

PROBLEMAS DE OLIMPIADAS - SOLUCIONES ORIGINALES DE
ESTUDIANTES COLOMBIANOS

Mary FALK de LOSADA.

Como parte de la actividad preparatoria para las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas que se realizaron en Washington en el presente año, se les dieron a los integrantes del equipo Colombiano los enunciados de varios problemas que formaron parte de los temarios de Olimpiadas Internacionales y Norteamericanas en años anteriores.

Los participantes respondieron con soluciones originales, geniales y sorprendentemente sencillas en muchos casos. Transcribimos varios de ellos a continuación para que se pueda apreciar el nivel de desempeño matemático que alcanzaron.

Vale la pena anotar que existen solucionarios a algunos temarios de estas competencias pero que en ninguno

de los casos de los problemas cuyas soluciones aparecen a continuación , tuvieron acceso a una solución hecha por otra persona , ni publicada ni discutida en clase .

(1) XIX OLIMPIADA INTERNACIONAL . Problema 2 . (Sometido por Viet Nam) .

Resuelto por NELSON MEDINA , Colegio Santo Tomás de Aquino .

En una sucesión finita de números reales la suma de siete términos consecutivos cualesquiera es negativa y la suma de once términos consecutivos cualesquiera es positiva . Determinar el máximo número de términos de una tal sucesión .

Solución

Es un poco difícil , pero posible , encontrar una sucesión de 16 términos :

a_n : (16), (8), (-28), (8), (16), (8), (-30), (16), (8),

n : 1 2 3 4 5 6 7 8 9

a_n : (-28), (8), (16), (8), (-29), (16), (8),

n : 10 11 12 13 14 15 16

Desde luego cualquier múltiplo (real) de esta sucesión cumplirá con los mismos requisitos . En resumen , es posible encontrar una sucesión de 16 términos con las

características requeridas , pero no de diecisiete ;

Veamos por qué.

$$\left. \begin{array}{l} 14 \\ \Sigma \\ k=4 \end{array} \right\} a_k > 0 \quad \left. \begin{array}{l} 7 \\ \Sigma \\ k=4 \end{array} \right\} a_k > 0 \\
 \left. \begin{array}{l} 14 \\ \Sigma \\ k=8 \end{array} \right\} a_k < 0 \quad \left. \begin{array}{l} 7 \\ \Sigma \\ k=1 \end{array} \right\} a_k < 0 \\
 \left. \begin{array}{l} 3 \\ \Sigma \\ k=1 \end{array} \right\} a_k < 0
 \end{array} \right\} a_4 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 11 \\ \Sigma \\ k=1 \end{array} \right\} a_k > 0 \\
 \left. \begin{array}{l} 11 \\ \Sigma \\ k=5 \end{array} \right\} a_k < 0 \\
 \left. \begin{array}{l} 4 \\ \Sigma \\ k=1 \end{array} \right\} a_k > 0
 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 15 \\ \Sigma \\ k=5 \end{array} \right\} a_k > 0 \quad \left. \begin{array}{l} 8 \\ \Sigma \\ k=5 \end{array} \right\} a_k > 0 \\
 \left. \begin{array}{l} 15 \\ \Sigma \\ k=9 \end{array} \right\} a_k < 0 \quad \left. \begin{array}{l} 8 \\ \Sigma \\ k=2 \end{array} \right\} a_k < 0 \\
 \left. \begin{array}{l} 4 \\ \Sigma \\ k=2 \end{array} \right\} a_k < 0
 \end{array} \right\} a_5 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 12 \\ \Sigma \\ k=2 \end{array} \right\} a_k > 0 \\
 \left. \begin{array}{l} 12 \\ \Sigma \\ k=6 \end{array} \right\} a_k < 0 \\
 \left. \begin{array}{l} 5 \\ \Sigma \\ k=2 \end{array} \right\} a_k > 0
 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 16 \\ \sum_{k=6} a_k > 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 9 \\ \sum_{k=6} a_k > 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 5 \\ \sum_{k=3} a_k < 0 \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} 16 \\ \sum_{k=10} a_k < 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 9 \\ \sum_{k=3} a_k < 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 6 \\ \sum_{k=3} a_k > 0 \end{array} \right\} a_6 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 13 \\ \sum_{k=3} a_k > 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 13 \\ \sum_{k=7} a_k < 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 17 \\ \sum_{k=7} a_k > 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 10 \\ \sum_{k=7} a_k > 0 \rightarrow a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} > 0, \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} 17 \\ \sum_{k=11} a_k < 0 \end{array} \right\}$$

y además

$$\left. \begin{array}{l} a_4 > 0 \\ a_5 > 0 \\ a_6 > 0 \end{array} \right\} a_4 + a_5 + a_6 > 0$$

$$\downarrow \\
 a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} > 0$$

$$\downarrow \\
 \left. \begin{array}{l} 10 \\ \sum_{k=4} a_k > 0 \end{array} \right\}$$

Lo cual es una contradicción, porque hemos obtenido que la

suma de siete términos consecutivos (desde a_4 , hasta a_{10}) es mayor que cero, o sea que es positiva, lo cual contradice la hipótesis.

Nota

- i) $\{c$, significa que si $a, b,$ y c son proposiciones, $(a \wedge b) \Rightarrow c$
- ii) Si una proposición no está precedida de $\{$, significa que es aplicación de la hipótesis.

(2) V OLIMPIADA DE LOS ESTADOS UNIDOS . Problema 1.

Resuelto por JOSE GUTERMAN , Colegio Colombo-Hebreo.

A) Supóngase que cada cuadrado de un tablero de 4×7 como el ilustrado arriba se colorea bien sea de negro o bien sea de blanco . Demuestre que , en cualquier caso , debe

haber un rectángulo (formado por líneas horizontales y verticales, del tablero) como el delineado en la figura, cuyos cuatro cuadrados esquimeros tienen el mismo color.

Se presenta el rectángulo pedido cuando en dos columnas diferentes hay dos cuadrados del mismo color ubicados en la misma forma. (Es decir, en las mismas filas).

Analicemos los casos que se pueden presentar.

1o. Caso

Todas las columnas tienen dos cuadros negros y dos cuadros blancos. Entonces la forma de combinar dos cuadros en 4 espacios es

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 6.$$

y en la séptima columna se debe repetir una colocación.

2o. caso

En una columna cualquiera hay 3 cuadros blancos (o negros) Entonces la forma de combinar dos cuadros negros en los 3 espacios de las filas correspondientes es

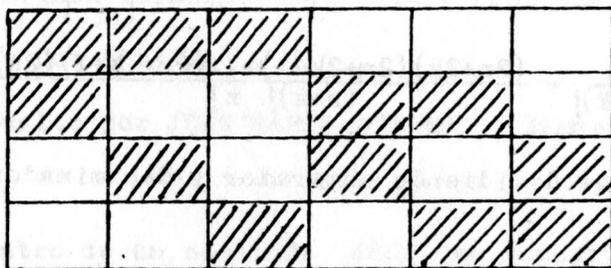
$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

y en la quinta columna se debe repetir una colocación de dos cuadros negros o dos cuadros blancos , así forman el cuadrado requerido .

Nota :

Siempre hay dos rectángulos de los pedidos .

B) Hallar una manera de colorear un tablero de 4 x 6 en el cual no hay ningún rectángulo de los descritos antes , es decir , que tenga los cuatro cuadrados esquineros del mismo color .



(3) El siguiente problema fué resuelto por : MARIO MEJIA , del Colegio San Carlos ; de una manera mucho más sencilla de la que aparece publicada en un solucionario de problemas de olimpiadas internacionales .

Cualesquiera que sean los naturales m y n se tiene que

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N} .$$

Caso 1. $m = n$

$$\rightarrow \frac{(2m)! (2n)!}{m! n! (m+n)!} = \frac{(2m)! (2m)!}{m! m! (2m)!}$$

tenemos que $\frac{(2m)}{m m}$ es un entero pues es igual a C_m^{2m}

Caso 2. $m > n$.

En este caso, $m = n + k$, $k \in \mathbb{N}$, y

$$\frac{(2m)! (2n)!}{m! n! (m+n)!} = \frac{(2n+2k)! (2n)!}{(n+k)! n! (2n+k)!}$$

Pero

$$\frac{(2n+2k)! (2n)!}{(n+k)! n! (2n+k)!} = \frac{(2n+2k)(2n+2k-1)\dots(2n+k+1)(2n)!}{(n+k)! n!}$$

que se obtiene dividiendo numerador y denominador por $(2n+k)!$

Ahora bien,

$$\begin{array}{lll} 2n+2k & \text{es divisible por} & n+k \\ 2n+2k-2 & " & " & n+k-1 \\ 2n+2k-2p & " & " & n+k-p \end{array}$$

y el último término

$$2n+2k - (2k-2) \text{ es divisible por } n+k-(k-1)$$

0, lo que es equivalente, $2n+2$ es divisible por $n+1$.

El producto de los factores restantes del numerador, después de cancelar , es un entero , digamos E

$$E = (2n+2k-1)(2n+2k-3)\dots(2n-2k-2(k-1))$$

y la expresión queda

$$\frac{E \cdot 2n!}{n! \cdot n!} = E \cdot C_n^{2n}$$

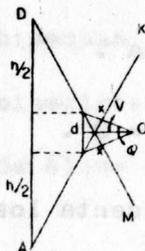
que también es un entero .

(4) OLIMPIADA INTERNACIONAL XIX . Problema 1. (Sometido por HOLANDA) .

Resuelto por JUAN RAMON ACEVEDO , Gimnasio Moderno.

Dentro de un cuadrado ABCD se construyen los triángulos equiláteros ABK, BCL, CDM, DAN. Demostrar que los puntos medios de los cuatro segmentos KL, LM, MN y NK y los puntos medios de los ocho segmentos AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN y AN son los doce vértices de un dodecágono regular .

Entonces , el dodecágono es cíclico . (1)



$$d+h = 1$$

$$d = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

figura 3

Aquí d es la distancia entre dos vértices consecutivos que son puntos medios de los lados de los triángulos equiláteros .

$$\frac{d}{2} = x \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 15^\circ} = \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}$$

como

$$\frac{2-\sqrt{3}}{4} = \operatorname{sen}^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\phi}{2} = 15^\circ ; \phi = 30^\circ$$

Hay 4 ángulos como $\phi = 30^\circ$.

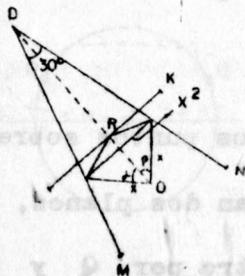


figura 4

$$\frac{x_2}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 15^\circ$$

$$x_2 = \operatorname{sen} 15^\circ = x$$

El triángulo cuyos lados son x , x_1 y x_2 es e-

quilátero y , por lo tanto , $\pi + \rho = 60^\circ$. El ángulo NDM es bisecado por la diagonal del cuadrado y R (punto medio de LK) está sobre ella .

Entonces $\pi = \rho = 30^\circ = \varphi$.

Como π (δ ρ) representa los otros ocho ángulos centrales del dodecágono , entonces el dodecágono tiene todos sus ángulos centrales iguales (miden 30°) . (2)

Las conclusiones (1) y (2) implican la tesis .

(5) III OLIMPIADA DE LOS ESTADOS UNIDOS . Problema 3.

Resuelto por RICARDO VELEZ , Colegio San Carlos .

Dos puntos de la superficie de una esfera de radio 1 se unen por medio de una curva interior de longitud menor que 2 . Desmostrar que la curva debe estar contenida en algún hemisferio de la esfera dada .

Solución :

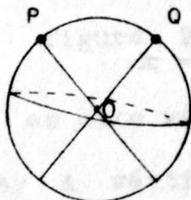


figura 1

Sean P y Q los dos puntos sobre la esfera O . Se trazan dos planos, uno por O y P , el otro por Q y O , de tal manera que sean perpendiculares a los planos tangentes a la esfera en P y en Q .

Así se forman ángulos diedros .

Después se bisectan los dos diedros opuestos , de modo que el plano bisectriz A divida la esfera en 2 hemisferios , uno de ellos conteniendo P y Q :

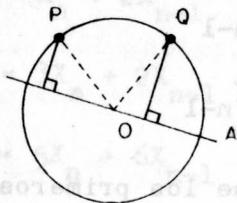


figura 2 .

Por consiguiente la distancia de los dos puntos al plano resultante es la misma . Para demostrar que cualquier curva de longitud menor que 2 que una P y Q , está conteni-
da en ese hemisferio , basta-

ría con trazar una elipsoide con focos en P y Q , siendo obviamente la suma de las distancias desde un pun-
to cualquiera de ella a P y Q igual a 2 .

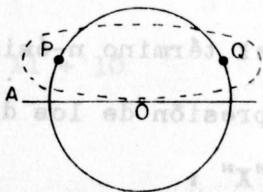


figura 3

Esta elipsoide , tangente al plano A en O , contiene cualquier curva interior que una a P y Q de longitud menor que 2 , en intersec-
ción con la esfera , quedando establecido el lugar geométri-

co que tendría esa curva .

(6) II OLIMPIADA DE ESTADOS UNIDOS . Problema 2 .

Resuelto por NELSON MEDINA , Colegio Santo Tomás de Aquino .

Sean (X_n) y (Y_n) dos sucesiones definidas de la siguiente manera :

$$X_0 = 1, X_1 = 1, X_{n+1} = X_n + 2X_{n-1}$$

$$Y_0 = 1, Y_1 = 7, Y_{n+1} = 2Y_n + 3Y_{n-1}$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$, de tal manera que los primeros términos de las dos sucesiones son :

$$(X_n) = 1, 1, 3, 5, 11, 21, \dots$$

$$(Y_n) = 1, 7, 17, 55, 161, 487, \dots$$

Probar que a excepción de "1" las dos sucesiones no tienen términos comunes .

Solución

Trataremos de hallar el término n -ésimo de cada una de las sucesiones , como expresión de los dos primeros términos de la sucesión en "X" :

$$X_{n+1} = X_n + 2X_{n-1} = 1X_n + 2X_{n-1}$$

$$X_{n+1} = (X_{n-1} + 2X_{n-2}) + 2X_{n-1} = 3X_{n-1} + 2X_{n-2}$$

$$X_{n+1} = 3(X_{n-2} + 2X_{n-3}) + 2X_{n-2} = 5X_{n-2} + 6X_{n-3}$$

$$X_{n+1} = 5(X_{n-3} + 2X_{n-4}) + 6X_{n-3} = 11X_{n-3} + 10X_{n-4}$$

⋮

O sea que

$$X_{n+1} = X_n + 2X_{n-1}$$

$$X_{n+2} = 3X_n + 2X_{n-1}$$

$$X_{n+3} = 5X_n + 6X_{n-1}$$

$$X_{n+4} = 11X_n + 10X_{n-1}$$

⋮

Y, tomando $n+1 = 2$ (para que $X_n = X_{n-1} = X_1 = X_0 = 1$)

$$X_2 = 1 + 2$$

$$X_3 = 3 + 2$$

Lo que puede comprobarse según la lista

$$X_4 = 5 + 6$$

inicial de "X".

$$X_5 = 11 + 10$$

⋮

A los términos 1, 3, 5, 11, ..., iniciales en ca
da una de las sumas los llamaremos m_2 (-1), m_3 (-3),
 m_4 (-5), m_5 (-11); etc. (Obsérvese que $m_1 = 1$ y que

$m_0 = 0$; ver explicación enseguida) . Entonces ,

$$X_n = m_n + (-1)^n \text{ y } \boxed{X_n = 2m_n + (-1)^n} ; \quad \text{¡ OJO !}$$

pero

$$2m_n = m_{n+1} + (-1)^{n+1} \rightarrow \text{esto se explica viendo el procedimiento utilizado al principio de la solución (para } X_{n+1} = \dots)$$

\rightarrow Ahora se entiende por qué

$$m_1 = 1, \text{ y } m_0 = 0 .$$

Entonces ,

$$m_{n+1} = 2m_n - (-1)^{n+1} = 2m_n + (-1)^n ;$$

$$m_n = 2m_{n-1} + (-1)^{n-1}$$

$$m_n = 2 \left[2m_{n-2} + (-1)^{n-2} \right] + (-1)^{n-1}$$

$$m_n = 4m_{n-2} + 2 \cdot (-1)^{n-2} + (-1)^{n-1} = 4m_{n-2} + (-1)^{n-2} \left[2-1 \right]$$

$$m_n = 4 \left[2m_{n-3} + (-1)^{n-3} \right] + (-1)^{n-2} \left[2-1 \right]$$

$$m_n = 8m_{n-3} + (-1)^{n-3} \left[4-2+1 \right] ,$$

por el procedimiento utilizado , podemos generalizar :

$$m_n = 2^k m_{n-k} + (-1)^{n-k} \left[2^{k-1} - 2^{k-2} + 2^{k-3} - \dots + (-1)^{k-1} \right]$$

y ahora , tomando $k = n-1$, tenemos ,

$$m_n = 2^{n-1}m_1 + (-1) \left[2^{n-2} - 2^{n-3} + 2^{n-4} - \dots + (-1)^{n-2} \right], \text{ pero}$$

$$m_1 = 1 \dots$$

$$m_n = 2^{n-1} - 2^{n-2} + 2^{n-3} - 2^{n-4} + \dots + (-1)^{n-1}$$

$$m_n = 2^{n-1} + 2^{n-2}(-1) + 2^{n-3}(-1)^2 + 2^{n-4}(-1)^3 + \dots + (-1)^{n-1},$$

Comparando esta expresión con la conocida fórmula :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}),$$

es fácil concluir que

$$a = 2 \quad \text{y} \quad b = -1,$$

entonces :

$$m_n = 2^{n-1} + 2^{n-2}(-1) + 2^{n-3}(-1)^2 + \dots + (-1)^{n-1} =$$

$$\frac{2^n - (-1)^n}{2 - (-1)} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

Por último ,

$$X_n = 2 \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3} \right) + (-1)^n = \frac{2^{n+1} - 2(-1)^n + 3(-1)^n}{3} = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$$

Esta última fórmula (en la que , reemplazando , obtenemos los valores que se nos dan para " X " en el planteamiento del problema) , explica por qué la suma de dos términos consecutivos de (X_n) es una potencia de dos (2) :

$$\frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} + \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3} = \frac{2^{n+1} + 2^n}{3} = \frac{2^n(2+1)}{3} = 2^n.$$

En resumen :

$$X_n = \boxed{\frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}}$$

Sigamos con (Y_n) :

$$Y_{n+1} = 2Y_n + 3Y_{n-1} = 2Y_n + 3Y_{n-1}$$

$$Y_{n+1} = 2(2Y_{n-1} + 3Y_{n-2}) + 3Y_{n-1} = 7Y_{n-1} + 6Y_{n-2}$$

$$Y_{n+1} = 7(2Y_{n-2} + 3Y_{n-3}) + 6Y_{n-2} = 20Y_{n-2} + 21Y_{n-3}$$

$$Y_{n+1} = 20(2Y_{n-3} + 3Y_{n-4}) + 21Y_{n-3} = 61Y_{n-3} + 60Y_{n-4}$$

⋮

O sea que :

$$Y_{n+1} = Y_n + 3Y_{n-1}$$

$$Y_{n+2} = 7Y_n + 6Y_{n-1}$$

$$Y_{n+3} = 20Y_n + 21Y_{n-1}$$

$$Y_{n+4} = 61Y_n + 60Y_{n-1}$$

⋮

Y , tomando $n+1=2$ (para que $Y_n = Y_1 = 7$, y $Y_{n-1} = Y_0 = 1$)

$$Y_2 = 7(2) + 3$$

$$Y_3 = 7(7) + 6 \quad \text{estos resultados, según puede compro-}$$

$$Y_4 = 7(20) + 21 \quad \text{barse, son los mismos que aparecen en}$$

$$Y_5 = 7(61) + 60 \quad \text{el enunciado.}$$

⋮

A los términos 2, 7, 20, 61, ... , factores del primer sumando en cada " Y ", los denotaremos por " P ":

$$P_2 = 2, P_3 = 7, P_4 = 20, P_5 = 61, \text{ etc. (puede verse que}$$

$$P_1 = 1, \text{ y } P_0 = 0, \text{ según demostramos en seguida)}$$

Entonces :

$$Y_n = 7(P_n) + (P_n + (-1)^n)$$

$$\boxed{Y_n = 8P_n + (-1)^n}$$

| OJO |

pero

$$3P_n = P_{n+1} + (-1)^{n+1} \quad \rightarrow \text{véase el procedimiento para ha-}$$

$$\text{llar } Y_{n+1} = \dots$$

$$\rightarrow \text{ésto explica por qué } P_1 = 1 \text{ y}$$

$$P_0 = 0$$

Entonces

$$P_{n+1} = 3P_n - (-1)^{n+1} = 3P_n + (-1)^n$$

$$\rightarrow P_n = 3P_{n-1} + (-1)^{n-1}$$

$$P_n = 3 \lfloor 3P_{n-2} + (-1)^{n-2} \rfloor + (-1)^{n-1}$$

$$P_n = 9P_{n-2} + 3 \cdot (-1)^{n-2} + (-1)^{n-1}$$

$$\rightarrow P_n = 9P_{n-2} + (-1)^{n-2} \lfloor 3-1 \rfloor$$

$$P_n = 9 \lfloor 3P_{n-3} + (-1)^{n-3} \rfloor + (-1)^{n-2} \lfloor 3-1 \rfloor$$

$$P_n = 27P_{n-3} + 9 \cdot (-1)^{n-3} + (-1)^{n-2} \lfloor 3-1 \rfloor$$

$$\rightarrow P_n = 27P_{n-3} + (-1)^{n-3} \lfloor 9-3+1 \rfloor$$

Generalizando

$$P_n = 3^k P_{n-k} + (-1)^{n-k} \lfloor 3^{k-1} - 3^{k-2} + 3^{k-3} - \dots + (-1)^{k-1} \rfloor$$

Y, tomando $k = n-1$,

$$P_n = 3^{n-1} P_1 + (-1)^{n-1} \lfloor 3^{n-2} - 3^{n-3} + 3^{n-4} - \dots + (-1)^{n-2} \rfloor,$$

pero $P_1 = 1$.

Luego

$$P_n = 3^{n-1} - 3^{n-2} + 3^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1}$$

$$P_n = 3^{n-1} + 3^{n-2} (-1) + 3^{n-3} (-1)^2 + \dots + (-1)^{n-1},$$

Luego

$$P_n = \frac{3^n - (-1)^n}{3 - (-1)} = \frac{3^n - (-1)^n}{4}; \quad \text{por último,}$$

$$Y_n = 8 \left(\frac{3^n - (-1)^n}{4} \right) + (-1)^{n-2} (3^n - (-1)^n) + (-1)^{n-2} \cdot 3^n - (-1)^n$$

$$Y_n = 2 \cdot 3^n + (-1)^{n+1},$$

en resumen :

$$Y_n = 2 \cdot 3^n + (-1)^{n+1}$$

Ahora supongamos (negando la tesis) que existe un

X_θ y un Y_λ que son iguales :

$$\frac{2^{\theta+1} + (-1)^\theta}{3} = 2 \cdot 3^\lambda + (-1)^{\lambda+1} \rightarrow 2^{\theta+1} (-1)^\theta = 2 \cdot 3^{\lambda+1} + 3(-1)^{\lambda+1}$$

$$\rightarrow 2^{\theta+1} = \boxed{2 \cdot 3^{\lambda+1} + 3(-1)^{\lambda+1} + (-1)^{\theta+1}}$$
 . Si "i" significa

impar y "p" significa par , podemos hacer el siguiente cuadro :

λ	θ	$3(-1)^{\lambda+1} + (-1)^{\theta+1}$	$2 \cdot 3^{\lambda+1} + 3(-1)^{\lambda+1} + (-1)^{\theta+2}$
i	p	$3 - 1 = 2$	$2 \cdot 3^{\lambda+1} + 2$ (a)
i	i	$3 + 1 = 4$	$2 \cdot 3^{\lambda+1} + 4$ (b)
p	p	$-3 - 1 = -4$	$2 \cdot 3^{\lambda+1} - 4$ (c)
p	i	$-3 + 1 = -2$	$2 \cdot 3^{\lambda+1} - 2$ (d)

Demostraremos que todos los casos (a, b, c y d) nos llevan a contradicción , lo que prueba el enunciado .

(a).- $2^{\theta+1} = 2 \cdot 3^{\lambda+1} + 2$

$$2^\theta = 3^{\lambda+1} + 1$$

$$2^\theta = (2+1)^{\lambda+1} + 1$$

$$2^e = (2^{\lambda+1} + (\lambda+1)2^\lambda + \dots + \frac{2^2(\lambda+1)\lambda}{2} + 2(\lambda+1)+1) + 1$$

$$2^e = 2^{\lambda+1} + (\lambda+1)2^\lambda + \dots + 2(\lambda+1)\lambda + 2(\lambda+1) + 2$$

$$2^e = 2^{\lambda+1} + (\lambda+1)2^\lambda + \dots + 2\sqrt{\lambda^2 + \lambda + \lambda + 1 + 1},$$

todos los términos representados por los puntos suspensivos tienen factores que son potencias de dos, o sea, son pares.

$$2^e = 2^{\lambda+1} + (\lambda+1)2^\lambda + \dots + 2\sqrt{(\lambda+1)^2 + 1}$$

$$2^{e-1} = 2^\lambda + (\lambda+1)2^{\lambda-1} + \dots + (\lambda+1)^2 + 1,$$

pero " $\lambda+1$ " es par, y así llegamos a la contradicción.

de que un número par (2^{e-1}) es igual a la suma de otro par ($2^\lambda + (\lambda+1)2^{\lambda-1} + \dots$) y un impar (" 1 ").

$$(b).- 2^e = 2 \cdot 3^{\lambda+1} + 4$$

$$2^e = 3^{\lambda+1} + 2$$

y nuevamente obtenemos una contradicción: un par (2^e) es igual a la suma de otro par (2), más un impar ($3^{\lambda+1}$).

$$(c).- 2^{e+1} = 2 \cdot 3^{\lambda+1} - 4$$

$$2^e = 3^{\lambda+1} - 2$$

lo cual es una contradicción: un par (2^e) = un par

$(-2)^+$ un impar $(3^{\lambda+1})$.

(d).- $2^{\ominus+1} = 2 \cdot 3^{\lambda+1} - 2 \rightarrow 2^{\ominus} = 3^{\lambda+1} - 1$; pero $3=4-1$.^o.

$2^{\ominus} = (4-1)^{\lambda+1} - 1$; la expansión de " $(4-1)^{\lambda+1}$ " tendrá " $\lambda+2$ " ($\lambda+2$ es par) términos que serán alternativamente positivos y negativos . Todos serán pares , menos el último (-1) .

$$2^{\ominus} = \left[4^{\lambda+1} - (\lambda+1)4^{\lambda} + \dots + (-1) \right] + (-1)$$

$2^{\ominus} = \left[4^{\lambda+1} - (\lambda+1)4^{\lambda} + \dots \right] - 2$; la expansión es un número par , múltiplo de cuatro .

$2^{\ominus-1} = \frac{(4^{\lambda+1} - (\lambda+1)4^{\lambda} + \dots)}{2} - 1$; el primer sumando es otro par múltiplo de 2 .

Y llegamos a otra contradicción porque un par se ría igual a otro par más un impar (-1) .

En conclusión , las dos sucesiones NO tienen términos comunes , porque suponerlo nos lleva a contradicción EN CUALQUIER CASO .

(7) VIII OLIMPIADA DE LOS ESTADOS UNIDOS . Problema 5.

Resuelto por MARCOS LEDERMAN, Liceo Francés

" Louis Pasteur " .

Cierta organización tiene n miembros ($n > 5$) y

tiene $n + 1$ comités de tres miembros cada uno , sin que dos de estos comités tengan exactamente los mismos miembros . Demostrar que hay por lo menos dos comités que tienen exactamente un miembro en común .

Según el enunciado tenemos n miembros con los cuales se forman $(n+1)$ comités de 3 miembros cada uno .

Primero veamos por qué $n \geq 5$:

Con las n personas podemos formar C_n^3 comités de 3 miembros . Ese valor C_n^3 tiene que ser mayor o igual a $n+1$; ya que si fuese menor sería una contradicción con la hipótesis que los $n+1$ comités no pueden tener exactamente los mismos miembros . Entonces ,

$$C_n^3 \geq n+1 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - (n+1) \geq 0 \Leftrightarrow n^3 - 3n^2 - 4n - 6 \geq 0$$

Poniendo $n = 4$, obtenemos $-6 \geq 0$ lo que es falso .

En cambio si $n \geq 5$, $n^3 - 3n^2 - 4n - 6 \geq 0$. Por consiguiente

$$\boxed{n \geq 5} .$$

Ahora veamos cuál es la probabilidad P de que al menos 2 comités tengan exactamente un miembro en común:

Sean P_1 la probabilidad de que cualquier comité no tenga ningún miembro en común con algún otro y P_2 la proba-

bilidad de que tomados de dos en dos , dos comités tengan exactamente 2 miembros en común .

$$P = 1 - \sqrt{P_1 + P_2}$$

$P_1 = 0$ ya que si tenemos n personas y $(n+1)$ comités , forzosamente una persona pertenecerá a 2 comités diferentes .

$P_2 = 0$ ya que si un comité tiene 2 miembros en común con otro , y éste 2 con un tercero , éste tendrá a su vez 2 en común con el primero . Así que un cuarto comité tendrá que ser igual a uno de los 3 anteriores , lo que contradice la hipótesis que todos los comités son diferentes entre sí . Entonces :

$$P = 1 - 0 = 1$$

P es evento siempre cierto . Hay por lo menos 2 comités con exactamente un miembro en común .

(8) XVIII OLIMPIADA INTERNACIONAL . Problema 6.

Resuelto por HERBERT SUAREZ , Colegio Antonio Nariño .

Una sucesión $\{U_n\}$ está definida por

$$U_0 = 2, U_1 = \frac{5}{2}, U_{n-1} = U_n(U_{n-1}^2 - 2) - U_1, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

demostrar que para todo entero positivo n ,

$$\{U_n\} = 2(2^n - (-1)^n)/3$$

Solución: Hallando los valores de la sucesión, tenemos:

$$U_0 = 2$$

$$U_1 = \frac{5}{2} = \frac{2^2 + 1}{2^1}$$

$$U_2 = U_1(U_0^2 - 2) - U_1 = \frac{5}{2}(2^2 - 2) - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \frac{2^2 + 1}{2^1}$$

$$U_3 = U_2(U_1^2 - 2) - U_1 = \frac{5}{2}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\right) - \frac{5}{2} = \frac{65}{8} = \frac{2^6 + 1}{2^3}$$

$$U_4 = U_3(U_2^2 - 2) - U_1 = \frac{65}{3}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\right) - \frac{5}{2} = \frac{1025}{32} = \frac{2^{10} + 1}{2^5}$$

$$U_5 = U_4(U_3^2 - 2) - U_1 = \frac{1025}{8}\left(\left(\frac{65}{8}\right)^2 - 2\right) - \frac{5}{2} = \frac{4194305}{2048} = \frac{2^{22} + 1}{2^{11}}$$

Las potencias de 2 en el denominador forman una sucesión: 1, 1, 3, 5, 11, ... donde el segundo término (1) es igual al doble del segundo (1) menos 1; el tercer término (3) es igual al doble del segundo (1) más uno, y así sucesivamente.

Esta sucesión tiene como término n -ésimo $\frac{2^n - (-1)^n}{3}$

para $n = 1, 2, \dots$

La sucesión de las potencias de 2 en el numerador es el doble de las potencias de 2 en el denominador correspondiente, es decir: 2, 2, 6, 10, 22.

Esta sucesión está definida por $2 \frac{(2^n - (-1)^n)}{3}$

para $n = 1, 2, \dots$

Entonces, el término enésimo de la sucesión (U_n) es

$$\frac{2 \frac{2(2^n - (-1)^n)}{3} + 1}{2 \frac{2(2^n - (-1)^n)}{3}} = \frac{2 \frac{2(2^n - (-1)^n)}{3}}{2 \frac{2(2^n - (-1)^n)}{3}} + \frac{1}{2 \frac{2(2^n - (-1)^n)}{3}}$$

$$\frac{1}{2 \frac{2(2^n - (-1)^n)}{3}}$$

es la parte decimal de la sucesión

$$\frac{2 \frac{2(2^n - (-1)^n)}{3}}{2 \frac{2(2^n - (-1)^n)}{3}}$$

es la función parte entera de la sucesión U_n , que simplificando es igual a

$$2 \frac{2(2^n - (-1)^n)}{3}$$

, entonces

$$!U_n ! = 2 \frac{2(2^n - (-1)^n)}{3}$$

(9) V OLIMPIADA NORTEAMERICANA . Problema 2.

Resuelto por NELSON MEDINA , Colegio Santo Tomás de Aquino .

Si A y B son dos puntos fijos de un círculo y XY es un diámetro variable del mismo círculo , determinar (con demostración) el lugar geométrico del punto de intersección de las rectas AX y BY . Puede suponerse que AX no es un diámetro .

Solución

Para que el punto de intersección de AX y BY pertenezca al círculo " O " , X debe pertenecer al arco $A'B$. (Y por tanto , $Y \in \widehat{AB'}$)

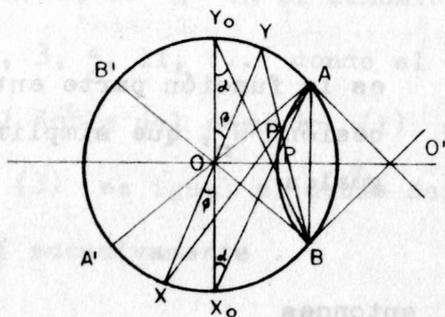


figura 1.

Teniendo en cuenta que $m \sphericalangle O A O' = 90^\circ$ y $m \sphericalangle O' B O = 90^\circ$, construyamos un arco de circunferencia \widehat{AB} , con radio $O'A$, y centro O' . Tracemos el diámetro $X_0 Y_0$, paralelo a \overline{AB} (y, por tanto, $\widehat{BX_0} = \widehat{A'X_0} = \widehat{B'Y_0} = \widehat{Y_0A}$). El punto P de intersección de AX_0 y BY_0 , pertenece a la recta OO' , demostremos que también pertenece al arco \widehat{AB} .

$$AO = OX_0 = r \rightarrow m \sphericalangle PAO = \alpha, \text{ donde } \alpha = m \sphericalangle AX_0 Y_0.$$

$$\rightarrow \boxed{m \sphericalangle O'AP = 90^\circ - \alpha}$$

Por otra parte,

$$m \sphericalangle Y_0 P X_0 = 180^\circ - 2\alpha \rightarrow m \sphericalangle OPX_0 = \frac{1}{2} m \sphericalangle Y_0 P X_0 = 90^\circ - \alpha$$

$$\rightarrow m \sphericalangle O'PA = 90^\circ - \alpha$$

Y, como $m \sphericalangle O'AP = m \sphericalangle O'PA = 90^\circ - \alpha$ y a ángulos iguales se oponen lados iguales, entonces

$O'A = O'P = O'B$, y P pertenece al círculo de centro O' . Ahora tomemos un ángulo δ cualquiera, que sustituya un arco $X_0 X$ y sea central. Entonces

$$m \sphericalangle PAP' = \frac{1}{2} \widehat{XX_0} = \frac{1}{2} m \sphericalangle X_0 O X = \frac{\delta}{2} \rightarrow \boxed{m \sphericalangle PAP' = \frac{\delta}{2}}.$$

