Boletín de Matemáticas

Vol. XV , No. 2 (1981), pags, 65 - 79

# CONVERGENCIAS ASOCIADAS A TOPOLOGIAS : PUNTOS FIJOS DE UN OPERADOR

Carlos J. RUIZ S.

## 1. PUNTOS FIJOS DE $k = \tilde{C}\,\tilde{T}$ PARA UNA PAREJA DE FUNCIONES ADJUNTAS $\underset{\to}{\tilde{C}}\,\underset{\to}{\tilde{T}}$ .

Recordemos que una pareja de funciones $U \xrightarrow{s} V \xrightarrow{d} U$ monótonas entre conjuntos ordenados , cumplen las condiciones de adjunción (s = siniestra d = diestra) si para $u \in U$ y $v \in V$ las relaciones

$$s(u) < v \quad \text{y} \quad u < d(v)$$

son equivalentes .

En las condiciones anteriores se puede afirmar que

1) s conmuta con extremos superiores

2) t conmuta con extremos inferiores

Es más , las funciones $j = ds : U \to U$ y $k = sd : V \to V$ cumplen

3) $k(v) < v$ y $u < j(u)$ para $u \in U$, $v \in V$

4) $j \cdot j = j$ y $k \cdot k = k$

y , 5) Las condiciones siguientes son equivalentes para un punto $u$ de $U$ (resp $v$ de $V$)

a) $u$ es punto fijo de $j$ : es decir $j(u) = u$ . (resp. $v$ es punto fijo de $k$)

b) $u$ está en la imagen de $d$ (resp. $v$ está en la imagen de $s$) .

6) Supongamos ahora que el conjunto $V$ sea cerrado para extremos inferiores (e.d. todo subconjunto no vacío tiene extremo inferior) y que $U$ sea cerrado para extremos superiores . En esas condiciones

a) el conjunto de puntos fijos de $k$ es cerrado para extremos superiores (e.d. si $F$ es un subconjunto no vacío de puntos fijos de $k$ , su extremo superior es un punto fijo de $k$).

b) el conjunto de puntos fijos de $j$ es cerrado para extremos inferiores .

2. LAS CONDICIONES $C_1$, $C_2$, $C_3$ PARA UN PUNTO FIJO DE $k$ : $\mathrm{Crit}(X) \to \mathrm{Crit}(X)$

Para una función $C : X \to P(\mathrm{Suc}\ X)$ se había convenido en que por lo menos cumpliera las condiciones $C_1$ y $C_2$ para que pasara a formar parte de

Crit(X) :

$C_1$. Si $S_x$ representa la función constante de valor $x$ , $S_x \in C(x)$ .

$C_2$. Si $S \in C(x)$ , toda subsucesión S' de S también está en $C(x)$ .

NOTA :

Una función $Q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ será <u>propia</u> si para cada $n$, $Q^1(n)$ es finito . Si $S : \mathbb{N} \to X$ es una sucesión , y $Q$ es propia , $S \cdot Q$ se llamará sub-sucesión de $S$ .

El conjunto Crit(X) queda ordenado por la relación " $C > C'$ si para cada $x \in X$ , $C(x) \subseteq C'(x)$ " . Con este orden Crit X tiene un elemento máximo , uno mínimo y es cerrado para extremos inferiores y superiores .

Por otra parte notemos Top(X) el conjunto de las topologías sobre X que , ordenado por inclusión , goza de las mismas características de máximos , mínimos y extremos del anterior .

Entre Top(X) = U y Crit(X) = V existe un par adjunto

$$\mathrm{Top}(X) \xrightarrow{\tilde{C}} \mathrm{Crit}(X) \xrightarrow{\tilde{T}} \mathrm{Top}(X)$$

que asocia

a) A una topología t sobre X , el criterio de convergencia $\tilde{C}(t)$ para el que $\tilde{C}(t)(x)$ representa las sucesiones t-convergentes a $x$ ;

b) a una función $C \in Crit(X)$ la topología $\tilde{T}(C)$ cuyos abiertos $A$ quedan determinados por la siguiente norma :

" Cada vez que para un $x$ de $A$ y una sucesión $S$ de puntos de $X$ , se cumpla que $S \in C(x)$ , necesariamente, $S$ está casi toda en $A$ "

NOTA :

decimos que una sucesión $S$ está casi-toda en $A$ , si $S(n) \in A$ para casi todo $n$ , salvo eventualmente para finitos valores de $n$ .

AFIRMACION .

La función $\tilde{C}$ es adjunta a la izquierda de la función $\tilde{T}$ .

De acuerdo con el Parágrafo 2, si notamos $k = \tilde{C}\,\tilde{T}$ para determinar los puntos fijos , basta estudiar la imagen de la función $\tilde{C}$. Es decir las convergencias de la forma $\tilde{C}(t)$, donde $t$ es una topología sobre $X$ .

Es más , toda convergencia de la forma $\tilde{C}(t)$ es de la forma $\tilde{C}(t_o)$ en donde $t_o$ está en la imagen de $\tilde{T}$ (es decir $t_o$ es punto fijo de $\tilde{J} = \tilde{T}\,\tilde{C}$) : en efecto

$\tilde{C}(t) = \tilde{C}\,\tilde{T}(\tilde{C}(t)) = \tilde{C}(\tilde{T}\,\tilde{C}(t)) = \tilde{C}(t_o)$ , con $t_o = \tilde{T}\,\tilde{C}(t)$ .

Una propiedad , satisfecha por los $\tilde{C}(t)$ y a la que hemos denominado $C_3$ , se refiere a la relación entre los valores de adherencia y los valores límites de sucesiones en un espacio topológico :

Para una topología t , y una sucesión S de puntos de X , un punto x es valor de adherencia de S si existe una subsucesión S' de S que converge a x según t . Es claro que un valor límite x de S (es decir cuando S t-converge a x) es un valor de adherencia: Inversamente , sin restricciones sobre el espacio t , si notamos

$$vl(S) = \{x \mid S \text{ t-converge a } x\}$$

$$va(S) = \{x \mid x \text{ valor de adherencia de } S\}$$

entonces

$$vl(S) = \bigcap_{S' < S} va(S') \qquad (C_3)$$

(S' < S significa que S' es subsucesión de S) .

Se nota , sin embargo , que las funciones vl y va : Suc X → P(X) también tiene sentido para un criterio C ∈ Crit X ya que dado C: X → P(Suc X) , se define naturalmente el conjunto

$$vl_C(S) = \{x \mid S \in C(x)\}$$

$$va_C(S') = \{y \mid \text{ existe } S' < S, \text{ con } S' \in C(y)\}$$

y también se tiene , cuando $C$ cumple $C_2$ , que

$vl_C(S) \subset vl_C(S') \subset va(S')$ para $S' < S$ con lo cual

$vl_C(S) \subset \bigcap_{S'<S} va_C(S')$ , con solo suponer $C$ en Crit X .

DEFINICION

Diremos que un criterio $C \in$ Crit X cumple la condición $C_3$ si , para toda sucesión $S$ ,

$$vl_C(S) = \bigcap_{S' < S} va_C(S') \qquad (C_3)$$

Dicho de otra manera , si para cada sucesión $S$ se cumple que

" para cada una de sus subsucesiones $S'$ , se puede encontrar una subsucesión $S'' < S'$ , que cumpla $S' \in C(x)$ , entonces $S$ misma está en $C(x)$ " .

Es del caso anotar que si bien la condición $C_3$ es necesaria para que $C \in$ Crit X sea punto fijo de $k$ , no es suficiente , como nos lo muestra el ejemplo que sigue :

EJEMPLO. (Cf.(4)) .

Nos situamos en un conjunto infinito X y elegimos un punto $\underline{a}$ de $X$. Prescribimos que a un punto $x$ distinto de $\underline{a}$, solo converjan las sucesiones casi-constantes de valor $x$. En cambio, son convergentes hacia $\underline{a}$ todas las sucesiones salvo aquellas que admitan una subsucesión propia. Dicho de otra manera, las que tienen rango finito. Los abiertos de $\tilde{T}(C)$ son de dos tipos según que contengan el punto $\underline{a}$, ó que no lo contengan.

1. Si $A$ no contiene al punto $\underline{a}$, es abierto, sin más;

2. Si $A$ contiene a $\underline{a}$, necesariamente $A$ debe coincidir con $X$ todo entero.

Cuando se calcula la convergencia debida a dicha topología se encuentra que las sucesiones de $X$, sin condición convergen el punto $\underline{a}$. Con lo cual $\tilde{C}\,\tilde{T}(C)$ es estrictamente menor que $C$. Es decir que nuestro criterio $C$ no es punto fijo de $k = \tilde{C}\,\tilde{T}$.

Sin embargo, satisface, además de $C_1$ y $C_2$ la propiedad $C_3$: si una sucesión $S$ no converge al punto $\underline{a}$, admite una sub-sucesión $T$ propia y cualquier subsucesión de ésta, es, a fortiori, propia; con lo cual $T$ no admite subsucesiones convergentes al punto $\underline{a}$.

Nótese que el ejemplo , deja de ser un caso " de <u>no</u> punto fijo " , cuando se restringe a un conjunto finito X , pues allí , convergerían hacia <u>a</u> todas las sucesiones de puntos de X .

## 3. LAS CONDICIONES DE TIPO $C_4$

En vista de la debilidad de la condición $C_3$, se pensó en captar otra característica de la convergencia de sucesiones en espacios topológicos, con miras a hacer , de élla y $C_3$ , condiciones suficientes para que un criterio C fuera punto fijo de k .

Se examinó primero el caso de espacios 1-contables y se observó que allí se cumple la siguiente propiedad de " diagonalización " .

Si $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ es una bi-sucesión, tal que para cada k , la sucesión $S(k,-) : \mathbb{N} \to X$, $n \rightarrowtail S(k,n)$ converge a $x_k$ , y , la sucesión $k \rightarrowtail x_k$ converge a x . Entonces existe una función $Q : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $S \cdot Q : \mathbb{N} \to X$ es convergente a x .

Obsérvese que en el parágrafo anterior nos abstuvimos de imponer condiciones a Q . Si se está pensando en un espacio topológico 1-contable y Hausdorff se puede elegir $Q : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ entre las funciones que cumplen la siguiente propiedad :

Si $n > m$, $Q(n) = (Q_1(n), Q_2(n))$,

$Q(m) = (Q_1(m), Q_2(m))$ , entonces

$Q_1(n) > Q_1(m)$ y $Q_2(n) > Q_2(m)$ .

Si eliminamos la propiedad de Hausdorff , $Q$ puede ser escogida entre las funciones propias .

En cada caso , con condiciones mas o menos fuertes de la función $Q$ , obtenemos una condición de " diagonalización " , o del tipo $C_4$ , y en el trabajo de R. de Rebolledo y S. de Plazas (4) aparecen las dificultades que se encuentran cuando se desea demostrar la equivalencia entre los puntos fijos del operador k y los criterios C que satisfacen $C_3$ y " $C_4$ " (según se haya escogido el " $C_4$ ") .

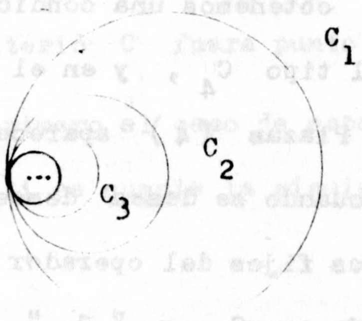
En su trabajo M. Suarez , logró establecer una condición $C_4$ hasta llegar a concluir que para que un criterio sea punto fijo del operador k , basta que cumpla $C_3$ y (ése) $C_4$ .

Sin embargo , el problema no termina a ese nivel pues se demuestra que dichas condiciones suficientes no son necesarias .

Con el fin de precisar esa condición $C_4$, analizamos el caso de la convergencia en un espacio celular que no sea localmente finito .

EJEMPLO (R. de Rebolledo y S. de Plazas) .

Sea $X$ el conjunto formado por circunferencias $C_n$, una por cada natural $n = 1, 2, \ldots$, de radios $1/n$, como muestra la figura .




Cada $C_n$ con su topología métrica común y corriente , como subespacio de $\mathbb{R}^2$. En cambio $X$ no tendrá la topología de subespacio : un conjunto es abierto en $X$ si , y solamente si , su traza con cada $C_n$ es abierto en $C_n$. De manera semejante , se caracterizan los cerrados . Nótese por ejemplo que el conjunto

$H = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ es cerrado en esa topología, y no lo és en la de subespacio . Ahora bien ,

AFIRMACION

Son convergentes hacia el punto $\underline{a}$ , aquellas sucesiones S que cumplen : (a) en $\mathbb{R}^2$ son convergentes hacia $\underline{a}$ , y , (b) S toca a lo sumo un número finito de arcos $C_n - \{a\}$.

Así pues , la sucesión $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ no converge en X hacia $\underline{a}$ , a pesar de que sí lo hace en $\mathbb{R}^2$ .

Para construir sucesiones convergentes hacia el punto $\underline{a}$ , se forman varios arcos en número finito . En cada uno se considera una sucesión convergente hacia $\underline{a}$ (en $\mathbb{R}^2$) y se amalgaman .

Por el contrario si $S^{(1)}$ es una sucesión en $C_1 - \{a\}$ que converge a $\underline{a}$ , y $S^{(2)}$ es una sucesión de $C_2 - \{a\}$ convergente a $\underline{a}$ y así sucesivamente se define $S^{(k)}$ para $k = 1,2,3,4\ldots$, entonces la bisucesión $S : (k,n) \rightarrowtail S^k(n)$ cumple (1) para cada k , $S(k, \_) = S^{(k)}$ es convergente a $x_k = a$ , (2) no existe una función $Q : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que cumpla la condición

(•) " el compuesto $n \rightarrowtail Q(n) = (Q_1(n), Q_2(n)) \rightarrowtail Q_1(n)$

de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es propia" , tal que $S.Q$ sea convergente hacia <u>a</u> en $X$ .

En efecto la sucesión $n \rightarrowtail S.Q(n) = S^{Q_1(n)}(Q_2(n))$ , toma valores , para cada valor de $n$ , en el arco $C_{Q_1(n)} - \{a\}$ . La condición que se impuso a $Q$ , hace que $n \rightarrowtail S.Q(n)$ no pueda tocar cada arco $C_k - \{a\}$ sino un número finito de veces , con lo cual , $n \rightarrowtail S.Q(n)$ toca infinitos arcos y ya , en nuestra topología sobre $X$ , no es convergente al punto <u>a</u>

4. CONDICION SUFICIENTE PARA QUE $C$ SEA PUNTO FIJO .

La condición $C_{4.s}$ impuesta por M. Suárez a un criterio $C$ de convergencia se enuncia así : cada vez que en una bi-sucesión $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ se cumpla (1) la sucesión $S^{(k)} : n \rightarrowtail S(k,n)$ $C$- converge a $x_k$, $k = 1, 2, \ldots$ (2) la sucesión $k \rightarrowtail (x_k)$ es $C$-convergente a $x$ , entonces existe una función $Q : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que cumple la condición (*) y tal que $S.Q : \mathbb{N} \to X$ es $C$-convergente a $x$ .

PROPOSICION. (M. Suárez) .

<u>Un elemento</u> $C$ de Crit $X$ es punto fijo del operador $K$ si cumple las condiciones $C_3$ y $C_{4.s}$ .

OBSERVACION 1.

Los puntos fijos de $K$ son las convergencias asociadas a topologías. Así que las condiciones $C_1$, $C_2$, $C_3$ y $C_{4.s}$ son <u>suficientes</u> sobre una función $C : X \to P(Suc\ X)$ para que $C$ sea asociada a una topología. El ejemplo que dimos de los arcos tomados por un punto, nos muestra la existencia de convergencia asociada a topologías sin que cumplan $C_{4.s}$.

OBSERVACION 2.

Como el conjunto de puntos fijos de $K$ es cerrado para extremos superiores, la observación anterior nos lleva a dudar sobre la conservación de $C_{4.s}$ por extremos superiores : es decir que se puede esperar desde ahora encontrar una colección $C_\lambda$ de criterios que cumplan $C_3$ y $C_{4.s}$ <u>sin que</u> el criterio $\mathrm{Sup}_\lambda C_\lambda$ (que cumple $C_3$) cumpla $C_{4.s}$.

Este tipo de fenómenos se había presentado al estudiar los puntos fijos del operador J, (cf. 2 ) cuando se trataba de caracterizar las topologías que quedan completamente determinadas por la convergencia de sus sucesiones. La propiedad de ser 1-contable era suficiente para ser punto fijo y además no era una propiedad es table por extremos inferiores .

En este caso se completó el estudio de los puntos fijos de J con la afirmación " todo espacio 0-contable es extremo inferior de topologías 1-contables " .

En este caso digamos que para los criterios que cumplen ($C_1$, $C_2$ | y) $C_3$, la propiedad $C_{4\cdot s}$ viene a ser de cierta manera lo que la 1-contabilidad era para las topologías . En efecto .

PROPOSICION. (M. Suárez (3) ) .

Todo punto fijo de K es extremo superior de convergencias que cumplen ($C_1$, $C_2$) $C_3$ y $C_{4\cdot s}$ y viceversa , si un criterio C extremo superior de criterios $\{C_\lambda\}$ que cumplen $C_3$ y $C_{4\cdot s}$ entonces es punto fijo de K .

## BIBLIOGRAFIA

(1) Ruiz C. y Suárez M., Topología o convergencia. (Cuaderno 1. Fascículo 2.). Paipa (1980) .

(2) Ruiz C., Topología o Convergencia. (Cuaderno 1. Fasc 1) Tunja (1975) .

(3) Suárez M., Notas no publicadas .

(4) De Rebolledo R. y De Plazas S. Tesis. Universidad Pedagógica Nacional. (1981).

Carlos RUIZ SALGUERO .

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional

Bogotá - Colombia .