Boletín de Matemáticas
Vol. XV, No. 3 (1981) pags. 123 - 145

COMENTARIOS SOBRE LAS ESTRUCTURAS CELULARES LOCALMENTE FINITAS .

Carlos J. RUIZ S.

1. CONJUNTOS CON ESTRUCTURA CELULAR

Un conjunto con estructura celular será para nosotros una pareja (X, Σ) donde Σ denota una colección de subconjuntos del conjunto X , sujeta a las condiciones siguientes :

(a) Los elementos de Σ son dos a dos disyuntos y recubren X ;

(b) Existe una aplicación $d : \Sigma \to \mathbb{N}$, encargada de asignar a cada celda $c \in \Sigma$ su dimensión , y ,

(c) Una aplicación $\delta : \Sigma \to \mathbb{P}(X)$ cuya función consiste en establecer , para cada celda $c \in \Sigma$ su borde $\delta(c) \subset X$;

todo lo anterior dado de tal manera que

(d) Si se denota por X^n la reunión de las celdas

c cuya dimensión $d(c)$ es a lo sumo n, entonces una celda u, cuya dimensión es, por ejemplo p, tiene su borde $\delta(u)$ contenido en X^{p-1};

(e) Si la dimensión de una celda v es 0, su borde es el conjunto vacío.

Nota:

Si, por extensión, hubieramos definido X^{-1} como el conjunto vacío, nos habríamos evitado escribir la condición (e).

Si u denota una celda (sabe decir $u \in \Sigma$), se usará corrientemente la notación $\tilde{u}$ para designar el conjunto $u \cup \delta(u)$, reunión de u y de su borde. Es costumbre hablar de *celda cerrada* para referirse a $\tilde{u}$, y, por oposición, de *celda abierta*, para referirse a u. También u se denomina *interior celular* de $\tilde{u}$.

Cuando hablemos de un *sub-conjunto* con estructura celular, nos referimos a un $Y \subset X$, que cumple la siguiente ley de compatibilidad con respecto a los datos (Σ, d, δ): si la intersección $u \cap Y$, del conjunto Y con una celda $u \in \Sigma$, no es vacía, toda la celda cerrada $\tilde{u}$ está contenida en Y. La estructura celular que Y hereda, de esta manera, podríamos notarla

$(\Sigma|_Y, d|_Y, \delta|_Y)$. Es de anotar que para cada p, $Y^p = X^p \cap Y$.

Nota :

Toda intersección y toda reunión de sub-conjuntos con estructura celular , subconjuntos del conjunto con estructura celular X , es de nuevo un sub-conjunto que hereda la estructura celular de X ; razón ésta que , como en el caso de los espacios topológicos , da lugar al concepto de mínimo sub-conjunto con estructura celular que contiene a un conjunto dado $A \subset X$. Igualmente , tiene sentido el preguntarse sobre el máximo conjunto con estructura celular que pueda estar incluído dentro de A . El primero hace las veces de una adherencia , el segundo , de un interior para una misma topología conocida con el nombre de portadora . De manera precisa , los conjuntos cerrados son los sub-conjuntos de X , que heredan la estructura celular .

2. TOPOLOGIA DEBIL

Imaginémonos ahora que sobre el conjunto X haya de antemano una topología , a la que no impondremos condiciones de compatibilidad con la estructura celular de X , que por lo demás mantendremos fija - para dejar variable únicamente la topología - . En estas condiciones cada celda $\tilde{u}$ se enriquece con la topología de subespacio generando una colección de espacios . Si con la letra π hemos notado la topología inicialmente dada sobre X , podríamos convenir en denotar por π^{Σ} la familia de espacios topológicos $(\tilde{u}, \pi|_{\tilde{u}})(u \in \Sigma)$.

Hagamos una aclaración : a la familia Σ de subconjuntos de X corresponde una nueva , que podríamos denotar por $\tilde{\Sigma}$, constituida por las celdas cerradas $\tilde{u} = u \cup \delta(u)$, construidas , éllas , a partir de las celdas abiertas $u \in \Sigma$. En la notación π^{Σ} hubiera sido más conveniente , pero es más engorroso , escribir $\tilde{\Sigma}$ en el lugar de Σ .

Para simplificar , emplearemos la notación $Top(\tilde{\Sigma})$ cuando queramos referirnos al conjunto producto de los conjuntos $Top(\tilde{u})$ uno por cada $u \in \Sigma$; en este último caso $Top(\tilde{u})$ si tiene el sentido tradicional del conjunto de topologías sobre $\tilde{u}$. La información que conlleva un elemento de $Top(\tilde{\Sigma})$ es simplemente la de una estructura topológica por cada celda cerrada de la estructura celular .

Sobre $Top(\tilde{\Sigma})$ vamos a tener que utilizar el orden lexicográfico , según el cual $(\lambda_{\tilde{u}}) > (\rho_{\tilde{u}})$, si para cada uno de los conjuntos $\tilde{u} \in \tilde{\Sigma}$, la topología $\lambda_{\tilde{u}}$ es más fina que $\rho_{\tilde{u}}$. Referente a dicho orden parcial nos contentamos con recordar que todo conjunto no vacío admite extremo superior e inferior ; en particular , hay en él un elemento máximo y un mínimo .

La función que a cada topología π sobre X hace corresponder el elemento π^{Σ} de $Top(\tilde{\Sigma})$ es una aplicación monótona creciente del conjunto Top(X) , de las topologías sobre X , con su orden natural , en el conjunto $Top(\tilde{\Sigma})$ cuando se le considera con el orden lexicográfico .

Dicha función $Top(X) \to Top(\tilde{\Sigma})$, $\pi \rightarrowtail \pi^{\Sigma}$, admite un adjunto $Top(\tilde{\Sigma}) \to Top(X)$, cuya función es la de tratar de recuperar una topología sobre el conjunto total X , con base en topologías "locales" $p_{\tilde{u}}$, una sobre cada celda cerrada $\tilde{u}$; de manera más formal , demostremos la

AFIRMACION 1.

La función $\pi \rightarrowtail \pi^{\Sigma}$, de fuente Top(X) y meta el conjunto $Top(\tilde{\Sigma})$, admite un adjunto a derecha , con lo cual queremos significar que existe una - y no más de una - aplicación w que reune las siguientes propiedades : (a) $w : Top(\tilde{\Sigma}) \to Top(X)$ es monótona creciente (b) para cada topología π sobre el conjunto X , la topología $w(\pi^{\Sigma})$ es más fina que π (sin excluir la igualdad , claro está) , y (c) cada uno de los elementos f de $Top(\tilde{\Sigma})$ da lugar a la desigualdad $f > (w(f))^{\Sigma}$. En resumen si denotamos por $i : Top(X) \to Top(\tilde{\Sigma})$ la aplicación $\pi \rightarrowtail \pi^{\Sigma}$, se van a cumplir las dos desigualdades que destacamos en seguida :

$$w(i(\pi)) > \pi \ , \quad y, \quad f > i(w(f))$$

con cada π en $Top(X)$ y cada f en $Top(\tilde{\Sigma})$.

DEFINICION

La topología $w(f)$, asociada a una familia $f = (\rho_{\tilde{u}})$, se denomina topología débil .

No regresemos sobre la unicidad de adjunto , que puede ser consultada por ejemplo en (7). Contentémonos con mostrar , como se construye w : la topología $w(f)$ estará formada por los conjuntos $A \subset X$ que pasan la prueba : $A \cap \tilde{u}$ es un abierto de $\rho_{\tilde{u}}$, y ésto para cada $\tilde{u} \in \tilde{\Sigma}$.

Nota :

La familia $\pi^{\Sigma} = (\pi|_{\tilde{u}})_{\tilde{u} \in \tilde{\Sigma}}$, de restricciones a cada una de las celdas cerradas , cumple una condición de compatibilidad , y no hay razón para esperar encontrarla en el caso de un elemento arbitrario f del conjunto $Top(\tilde{\Sigma})$; se trata de la siguiente : si consideramos las restricciones de las topologías $\pi|_{\tilde{u}}$ y $\pi|_{\tilde{v}}$ al conjunto

$\tilde{u} \cap \tilde{v}$ encontramos que coinciden , siendo iguales a $\pi|_{\tilde{u} \cap \tilde{v}}$.

AFIRMACION

La topología $w(\mathcal{f})$, asociada a una familia $\mathcal{f} = (\rho_{\tilde{u}})_{\tilde{u} \in \tilde{\Sigma}}$, perteneciente élla a $\mathrm{Top}(\tilde{\Sigma})$, satisface una propiedad "universal" que permite detectar con cierta facilidad cuándo una función $g : X \to Y$, del espacio $(X, w(\mathcal{f}))$ en el espacio (Y, λ) , es contínua : para que así suceda basta que la restricción de g a cada $\tilde{u}$, sea contínua del espacio $(\tilde{u}, \rho_{\tilde{u}})$ en el espacio (Y, λ).

PROBLEMA

Cómo se transmiten a $w(\mathcal{f})$ las propiedades topológicas de las topologías $\rho_{\tilde{u}}$ de la familia $\mathcal{f}$?

3. COMO UTILIZAR LAS CELDAS ABIERTAS PARA CARACTERIZAR CERRADOS.

Es de anotar que la topología débil asociada a una familia $\mathcal{f} = \{t_{\tilde{u}}\}_{u \in \Sigma}$, no va a ser la misma si en el lugar de las celdas con frontera $\tilde{u}$ usamos las celdas u : es decir hay dos colecciones distintas de conjuntos "cerrados" , definidas así :

" A es cerrado en X si y solo si $A \cap \tilde{u}$ es cerrado en $t_{\tilde{u}}$ para cada $u \in \Sigma$ ".

" A es cerrado en X si y solo si $A \cap u$ es cerrado en $t_{\tilde{u}}$ para cada $u \in \Sigma$ ".

Sin embargo , como las celdas abiertas son dos a dos disyuntas , en ocasiones es más útil disponer de una caracterización del segundo tipo para los cerrados , cuando ésto es posible !

Establecemos a continuación condiciones sobre las celdas , que nos permiten de cierta manera lograr nuestros deseos .

AFIRMACION

Supongamos que en $t_{\tilde{u}}$, $\delta(u)$ es un subconjunto cerrado . En esas condiciones ,

1. X^n es cerrado en X^{n+1} ;

2. La topología de sub-espacio de X^n en X^{n+1} y la topología final en X^n asociada a la familia $\{ t_{\tilde{u}} \}$ (en donde la dimensión de $\tilde{u}$ es menor que n) coinciden;

3. Si un conjunto A satisface la condición de que su traza $A \cap u$ sea cerrada en $\tilde{u}$ (para $t_{\tilde{u}}$) , y

esto para cada celda $u \in \Sigma$, entonces A es cerrado en X , para la topología débil engendrada por las $t_{\tilde{u}}$ $(u \in \Sigma)$.

En efecto , veamos la razón de ser de la tercera afirmación . Vamos a demostrarla por recurrencia sobre n. Demostremos que $A \cap X^{o}$ es cerrado en X^{o} .

Esto se debe a que X^{o} tiene la topología débil para sus celdas y por dicha razón basta demostrar que para cada celda u de dimensión 0 , $A \cap \tilde{u}$ es cerrado en $\tilde{u}$. Pero para dichas celdas hemos supuesto $\delta u = \emptyset$. Así que $A \cap \tilde{u} = A \cap u$ y éste por hipótesis es cerrado en $\tilde{u}$. Supongamos que $A \cap X^{n}$ es cerrado en X^{n} . Veamos que $A \cap X^{n+1}$ es cerrado en X^{n+1} . Pero por asociatividad de topologías finales basta demostrar que $A \cap X^{n}$ es cerrado en X^{n} y $A \cap \tilde{u}$ es cerrado en $\tilde{u}$ cuando la dimensión de $\tilde{u}$ es igual a $n + 1$.

$$\text{En dim. } n+1 : \quad \begin{array}{lc} & X^{n} \\ & \downarrow \\ \tilde{u} \rightarrow & \\ \tilde{v} \rightarrow & X^{n+1} \\ \tilde{w} \rightarrow & \\ \vdots & \end{array}$$

Pero $A \cap \tilde{u} = (A \cap u) \cup (A \cap \delta u)$. Por hipótesis $A \cap u$

es cerrado en $\tilde{u}$. Veamos que pasa con $A \cap \delta u$.

$A \cap \delta u = A \cap X^n \cap \delta u$ (porque $\delta u \subset X^n$). Pero $A \cap X^n$ es cerrado en X^n por hipótesis de inducción, entonces, analicemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \delta u & \xrightarrow{\varphi} & X^n \\ j \downarrow & & \downarrow j' \\ u & \xrightarrow[\varphi']{} & X^{n+1} \end{array}$$

j' es contínua y X^n tiene también la topología de sub-espacio.

Para ver que φ es contínua basta entonces que $j'\varphi$ sea contínua, pero $\varphi' j = j'\varphi$ y $\varphi' j$ si es contínua (j por sub-espacio, φ' porque X^{n+1} tiene la topología final para sus celdas). Como, en fin, φ es contínua, $\varphi^{-1}(A \cap X^n)$ es cerrado en δu pero

$\varphi^{-1}(A \cap X^n) = A \cap X^n \cap \delta u = A \cap \delta u$. Y como δu es cerrado en $\tilde{u}$ entonces, $A \cap \delta u$ es cerrado en $\tilde{u}$.

4. CONJUNTOS DISCRETAMENTE COMPACTOS : La imposibilidad de tocar muchas celdas abiertas

Digamos que K en un

espacio Y es <u>discretamente compacto</u> si, cuando cada vez que un sub-conjunto P de K tiene todos sus sub-conjuntos P' cerrados en Y, necesariamente es finito. (Ver notas sobre esta propiedad un poco más adelante).

AFIRMACION

Si en X (o mejor en las celdas) los puntos son cerrados, entonces todo conjunto discretamente compacto, necesariamente, encuentra finitas celdas abiertas. (Suponemos claro está que δu es cerrado en $\tilde{u}$ para la topología $t_{\tilde{u}}$, y esto para cada celda $u \in \Sigma$). En efecto sea $\Sigma' \subset \Sigma$ el sub-conjunto de Σ formado justamente por las celdas cuyos interiores encuentran a K. De cada una elegimos un punto $x_u \in u \cap K$. Veamos que el conjunto F así formado es finito: nótese que si $F' \subset F$, entonces

a) $F' \cap v$ es vacío, o bien

b) tiene a lo sumo un punto;

en ambos casos es cerrado en $\tilde{v}$, si se asume que los puntos son cerrados en las celdas. Por nuestra propiedad de cerrados, F' será cerrado en X. Con lo cual F y todos sus sub-conjuntos serán cerrados en X. Como hemos supuesto que K es discretamente compacto, concluímos que

F debe ser finito . Teniendo en cuenta que , evidentemente , F está en correspondencia biunivoca con Σ' , queda terminada la demostración .

CONSECUENCIA 1.

En las condiciones de la afirmación anterior , si una celda $\tilde{u}$ es discretamente compacta , relativamente a $t_{\tilde{u}}$, encuentra a lo sumo finitas celdas abiertas $v \in \Sigma$. (El complejo es de clausura finita) .

CONSECUENCIA 2.

Enriquecemos las condiciones de la Afirmación , agregando que cada celda $\tilde{u}$ es discretamente compacta , en $t_{\tilde{u}}$. Eso dicho , si un conjunto K es discretamente compacto en (X, t_X) , entonces el menor sub-complejo $C(K)$ de X que lo contiene , es también discretamente compacto en (X, t_X) .

Esto se debe a que $C(K)$ se va formando sucesivamente con las celdas $\tilde{u}$ para las que $u \cap K$ es no vacío (las hay en número finito de acuerdo con la Afirmación) . Luego , se toma una celda $\tilde{v}$, si v encuentra una de las $\tilde{u}$ ya elegida en el paso anterior (también éstas son en número finito) y se continúa . (Nótese que como K

encuentra finitas celdas abiertas , K está por fuerza en algún X^n). Se llega hasta celdas de dimensión cero. En consecuencia C(K) está formado por finitas celdas. Como se supone que cada una es un espacio discretamente compacto , van a ser discretamente compactas en (X,t_X) y así lo será C(K) .

CONSECUENCIA 3.

En las condiciones de la Segunda Consecuencia , un sub-complejo celular K es discretamente compacto si y únicamente si lo forman a lo sumo finitas celdas .

5. NOTAS SOBRE LA PROPIEDAD "DISCRETAMENTE-COMPACTO"

Hemos dicho que un sub-conjunto K de un espacio topológico X es discretamente compacto si

" Cuando un sub-conjunto F es tal que todos sus sub-conjuntos F' son cerrados en X , necesariamente , F es finito ".

Referente a este aspecto de la compacidad , podemos anotar que , un sub-conjunto L de un tal conjunto K , es , también , discretamente compacto , en el espacio X.

Por otra parte , si K es un sub-conjunto discretamente compacto del espacio $(K, t_{X|K})$, se cumple así mismo que K es un sub-conjunto discretamente compacto de (X, t_X) : supongamos que $F \subset K$ y cualquiera de sus sub-conjuntos F' sean cerrados en X para la topología t_X, entonces $F' = F' \cap K$ es cerrado en $t_{X|K}$ y como K es allí discretamente compacto , el conjunto F será necesariamente finito .

Inversamente , si de antemano se sabe que K es un sub-conjunto cerrado del espacio (X, t_X) entonces la propiedad de ser discretamente compacto como sub-conjunto de (X, t_X) entraña la de serlo como sub-conjunto de $(K, t_{X|K})$.

Sean Y un conjunto , y , $t_1 < t_2$ dos topologías ; si $K \subset Y$ es discretamente compacto en (Y, t_2), lo es así mismo en (Y, t_1) . En palabras : a medida que se desplaza hacia la topología grosera tienden a aumentar los conjuntos discretamente compactos . (En la topología la menos fina sobre X , cualquier conjunto K es discretamente compacto).

Para terminar agreguemos que si una celda con borde $\tilde{u}$ es discretamente compacto en $(\tilde{u}, t_{\tilde{u}})$, también es discretamente compacta en $(\tilde{u}, t_X|_{\tilde{u}})$ y de la misma manera lo es en (X, t_X) .

Recuérdese para demostrar que $t_{\tilde{u}} \geq t_X|_{\tilde{u}}$, que t_X es la topología débil engendrada por las celdas .

6. COMO LA FALLA EN LA FINITUD PUNTUAL INFIERE EN LA CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Recordemos que un complejo es puntualmente finito si no existe un punto común a infinitas celdas .

Vamos a suponer que la topología de cada celda $\tilde{u}$ satisface la siguiente característica , que por lo demás ya había sido utilizada en una forma un poco diferente .

(D_s) : u es secuencialmente denso en $\tilde{u}$.

Con lo cual queremos decir que todo punto de $\tilde{u}$ es límite de una sucesión de puntos de u .

También retenemos en esta sección la hipótesis " ∂u es cerrado en $\tilde{u}$ para la topología $t_{\tilde{u}}$ " ; en todas y cada una de las celdas .

Y , finalmente , recordemos que habíamos utilizado frecuentemente la condición de que los puntos fueran cerrados en las celdas $\tilde{u}$ para la topología $(\tilde{u}, t_{\tilde{u}})$.

Teniendo en cuenta todas estas condiciones , pase mos a observar lo que puede suceder en un complejo que no es puntualmente finito .

Sea , para tal efecto , x_o un punto común a infi nitas celdas cerradas . Tomemos enumerables de éllas $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \ldots$ de tal manera que $x_o \in \delta u_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$

Ahora bien , hay una sucesión $S^{(n)}$ en la celda U_n que converge a x_o y esto , para cada una de las cel das en consideración . Así que tenemos una bisucesión

$$S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$$

$$(n, k) \mapsto S^{(n)}(k)$$

que , para cada uno de los índices n , cumple la proposición " $S^{(n)}$ converge a x_o " en $\tilde{u}$, y , a fuerza , en X .

$$\begin{array}{ccccc}
x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & \cdots \\
x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n & \cdots \\
x_3^1 & x_3^2 & \cdots & x_3^n & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
x_o & x_o & & x_o & \cdots
\end{array}$$

Si en cada celda abierta u_n de las que intervienen , ele gimos un punto x_k^n , ayudados de una función $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\varphi(n) = (n,k)$, la sucesión $T = S \cdot \varphi$, es una amalgama de las sucesiones $S^{(n)}$, en cuya formación contribuyen todas -o casi todas- las $S^{(n)}$ en cuestión .

Hacemos notar , y ése es nuestro objetivo , que una función T así formada no converge al punto x_o . En efecto el conjunto $V = \{T(1), T(2),\dots\}$ es cerrado , de acuerdo a nuestro criterio para formar cerrados en el Capítulo 3. Y además x_o no está en V .

Demos una definición : un espacio X satisface la condición AI de amalgamas infinitas si dada una bisucesión $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ para la cual , cada sucesión $S^{(n)} : \mathbb{N} \to X$, definida por $S^n(k) = S(n,k)$, es convergente al punto x_o , existe una función $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que

a) para todo n , existe $\tilde{n} \geq n$, tal que $\varphi^{-1}(\tilde{n} \times \mathbb{N}) \neq \emptyset$

b) $S \cdot \varphi$ es convergente a x_o .

COMENTARIO :

Esta manera de ver las amalgamas infinitas la hemos tomado del trabajo de M. SUAREZ .

Pasemos , sin más , a resumir lo dicho anteriormente .

AFIRMACION

En las condiciones impuestas al espacio celular X que recordamos al comenzar este capítulo , si X satisface la condición AI , de amalgamas infinitas , satisface también la condición de ser puntualmente finito .

7. CONDICIONES DE FINITUD LOCAL

Reconsideremos , pero en un marco más general , las condiciones de finitud local que J. H. C. Whitehead daba sobre sus CW-complejos ; condiciones que conducían a la compacidad local . Entre otras cosas , este tema a la par que da una respuesta al problema planteado en el Capítulo 2, por lo menos en el caso de celdas con ciertas condiciones de compacidad , muestra que se imponen ciertos cuidados sobre la forma como las celdas se encuentran las unas con respecto a las otras y , de manera muy particular , la trascendencia sobre la topología del espacio de las aglomeraciones que se permitan en las cercanías de un punto .

Para definir lo que al fin y al cabo llamaremos un complejo celular localmente finito , disponemos de dos topologías - la portadora y la débil - y de dos tipos de celdas - las abiertas y las cerradas - y las cuatro combinaciones conducen a propiedades locales enteramente diferentes en el caso general . No volveremos aquí sobre los casos que hacen intervenir la topología portadora ; si se desea puede consultarse (2) . En consecuencia solo encontraremos aquí la topología débil , en las condiciones de Whitehead , que regulan las aglomeraciones .

Enunciamos a continuación dos condiciones de finitud local que podrían ser satisfechas en una estructura celular, y entramos a compararlas :

Wh.l.a : Todo punto admite una vecindad que encuentra a lo sumo un número finito de celdas abiertas ;

Wh.l.c : todo punto admite una vecindad que encuentra a lo sumo un número finito de celdas cerradas .

Es evidente que la condición que hace intervenir celdas cerradas entraña la otra , pero , en general , no son equivalentes .

Se impone agregar una condición sobre la topología

$\tilde{t}_u$ en cada celda , que asegure que las fronteras δu no estén alejadas de u : la condición de densidad que se enuncia así :

(D): en cada $\tilde{t}_u$, el conjunto u es denso en $\tilde{u}$.

Un conjunto abierto de X, para la topología débil $w(f)$ asociada a la familia $f = \{\tilde{t}_u\}_{u \in \Sigma}$, da lugar, al trazarlo con $\tilde{u}$, a un conjunto abierto en $\tilde{t}_u$, que si no es vacío, debe trazar también a u, como lo entraña la condición (D) . Así pues

$$Wh.1.a + (D) \Rightarrow Wh.1.c .$$

Otro aspecto de la finitud local es este :

Wh.2 : Todo punto admite una vecindad que es un sub-complejo finito .

Como un sub-complejo V absorbe enteramente toda una celda con borde $\tilde{v}$, desde que $v \cap V$ no sea vacío, entonces , la vecindad de que habla Wh.2 encuentra a lo sumo finitas celdas abiertas ; así que sin otras suposiciones

$$Wh.2 \Rightarrow Wh.1.a$$

Inversamente supongamos que cada celda $\tilde{u}$ es discretamente compacta en $(\tilde{u}, t_{\tilde{u}})$, que δu es cerrado en $\tilde{u}$ para $t_{\tilde{u}}$, y que los puntos del espacio X son cerrados. Veamos que en estas condiciones la finitud local de Whitehead , en su forma 1.a entraña , entonces , la de la forma 2 : en efecto si V es una vecindad de un punto x que encuentra a lo sumo finitas celdas abiertas , procedemos así :

Con cada punto y en V buscamos una celda abierta $u_y \in \Sigma$ que lo contiene (las hay en número finito) . Con cada una de éllas disponemos de su complejo portador $C(u_y)$ que , como vimos , es también finito - por cuanto las $\tilde{u}$ se suponen discretamente compactas. La reunión $\bigcup C(u_y)$ es de nuevo un complejo finito , que , por contener a V , es una vecindad del punto . Así que

AFIRMACION

Si en el espacio X los puntos son cerrados , cada celda $\tilde{u}$ es discretamente compacta en $(\tilde{u}, t_{\tilde{u}})$, y , en fin δu es cerrado en $t_{\tilde{u}}$, entonces las condiciones Wh.2 y Wh.1.a son equivalentes .

CONSECUENCIA

Si un complejo celular cumple con las

condiciones anotadas en la Afirmación anterior, entonces la condición Wh.2 equivale a la condición " todo punto del espacio admite una vecindad discretamente compacta" .

Comentario : El trabajo de Tesis de J. LUNA , que está por aparecer , en uno de sus apartes , se ocupa también de la finitud local en complejos celulares generales . El no utiliza la compacidad en el sentido que la entendimos aquí , sino en su forma tradicional . Se interesa , por otra parte , en un aspecto de la finitud local , introducido inicialmente - según creemos - para los CW-complejos , en el libro de Lundell-Weingram , y lo trata con éxito , en el caso general .

BIBLIOGRAFIA

(1) Whitehead J.H.C., Combinatorial Homotopy I.Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 213-245.

(2) Ruiz C., Topología y Complejos Celulares. Tesis de Titularidad. Universidad Nacional Bogotá. (1973).

(3) Ruiz C., Notas de Curso: Topología de Complejos Celulares. Universidad Nacional Bogotá. (1979).

(4) Luna J., Tesis. Universidad Nacional Bogotá. (1981).

(5) Suárez M., Trabajos no publicados sobre Convergencia.

(6) Lundell A.;Weingram S., <u>The Topology of CW-complexes</u>. The University Series in Higher Mathematics. Van-Nostrand; (1969).

(7) Ruiz C., <u>Topología o Convergencia</u>. Ediciones La Rana y El Aguila. U.P.T.C. Tunja. (1975).

Carlos J. RUIZ S.

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional

Bogotá - Colombia.