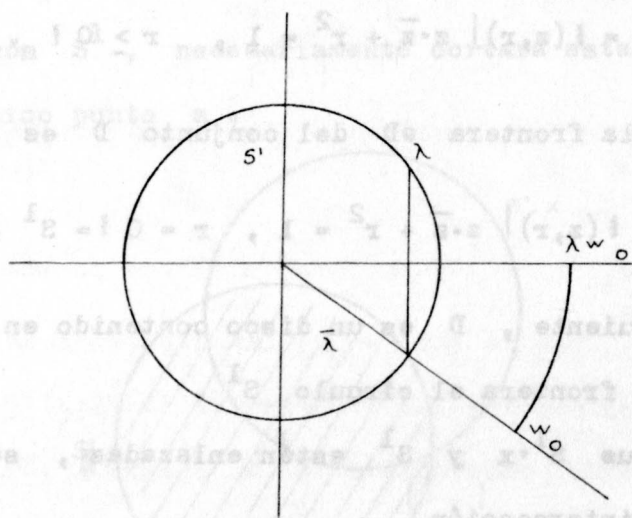


figura 5

Claramente $\lambda_0 \cdot (z_0, w_0) \in S^1 \cdot x$. A su vez, si

$a = \lambda_0 \cdot (z_0, w_0)$, entonces $a \in D$ porque $(\lambda_0 z_0, \lambda_0 w_0)$

cumple la condición

$$\lambda_0 z_0 \cdot \overline{\lambda_0 z_0} + (\lambda_0 w_0)^2 = 1$$

La unicidad de la intersección se desprende del hecho de que si (z_1, w_1) es otro elemento de $S^1 \cdot x$, entonces queda definido

$$\lambda_1 = \frac{\overline{w_1}}{\|w_1\|} .$$

Pero, sabemos que $(z_1, w_1) \in S^1 \cdot x = (z_0, w_0)$ implica que $w_1 = \alpha w_0$, $\|\alpha\| = 1$. Luego,

$$\lambda_1 = \frac{\overline{\alpha w_0}}{\|\alpha w_0\|} = \frac{\overline{\alpha} \overline{w_0}}{\|w_0\|} = \overline{\alpha} \lambda_0 \quad \text{donde } \|\overline{\alpha}\| = 1 ,$$

o sea que λ_0 y λ_1 definen el mismo punto $a \in D$.

4.3 Finalmente, para demostrar que, en general, $S^1 \cdot x$ y $S^1 \cdot y$ están enlazados para cada $x, y \in S^3$, definamos el homeomorfismo

$$L_x : S^3 \rightarrow S^3$$

$$L_x(p) = p \cdot x .$$

Como $D \subset S^3$ y la frontera de D , es $\partial D = S^1$,

entonces $L_x(D)$ es un disco con frontera $\partial L_x(D) = S^1 \cdot x$.

La intersección de $S^1 \cdot y$ con $L_x(D)$ es claramente

$$L_x(D) \cap S^1 \cdot y = \{L_x(a)\}$$

donde $\{a\} = D \cap S^1 \cdot x$, quedando así demostrado el teorema.

5. TOROS EN LA 3-ESFERA

Aunque hemos demostrado que la 3-esfera se encuentra recubierta de círculos entrelazados, estamos lejos de tener una interpretación geométrica global del problema. En esta sección, los resultados obtenidos se pueden resumir de la siguiente manera: de la conocida identificación $R^4 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ es fácil ver que, así como la ecuación

$$z = a e^{ir}$$

es una parametrización del círculo, el par de ecuaciones

$$z = a e^{ir}, \quad w = b e^{is}, \quad a^2 + b^2 = 1$$

es una parametrización de la 3-esfera. Pues bien, mostraremos que:

1. Estas dos ecuaciones definen toros contenidos en la 3-esfera, sobre los cuales se entrelazan los círculos definidos por la proyección de Hopf.

2. Estos toros son superficies de revolución en \mathbb{R}^3 proyectadas estereográficamente sobre S^3 .

Para demostrar estos resultados procederemos en el siguiente orden.

5.1 Dados dos números positivos $a > 0$, $b > 0$, sean

$$z_1 = a e^{ir}, \quad z_2 = b e^{is}$$

dos círculos de radios a y b respectivamente. Si definimos

$$x = (z_1, z_2) = (a e^{ir}, b e^{is})$$

indudablemente $x \in \mathbb{R}^4$; además

$$\|x\|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} = a^2 + b^2,$$

de allí que si $a^2 + b^2 = 1$ obtenemos que

$$x \in S^3.$$

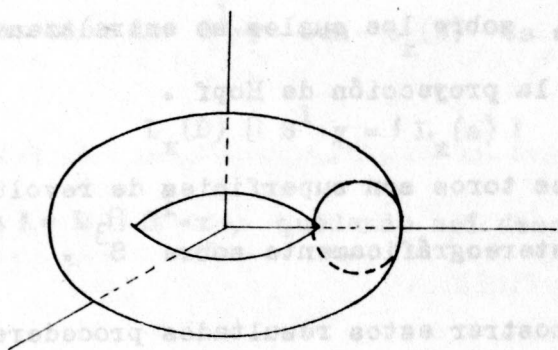


figura 6

El conjunto $T(x) = (a e^{ir}, b e^{is})$, producto cartesiano de los círculos

$$z_1 = a e^{ir}, \quad z_2 = b e^{is}$$

se denomina el toro $[9]$ de radios a y b respectivamente (fig. 6). Además, si

$$a^2 + b^2 = 1 \text{ entonces } T(x) \subset S^3.$$

En consecuencia hemos construido una colección de toros contenidos en las 3-esferas. Veamos ahora la relación que tienen con la proyección de Hopf.

5.2 Sea $\delta : S^3 \rightarrow S^2$ la proyección de Hopf ; si $S^1 = \delta^{-1}(\omega)$, entonces

$$S^1 \cdot x \subset T(x), \text{ donde } x = (z_1, z_2), \quad z_1 \neq 0 \\ z_2 \neq 0.$$

Dicho de otra manera, los desplazamientos laterales del círculo S^1 en la 3-esfera permanecen sobre un toro (fig. 7).

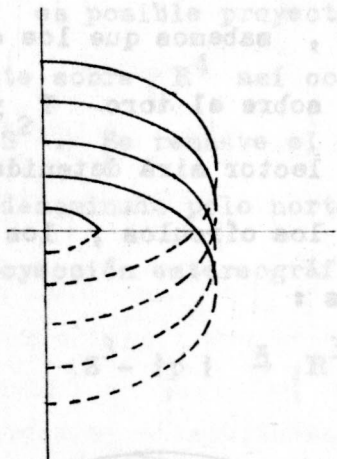


figura 7

Esto se debe a que $S^1 = \{(z, 0) \mid z \bar{z} = 1\}$, de modo que podemos parametrizar a S^1 como

$$z = e^{it}.$$

Pero $S^1 \cdot x = (e^{it}, 0) \cdot (a e^{ir}, b e^{is})$, donde $x =$

(z_1, z_2) con $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$; y, recordando la multiplicación cuaterniónica,

$$S^1 \cdot x = (a e^{i(t+r)}, b e^{i(t+s)}) \subset T(x).$$

El caso extremo, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, será estudiado más adelante.

5.3 Damos en seguida una interpretación geométrica de los entrelazamientos. Sean x, y dos puntos sobre el toro T . Entonces, sabemos que los círculos $S^1 \cdot x$ y $S^1 \cdot y$ se encuentran sobre el toro T y además están entrelazados. Si el lector mira detenidamente la figura 8, verá la posición de los círculos, los cuales están claramente entrelazados:

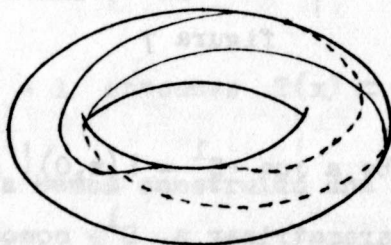


figura 8.

6. POSICION DEL TORO EN LA 3-ESFERA

A partir de este momento abandonamos la notación compleja y recurrimos a la notación usual de coordenadas reales en el espacio ; éllo nos permitirá demostrar rápidamente que los toros T son superficies de revolución en \mathbb{R}^3 bajo una proyección estereográfica .

6.1 Si denotamos los vectores $X \in \mathbb{R}^4$ como $X = (x, y, z, w)$, es posible proyectar la esfera S^3 estereográficamente sobre \mathbb{R}^4 así como procedimos en 1.3 con la esfera S^2 . Se remueve el punto $p \in S^3$, $p = (0, 0, 0, 1)$ denominado polo norte de la 3-esfera : se define la proyección estereográfica π .

$$S^3 - \{p\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^3$$

por :

$$\pi(x, y, z, w) = \frac{1}{1-w} (x, y, z)$$

Claramente , π es un homeomorfismo y enviará a todo conjunto contenido en $S^3 - \{p\}$ en un conjunto homeomorfo contenido en \mathbb{R}^3 .

El toro

$$T(x) = (a e^{ir} , b e^{is})$$

en coordenadas reales se expresa como

$$T(x) = (a \cos r, a \operatorname{sen} r, b \cos s, b \operatorname{sen} s) .$$

Ya que $T(x)$ está contenido en la 3-esfera, su imagen

$\pi [T(x)]$ por π está contenida en R^3 . Pero,

$$\pi [T(x)] = \pi(a \cos r, a \operatorname{sen} r, b \cos s, b \operatorname{sen} s)$$

$$= \frac{1}{1-b \operatorname{sen} s} (a \cos r, a \operatorname{sen} r, b \cos s) .$$

De modo que si consideramos la curva $(y(s), z(s))$ sobre el plano yz de R^3 , donde

$$y(s) = \frac{a}{1-b \operatorname{sen} s}, \quad z(s) = \frac{b \cos s}{1-b \operatorname{sen} s} ;$$

tenemos que

$$\pi [T(x)] = (y(s) \cos r, y(s) \operatorname{sen} r, z(s)) ;$$

es precisamente la superficie de revolución que se obtiene

al rotar la curva $(y(s), z(s))$ alrededor del eje z .

(fig. 9).

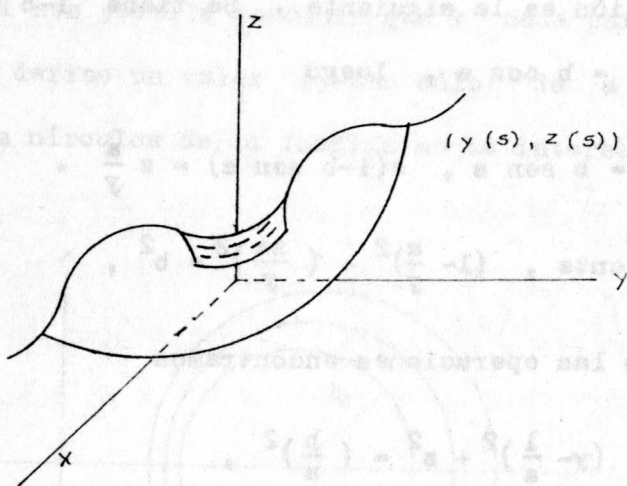


figura 9

6.2 Teorema . La curva

$$y(s) = \frac{a}{1-b \operatorname{sen} s}, \quad z(s) = \frac{b \cos s}{1-b \operatorname{sen} s}, \quad a^2 + b^2 = 1$$

es un círculo de radio $\frac{b}{a}$ y centro $(0, \frac{1}{a}, 0)$ (fig. 10) .

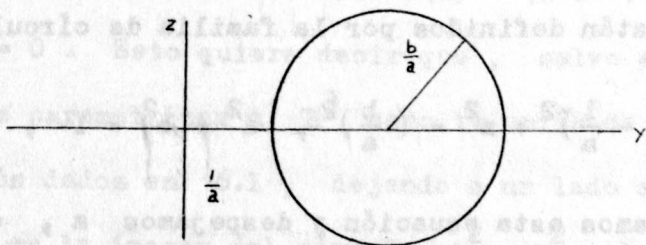


figura 10

La demostración es la siguiente . Se tiene $1 - b \operatorname{sen} s = \frac{a}{y}$,

$z(1 - b \operatorname{sen} s) = b \operatorname{cos} s$, luego

$$1 - \frac{a}{y} = b \operatorname{sen} s , \quad z(1 - b \operatorname{sen} s) = z \frac{a}{y} .$$

Por consiguiente , $(1 - \frac{a}{y})^2 + (\frac{za}{y})^2 = b^2$,

y efectuando las operaciones encontramos

$$(y - \frac{1}{a})^2 + z^2 = (\frac{b}{a})^2 ,$$

que es la ecuación del círculo .

En resumen , hemos demostrado que los toros $\pi [T(x)]$ son superficies de revolución en R^3 que se obtienen al rotar alrededor del eje z los círculos de radio $\frac{b}{a}$ y centro $\frac{1}{a}$.

Finalmente , para verificar que los toros $T(x)$ no se intersectan en la 3-esfera , basta ver que sus proyecciones estereográficas no se intersectan en R^3 . Como ellos están definidos por la familia de círculos

$$(y - \frac{1}{a})^2 + z^2 = (\frac{b}{a})^2 , \quad a^2 + b^2 = 1 ,$$

si desarrollamos esta ecuación y despejamos a , obtenemos

$$a = \frac{2y}{1 + y^2 + z^2} ;$$

lo cual nos permite concluir que : cada par (y,z) donde $y > 0$ define un valor (y uno sólo) de a de tal manera que dos círculos de la familia no se intersectan . (fig.11).

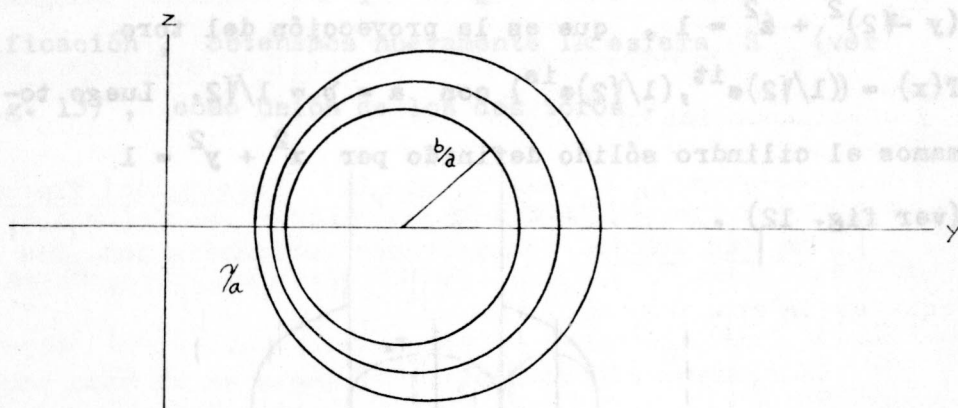


figura 11

Nótese que la recta $x = y = 0$ no es imagen de un toro , sino del círculo $z^2 + w^2 = 1$, ya que $\pi(0,0,z,w) = \frac{1}{1-w}(0,0,z)$. Este es precisamente el círculo contenido en el toro $T(x) = (a e^{it}, b e^{is})$ donde $a = 0$. Esto quiere decir que , salvo este círculo , podemos parametrizar a \mathbb{R}^3 como la unión de toros de revolución dados en 6.1 , dejando a un lado el eje de las z que es la imagen del círculo $z^2 + w^2 = 1$.

Ahora podemos ver que S^3 es la unión de dos toros

sólidos pegados por sus fronteras .

Para ilustrarlo , procederemos de la manera siguiente . Tomamos , en primer lugar , el toro sólido T_1 , obtenido de rotar alrededor del eje z el círculo $(y - \sqrt{2})^2 + z^2 = 1$, que es la proyección del toro $T(x) = ((1/\sqrt{2})e^{it}, (1/\sqrt{2})e^{is})$ con $a = b = 1/\sqrt{2}$. Luego tomamos el cilindro sólido definido por $x^2 + y^2 = 1$ (ver fig. 12) .

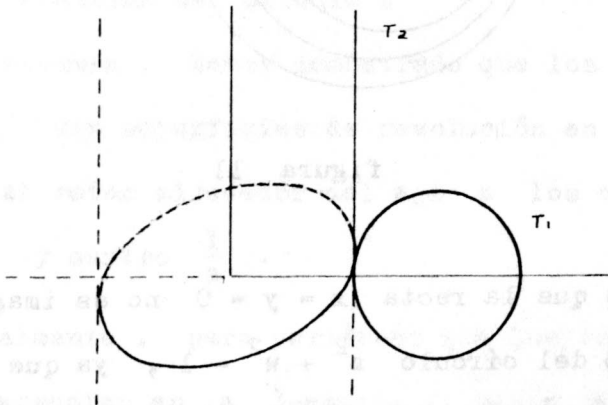


figura 12

Este cilindro sólido se convierte en un toro sólido T_2 en la esfera S^3 en donde cada recta $x^2 + y^2 = 1$ paralela al eje z se convierte en un círculo . Si estos círculos los denominamos "mayores" y los correspon

dientes círculos de T_1 los denominamos "menores" podemos pegar cada círculo "mayor" con el "menor" correspondiente, lo cual equivale a identificar las fronteras de los toros sólidos T_1 y T_2 . Por medio de tal identificación, obtenemos nuevamente la esfera S^3 (ver fig. 13), como unión de los dos toros.

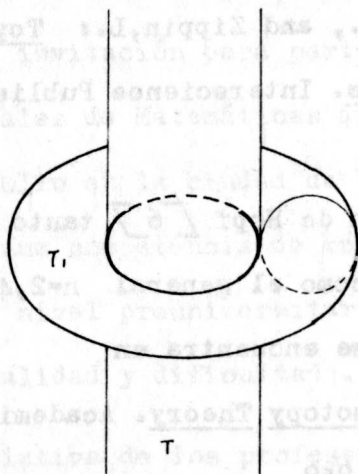


figura 13.

BIBLIOGRAFIA

Para los conceptos topológicos fundamentales, [2], [5] así como la definición de nudo [7] ver

- (1) Hocking J. G. y Young G. S., Topology, Addison-

Wesley (1961) .

Sobre cuaternios , ver

- (ii) Chevalley C. Theory of Lie Groups., Princeton Math. Ser., No. 8, Princeton Univ, Press, 1946 .

Conceptos tales como grupos topológicos, subgrupos, grupos cocientes, etc. [1], [4], [5], se encuentran en

- (iii) Motgomery, D., and Zippin, L.: Topological Transformation Groups. Interscience Publishers Inc., New York, 1955 .

La proyección de Hopf [6] tanto en el caso particular $n=2$ como el general $n=2,4,8$ de la esfera $S^{2n-1} \rightarrow S^n$ se encuentra en

- (iv) Hu, S.T., Homotopy Theory. Academic Press. New York and London, 1959 .

Para el caso $n=2$, ver

- (v) Wall, C.T.C, A Geometric Introduction to Topology. Addison-Wesley Publishing Company. 1972 .

Un estudio bastante detallado de el Toro [8] puede verse en el libro de

- (vi) Barret, O'Neil., Elementary Differential Geometry.

Kemel GEORGE .