

ALGUNOS RESULTADOS SOBRE LA GEOMETRIA

DE UN DOMINIO CONVEXO DEL PLANO

Maria Victoria GUTIERREZ

INTRODUCCION

Dado un domino,  $D$  del plano, convexo para una métrica riemanniana dada (en el sentido de que entre dos puntos cualesquiera de  $\bar{D}$  existe una y solo una geodéctica contenida en  $\bar{D}$ ), nos proponemos en el presente trabajo, por una parte, dar una descripción de la variedad de las geodésicas de  $\bar{D}$  y, por otra, usar esta variedad para dar una estimación de la métrica, bajo la forma de una desigualdad, en términos de la longitud de las geodésicas entre los puntos del borde de  $D$ .

La primera parte contiene los preliminares necesarios para el desarrollo del trabajo sobre los fibrados tangentes, cotangente y unitario asociados a una variedad riemanniana, así como sobre la forma de Liouville definida sobre dichos espacios.

La segunda parte contiene la descripción de la va-

riedad de las geodésicas sobre  $\bar{D}$  y finaliza con una expresión para el volumen del fibrado unitario de  $\bar{D}$  en términos de la longitud de las geodésicas entre los puntos del borde, clave en la demostración de la estimación que constituye la tercera parte del presente artículo.

## I. PRELIMINARES

### I.1. EL FIBRADO TANGENTE $TM$ y su Dual $T^*M$ .

#### I.1.1.

Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$ ,  $TM$  su fibrado tangente, esto es,

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

donde  $T_x M$  es el espacio vectorial de vectores tangentes a  $M$  en el punto  $x$ . Notaremos por  $p_M$  la proyección

$$p_M : TM \rightarrow M.$$

El fibrado  $TM$  está provisto de una estructura natural de dimensión  $2n$ . En efecto, sea  $(x^i)$  un sistema de coordenadas del punto  $x$  en  $M$ . Y sea  $(\frac{\partial}{\partial x^i})$  la base canónica de  $T_x M$  asociada a  $(x^i)$ . Todo  $v \in T_x M$  puede escribirse como una combinación lineal de los  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ , i.e.

$$v = \sum_{j=1}^n x^j \frac{e}{ex^j}$$

donde  $x^i = D x^i(v)$ ,  $x^i$  considerada como la  $i$ -ésima proyección  $x^i : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Otra notación que usaremos para los  $x^i$  será  $d_M x^i$ .  $(x^i, X^i)$  es llamado el sistema de coordenadas canónicas.

Podemos considerar, entonces, el fibrado tangente a la variedad  $TM$ , es decir, el doble fibrado tangente  $TTM$ .  $TTM$  está fibrado de dos maneras diferentes sobre  $TM$ ; esta doble fibración verifica el siguiente diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & Tp_M & \\ TTM & \rightarrow & TM \\ p_{TM} & \downarrow & \downarrow p_M \\ TM & \rightarrow & M \\ & p_M & \end{array}$$

donde  $Tp_M$  es la aplicación tangente de  $p_M$ .

En coordenadas locales canónicas un elemento  $X \in T_v(TM)$  se escribe:  $(x^i, X^i, y^i, Y^i)$ , donde

$$p_{TM}(X) = (x^i, X^i)$$

$T_p M (x) = (x^1, y^1)$  y finaliza con una expresión  $x = D x^1(x)$  ó bien,  $d_{TM} x^1$ .

### I.1.2.

Para cada  $x \in M$ , consideremos  $\tilde{T}_x M$  el espacio dual de  $T_x M$ . Sea

$$\tilde{T} M = \bigcup_{x \in M} \tilde{T}_x M.$$

$\tilde{T} M$  es llamado el fibrado cotangente de  $M$ .

Sea  $(x^1)$  como antes, un sistema de coordenadas del punto  $x \in M$ . Y  $(\frac{\partial}{\partial x^i})$  la base canónica de  $T_x M$ . Llamaremos  $(dx^i)$  la base dual de  $\tilde{T}_x M$ , i.e.

$$dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta_{ij}$$

Todo elemento  $\beta$  de  $\tilde{T}_x M$  se escribe entonces como una combinación lineal de los  $dx^i$ , es decir,

$$\beta = \sum_i \beta^i dx^i$$

De la definición de la base dual tenemos que  $\beta^i = \beta(\frac{\partial}{\partial x^i})$ .

Notaremos  $p_M$  la proyección  $p_M : \tilde{T} M \rightarrow M$ .

De manera semejante al fibrado tangente, el fibrado cotangente está provisto de una estructura natural

de variedad de dimensión  $2n$ . Un sistema de coordenadas canónicas será dado por:  $(x^i, \beta^i)$  donde  $\beta^i$  está definido como antes.

Su fibrado tangente,  $T\tilde{T}M$ , verifica el siguiente diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & T_p\tilde{M} & \\ & \downarrow & \\ T\tilde{T}M & \rightarrow & TM \\ p_{T\tilde{T}M} & \downarrow & p_M \end{array}$$

La expresión local de un elemento  $\wedge \in T\tilde{T}M$  en coordenadas canónicas es entonces:  $(x^i, \beta^i, X^i, Y^i)$ , donde

$$p_{T\tilde{T}M}(\wedge) = (x^i, \beta^i)$$

$$T_p\tilde{M}(\wedge) = (x^i, X^i)$$

$$X^i = d_{T\tilde{T}M}x^i, \quad Y^i = d_{T\tilde{T}M}\beta^i.$$

## I.2. FORMA DE LIOUVILLE SOBRE $T\tilde{M}$ Y $TM$ .

### 1.2.1.

Sobre el fibrado cotangente  $T^*M$  existe una 1-forma canónica definida por:

$$\alpha(\wedge) = p_{T^*M}(\wedge)(Tp_M^*(\wedge)).$$

La expresión de  $\alpha$  en coordenadas locales es :

$$\alpha = \sum_j \beta^j dx^j$$

Sea  $\wedge \in T^*M$ ,  $(x^i, \beta^i, X^i, Y^i)$  sus coordenadas locales.

Por definición ,

$$\begin{aligned}\alpha(\wedge) &= (\sum_j \beta^j dx^j) \left( \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_j \beta^j X^j\end{aligned}$$

En efecto , en coordenadas locales ,

$$p_{T^*M}(\wedge) = (x^i, \beta^i)$$

y

$$Tp_M^*(\wedge) = (X^i, Y^i)$$

lo cual escrito como combinación lineal de las bases respectivas nos da :

$$p_{T^*M}(\wedge) = \sum_j \beta^j dx^j$$

y

$$Tp_M^*(\wedge) = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

$\alpha$  es llamada la forma de Liouville sobre  $T^*M$ . Su escritura local muestra que  $\alpha$  es no-degenerada . Su diferen-

cial, de  $\alpha$ , es una forma cerrada no-degenerada. En efecto, en coordenadas locales de  $\alpha$  se escribe :

$$d\alpha = \sum_i d\beta^i \wedge dx^i$$

$d\alpha$  define entonces una estructura simplectica sobre  $T^*M$  y, en consecuencia, una forma volumen  $(d\alpha)^n$ . (ver Godbillon (4)).

### 1.2.2.

Consideremos ahora  $(M, g)$  una variedad riemanniana. Puesto que  $g$  es una 2-forma no-degenerada,  $g$  induce un isomorfismo de fibrados entre  $TM$  y su dual  $T^*M$ :

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\rho} & T^*M \\ p_M \downarrow & & \downarrow p_M^* \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

definido por :

$$\rho(v) = g(v, \cdot)$$

Notaremos # el isomorfismo inverso.

Estos isomorfismos permiten transportar los objetos definidos naturalmente sobre  $T^*M$ ; en particular, la forma de Liouville  $\alpha$ : Sea  $\alpha_g = \rho^*\alpha$ , el pull-back,

de  $\alpha$  por  $\rho$ .<sup>(1)</sup> Entonces, por definición de pull-back, para  $\mathbf{x} \in T_v(M)$  entonces :

$$\alpha_g(v)(\mathbf{x}) = \alpha(\rho(v)) (T\rho(\mathbf{x}))$$

$$= p_{T^*M}(T\rho(\mathbf{x})) (T_{p_M}(\mathbf{x})) \text{ (def. de } \alpha)$$

$$(p_{T^*M} \circ T\rho)(\mathbf{x}) (T(p_M \circ \rho)(\mathbf{x}))$$

Las aplicaciones  $\rho$  y  $T\rho$  verifican el siguiente diagrama commutativo :

$$TTM \xrightarrow{T\rho} TT^*M$$

$$p_{TM} \downarrow \quad \downarrow p_{T^*M}$$

$$TM \xrightarrow{\rho} T^*M$$

$$p_M \downarrow \quad \downarrow p_M$$

id

$$TM \xrightarrow{\quad} M$$

En particular,

$$p_{T^*M} \circ T\rho = \rho \circ p_{TM}$$

$$T_{p_M} \circ \rho = p_M$$

**Entonces**  $\alpha_g(v)(\mathbf{x}) = (\rho \circ p_{TM})(\mathbf{x}) (T_{p_M}(\mathbf{x}))$

De acuerdo a la definición de  $\rho$  tenemos finalmente:

### I.2.3.

$$\alpha_g(v)(x) = g(p_{TM}(x), Tp_M(x))$$

Expresión local en coordenadas canónicas

$(x^i, X^i)$ : Sea

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

Por otra parte,

$$y \text{ sea } v \in T_x M, v = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \text{ Entonces,}$$

I.2.4. En coordenadas canónicas tenemos

$$\alpha_g(v) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} X^i dx^j$$

Su diferencial,  $d\alpha_g$ , se escribe en coordenadas locales:

### I.2.5.

$$d\alpha_g(v) = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} X^k dx^i \wedge dx^j + \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

Como en el caso del fibrado cotangente,  $d\alpha_g$  define una estructura simplectica sobre  $TM$  y, en consecuencia,  $(d\alpha_g)^n$  es una forma volumen.

## I.3. EL FIBRADO UNITARIO UM

Sea  $(M, g)$  una variedad

riemanniana . A la métrica  $g$  se asocia la función de energía  $E_g$  sobre  $TM$  definida por :

### I.3.1.

$$E_g(v) = g(v, v)$$

El fibrado unitario  $UM$  está definido por :

### I.3.2.

$$UM = E_g^{-1}(1)$$

$UM$  tiene entonces una estructura de variedad de dimensión  $2n-1$  encajada en  $TM$ . (2)

El espacio vectorial tangente a  $UM$  en un punto  $u$  es el núcleo de la diferencial de  $E_g$  en el punto  $u$ . Es decir ,

### I.3.3.

$$T_u UM = \text{Ker } (d E_g(u))$$

En coordenadas locales , un vector

$$\mathbf{x} = (x^1, x^1, y^1, z^1)$$

es tangente a  $UM$  si y solamente si :

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij} x^i x^j = 1$$

### I.3.4.

$$d E_g(X) = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} X^i X^j X^k + 2 \sum_{i,j=1}^n g_{ij} X^i X^j = 0$$

Notaremos también  $\alpha_g$  la restricción de la forma de Liouville a  $UM$ . Además, como la forma  $\alpha_g \wedge (d \alpha_g)^{n-1}$  es no-degenerada define, por tanto, una forma volumen sobre  $UM$ .

Por otra parte, la métrica  $g$  induce una métrica  $\bar{g}$  sobre  $TM$  y, puesto que  $UM$  está encajado en  $TM$ , sobre  $UM$ . En coordenadas locales  $(x^i, X^i)$ ,  $\bar{g}$  se escribe:

### I.3.5.

$$\bar{g} = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j + \sum_{ij} g_{ij} dX^i \otimes dX^j$$

A esta métrica  $\bar{g}$  se puede asociar de manera canónica una  $2n-1$  forma volumen sobre  $UM$ . Se demuestra que dicha forma volumen es igual a:

### I.3.6.

$$\mu = \frac{\alpha_g \wedge (d \alpha_g)^{n-1}}{(n-1)}$$

y la medida asociada es:

I.3.7. A la métrica  $g$  se asocia la fórmula de  

$$\frac{|\alpha_g \wedge (\alpha_g)^{n-1}|}{(n-1)!} \quad (\text{Ver Berger } (2)).$$

#### I.4. VOLUMEN DE UM

Consideremos la fibración  $UM \xrightarrow{\pi} M$ .

La fibra  $\pi^{-1}(x) = U_x^M$  es isomorfa a la esfera  $S^{n-1}$ .

Sea  $\sigma$  la medida canónica de la esfera. Entonces,

#### I.4.1.

$$\int_{UM} f d\mu = \int_{UM} f d\sigma \otimes d\mu_g$$

donde  $\mu_g$  es la forma volumen de  $(M, g)$  y  $f \in C^\infty(UM)$ .

En particular, si  $M$  es una variedad compacta,  $UM$  es también una variedad compacta y de acuerdo al Teorema de Fubini tenemos:

#### I.4.2.

$$\text{Vol}(UM, \bar{g}) = \int_M \left( \int_{S^{n-1}} d\sigma \right) d\mu_g$$

$$= \text{Vol}(S^{n-1}) \text{Vol}(M, g).$$

1) Dada una aplicación  $f : M \rightarrow N$ ,  $M$  y  $N$

variedades diferenciables, y  $\alpha$  una  $n$ -forma diferenciable sobre  $N$ , el pull-back de  $\alpha$  por  $f \circ$  imagen

recíproca de  $\alpha$  por  $f$  es la  $n$ -forma diferenciable

$f^*\alpha$  sobre  $M$  definida por :

$$f^*\alpha(x)(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$\alpha(f(x))(Tf(x_1), Tf(x_2), \dots, Tf(x_n))$$

para  $x \in M$  y  $x_1, x_2, \dots, x_n \in TM$ .

2) Se dice que una variedad  $M$  está encajada en

una variedad  $N$  si existe una aplicación  $\phi : M \rightarrow N$

(encajamiento), tal que :

i)  $\phi$  es diferenciable y su diferencial es inyectiva.

ii)  $\phi$  es un homeomorfismo de  $M$  en  $\phi(M)$ .

## II. LA VARIEDAD DE LAS GEODESICAS SOBRE UN ABIERTO CONVEXO

D DEL PLANO.

### II.1. DESCRIPCION DE LA VARIEDAD DE GEODESICAS.

#### II.1.1.

Sea  $D$  un dominio acotado del plano, tal que su frontera  $\Gamma$  es una curva regular, parametrizada por la longitud de arco euclíadiana.

Supongamos que existe un abierto  $V$  que contiene

$\bar{D}$  y una métrica riemanniana  $g$  definida sobre  $V$  tal que  $\bar{D}$  es estrictamente convexo con relación a dicha métrica , es decir , que dos puntos cualesquiera de  $\bar{D}$  pueden ser unidos por una y solo una geodésica contenida en  $\bar{D}$  . En particular , si los dos puntos pertenecen a la frontera  $T$  , digamos  $(\epsilon(s), T(s))$  y  $(\epsilon(t), T(t))$  , con  $(s,t) \in \bar{\Gamma}^0$ ,  $L\bar{\Gamma} \times \bar{\Gamma}^0$ ,  $L\bar{\Gamma}$  , donde  $L$  es la longitud de  $\Gamma$  , existe una y solo una geodésica  $K(s, t)$  que pasa por estos dos puntos y ningún otro punto de  $T$  pertenece a  $K(s, t)$  .

### II.1.2.

Llamemos  $C$  el conjunto de geodésicas orientadas de  $\bar{D}$  . Debido a las propiedades de convexidad de  $\bar{D}$  ,  $C$  se reduce al conjunto de geodésicas orientadas entre los puntos del borde , es decir , toda geodésica  $r$  de  $C$  puede ser prolongada de manera única a una geodésica que corta el borde de  $D$  . Admitimos las geodésicas reducidas a un punto del borde .

El conjunto  $C$  tiene una estructura de variedad de dimensión 2 . En efecto , la aplicación  $\Psi: C \rightarrow \Gamma \times \Gamma$  que a cada  $r \in C$  asocia la pareja de puntos  $(p_r, q_r)$  en los cuales  $r$  corta el borde de  $D$  , es una biyección.

Basta considerar sobre  $C$  la estructura de variedad producto inducida por  $\Psi$ . Entonces, si  $s, t$ , son las coordenadas de  $p_r$  y  $q_r$  respectivamente, la pareja  $(s, t)$  da las coordenadas de  $r$ .

### II.1.3.

Una segunda parametrización de  $C$  está dada de la siguiente manera : Sea  $r \in C$ . Puesto que  $r$  es una geodésica,  $r$  está completamente determinada por sus condiciones iniciales, esto es, el punto de partida  $p$  y el vector  $v$  tangente a la geodésica en dicho punto. Sea  $s$  la coordenada de  $p$  en la parametrización de  $T$  y sea  $\theta$  el ángulo entre  $v$  y la tangente a  $T$  en el punto  $p$ .

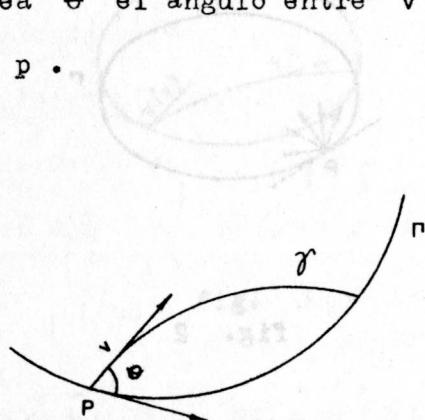


fig. 1

Entonces,  $(s, \theta)$  es un sistema de coordenadas de la geodésica  $r \in C$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ , salvo para las geodésicas constantes. En consecuencia, existe un difeomorfismo :

$$T \times (0, \pi) \simeq T \times T - \text{Diagonal}$$

### III.1.4.

Sea  $\tilde{C}$  la subvariedad de  $\bar{UD}$  definida de la manera siguiente : para cada  $p \in T$ , consideramos los vectores unitarios tangentes en el punto  $p$  y dirigidos hacia  $T$ .

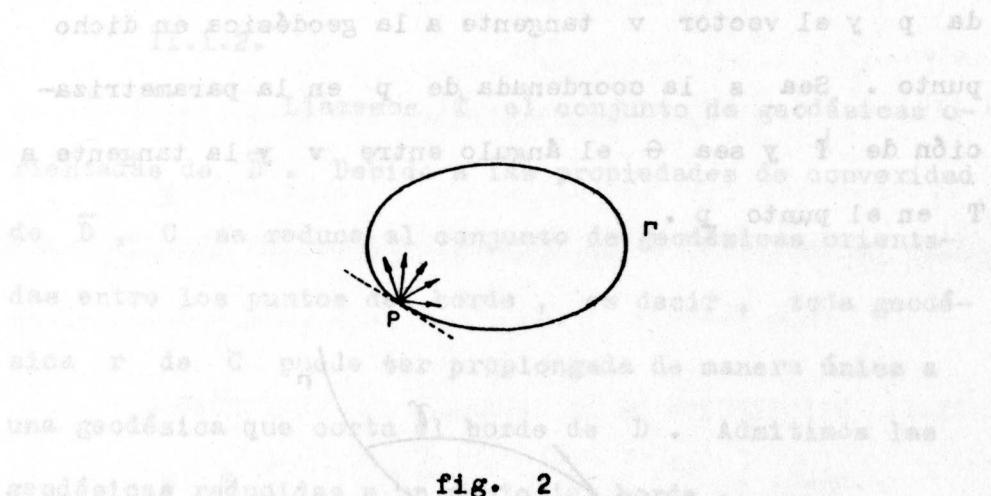


fig. 2

Si el conjunto  $C$  viene definido de la manera anterior, se tiene que el cono de desarrollo de dimension 2 de  $C$  es el mismo que el cono de desarrollo de dimension 2 de  $\tilde{C}$ . De acuerdo con II.1.3.,  $\tilde{C}$  puede ser identificada con la variedad  $C$  de las geodésicas, excepto por las geodésicas constantes, es decir,

$$\tilde{C} \approx T_x \Gamma - \text{Diagonal}$$

II.1.5. la expresión en coordenadas canónicas de la dif.   
II.1.5. la expresión en coordenadas canónicas de la dif.   
II.1.5. la expresión en coordenadas canónicas de la dif.

La Proyección  $\pi : UD \rightarrow \tilde{C}$ .

Dado  $v \in U\tilde{D}$ , sea  $r_v$  la geodésica orientada que pasa por  $v$ , esto es, la única geodésica que tiene a  $v$  como condición inicial. Entonces, la aplicación  $\pi : UD \rightarrow \tilde{C}$  que a  $v$  hace corresponder el vector tangente a  $r_v$ , perteneciente a  $\tilde{C}$ , es una submersión.



fig. 3

En efecto, sean  $v_0$  fijo,

$$v_0 \in U_n^{\tilde{D}} \quad y \quad u_0 = \pi(v_0), \quad u_0 \in U_m^{\tilde{D}}.$$

Sea  $\lambda_0 = d(m, n)$  la distancia de  $m$  a  $n$ . Entonces, existe una vecindad  $V$  de  $u_0$  en  $\tilde{C}$  tal que:

$\pi \circ G_{\lambda_0} = \text{Id}_V$  es un sistema de ecuaciones de la geodésica  $\gamma$  -  $\gamma(x) = \gamma$  salvo para las ecuaciones de constante. En consecuencia, existe un difeomorfismo

$$G_{\lambda_0}(u) = \exp' \lambda_0 u .$$

Aquí  $\exp' \lambda_0 u$  significa el vector tangente a la geodésica con condición inicial  $u$  para el valor  $\lambda_0$  del parámetro, i.e.,  $r_u(\lambda_0)$ .

Es evidente que :

i)  $G_{\lambda_0}(u_0) = v_0$

ii)  $d\pi(v_0) \cdot dG_{\lambda_0}(u_0) = \text{Id}$

La segunda condición implica la suryectividad de  $d\pi(v_0)$ .

Tenemos entonces, una aplicación suryectiva con diferencial suryectiva, es decir, una submersión suryectiva. De ahí el nombre de proyección que hemos dado a la aplicación  $\pi$ .

## II.2. CALCULO DE LA FORMA DE LIOUVILLE SOBRE $\tilde{\sigma}$ .

### II.1.2.

Sea  $v \in \tilde{U}$  en el punto  $x$  de  $\tilde{D}$ . Llamemos, como antes,  $r_v$  la geodésica cuyo vector tangente

te en el punto  $x$  es  $v$ . Entonces, de acuerdo con I.2.5., la expresión en coordenadas canónicas de la diferencial de la forma de Liouville para el valor de  $v$  es:

### II.2.2.

$$d\alpha_g(v) = \sum_{ij,k=1}^2 \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} X^k(v) dx^i \wedge dx^j + \sum_{i,j=1}^2 dx^i \wedge dx^j$$

Consideremos un sistema de coordenadas ortogonales  $(x^1)$  en una vecindad de  $x$ , de tal suerte que se tenga  $g_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ . Sea  $\alpha_i$  el ángulo entre  $v$  y el vector tangente a la  $x^i$ -curva en el punto  $x$ . Entonces  $v$  tiene por coordenadas

$$(x^1, x^2, (g_{11})^{-1/2}(x) \cos \alpha_1, (g_{22})^{-1/2}(x) \cos \alpha_2)$$

y el valor de  $d\alpha_g(v)$  será:

### II.2.3.

$$d\alpha_g(v) = -(g_{11})^{1/2} \operatorname{sen} \alpha_1 d\alpha_1 \wedge dx^1 -$$

$$(g_{22})^{1/2} \operatorname{sen} \alpha_2 d\alpha_2 \wedge dx^2$$

$$\left[ \frac{\partial (g_{22})}{\partial x^1}^{1/2} \cos \alpha_2 - \frac{\partial (g_{11})}{\partial x^2}^{1/2} \cos \alpha_1 \right] dx^1 \wedge dx^2.$$

igualdad que se obtiene a partir de II.2.2. cambiando el  $x^i$  por  $(g_{ii})^{-1/2} \cos \alpha_i$ , y  $dx^i$  por  $\alpha_i dx^h$

$$\sum_{h=1}^2 \frac{\partial (g_{ii})^{-1/2}}{\partial x^h} \cos \alpha_i dx^h - (g_{ii})^{-1/2} \sin \alpha_i d\alpha_i$$

Ahora bien, de acuerdo al Teorema de Liouville,

(Ver Besse, (1)), la forma  $d\alpha_g$  es invariante a lo

largo de una geodésica. Esto implica que

$$d\alpha_g(v) = d\alpha_g(\pi(v)) \text{ para todo } v \in \bar{U}.$$

Supongamos que  $\Gamma$ , el borde de  $D$ , está parametrizado por la longitud de arco  $s$  y que  $(x^i(s))$  son las coordenadas del punto  $p \in \Gamma$  tal que  $\pi(v) \in U_p \bar{D}$ .

Entonces, puesto que el campo de vectores a lo largo de una geodésica es paralelo y el transporte paralelo preserva los ángulos, tenemos:

#### III.2.4.

$$d\alpha_g(\pi(v)) = -(g_{11})^{1/2} \sin \alpha_1 \frac{dx^1}{ds} d\alpha_1 \wedge ds -$$

$$(g_{22})^{1/2} \sin \alpha_2 \frac{dx^2}{ds} d\alpha_2 \wedge ds$$

$$- \left[ (g_{11})^{1/2} \sin \alpha_1 \frac{dx^1}{ds} d\alpha_1 + (g_{22})^{1/2} \sin \alpha_2 \frac{dx^2}{ds} d\alpha_2 \right]$$

Sea  $\theta$  el ángulo formado por el vector unitario tangente

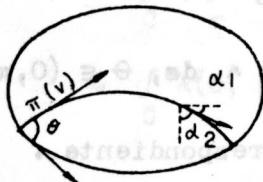
al borde  $\Gamma$ , de coordenadas  $(x^1(s), x^2(s), \frac{dx^1}{ds}, \frac{dx^2}{ds})$ ,  
y  $\pi(v)$ .

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} dV = \int_{\Gamma} \int_0^{\lambda(\theta, s)} ds d\theta$$

• p. 8. II

$$dV = ab \wedge \theta \wedge \theta \cos \alpha = ((v)_s) \wedge b \wedge \theta \cos \alpha$$

$$[\lambda(\theta, s)] = a, (\lambda(0, s)) = \theta \wedge b \wedge \theta \cos \alpha \wedge \phi$$



dónde  $\lambda(\theta, s)$  es la longitud de la geodésica  $s$

• q. 8. II

III. UNA ESTIMACION PARA LA FORMA SOBRE  $\tilde{C}$ .

fig. 4

• i. 8. II

III.1. estimaciones sombreadas • p. I adicces si no es  
que se orientan obviamente fob nenufov le dina nclavirze son

de convergencia dadas en la sección II.2.1. Se supone que  
señal si II.2.5.

de dar una estimación de la medida para la convergencia  
de la forma. Si es el elemento de la medida

$$\cos \theta = (g_{11})^{1/2} \cos \alpha_1 \frac{dx^1}{ds} + (g_{22})^{1/2} \cos \alpha_2 \frac{dx^2}{ds}, \quad y$$

son, el caso de no existir una otra estimación.

Precisemos un poco. •

II.2.6. si esta estimación • es que alrededor de ab  
señal se supone que

$$\sin \theta d\theta = (g_{11})^{1/2} \sin \alpha_1 \frac{dx^1}{ds} d\alpha_1 +$$

tud de arco. • (g\_{22})^{1/2} \sin \alpha\_2 \frac{dx^2}{ds} d\alpha\_2

la geodésica que une los dos puntos en la variedad.

Reemplazando II.2.6. en II.2.4. se obtiene la  
expresión de la forma de Liouville sobre  $\tilde{C}$  y, por i-  
dentificación de  $\tilde{C}$  con  $C$ , sobre la variedad de las

geodésicas :

### II.2.7.

$$\phi = d\alpha_g(\pi(v)) = -\sin \theta d\theta \wedge ds, \quad y$$

$$|\phi| = \sin \theta d\theta \wedge ds, \quad \theta \in (0, \pi), \quad s \in [0, L]$$

es la forma volumen correspondiente. Es invariante a lo

largo de una geodésica. Esto implica que

### II.3. VOLUMEN DE $\bar{UD}$

#### II.3.1.

Ya en la sección I.4. habíamos encontrado una expresión para el volumen del fibrado unitario en términos del volumen de la variedad y del volumen de la fibra  $S^{n-1}$ , siendo  $n$  la dimensión de la variedad.

Un argumento similar, en el caso de  $\bar{D}$ , nos da otra fórmula para el volumen de  $\bar{UD}$  utilizando ahora, no la fibración de  $\bar{UD}$  sobre  $\bar{D}$ , sino la proyección del fibrado unitario sobre la variedad de las geodésicas :

$$\bar{UD} \xrightarrow{\pi} \tilde{C}.$$

De acuerdo al teorema de Fubini para las submersiones (ver Dieudonné (3)) tenemos :

### II.3.2.

$$\begin{aligned} \text{Vol } (\bar{D}) &= \int_{\bar{D}} \alpha_g \wedge d\alpha_g = \int_C \left( \int_{\pi^{-1}(r)} \alpha_g \right) |_0^1 \\ &= \int_C \left( \int_r^1 dt \right) \sin \theta \wedge ds \\ &= \int_C \lambda(\theta, s) \sin \theta d\theta \wedge ds \end{aligned}$$

donde  $\lambda(\theta, s)$  es la longitud de la geodésica  $r$

### III. UNA ESTIMACION DE LA METRICA SOBRE $\bar{D}$ .

#### III.1.

Sean  $D$ ,  $\Gamma$ ,  $g$ , con las mismas condiciones

de convexidad dadas en la sección II.1.1. Se trata aquí

de dar una estimación de la métrica sobre  $\bar{D}$ , conocidas

las distancias entre los puntos de  $\Gamma$  y el borde de  $D$ .

Precisemos un poco.

Supongamos que  $\Gamma$  está parametrizada por la longitud

de arco  $s$  y que  $L$  es su longitud. Sea  $K(s, t)$

la geodésica que une los dos puntos del borde

$(\beta(s), \tau(s))$  y  $(\beta(t), \tau(t))$ , y sea  $\lambda(s, t)$

la distancia entre estos puntos. Podemos suponer, sin

pérdida de generalidad, que la métrica  $g$  es conforme

a la métrica canónica  $g_0$ , es decir, que existe una función positiva  $\phi$  de clase  $C^\infty$  tal que

$$g = \phi^2 g_0$$

y en este caso  $\lambda(s, t)$  es igual a :

### III.2.

$$\int_{K(s, t)} \phi \, ds \quad ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}, \quad (x, y) \in D$$

Conocida entonces la función  $\lambda : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , se pretende estimar la métrica  $g$  sobre  $D$ , lo que es equivalente, la función  $\phi$ . Un primer resultado es el siguiente:

III.3. Lema. Sea  $g$  una métrica conforme a la métrica euclíadiana,  $g = \phi^2 g_0$ , definida sobre una parte  $D$  del plano. Entonces,

$$\|\operatorname{grad}_g f\|_0^2 = \phi^2 \|\operatorname{grad}_{g_0} f\|_g^2$$

Verificación :

Puesto que  $g$  es no-degenerada, induce un isomorfismo entre  $T_p D$  y  $T_m D$  para todo  $m \in D$ .

Existe entonces un campo de vectores,  $\text{grad}_g f$ , tal que para todo  $m \in D$ .

$$g(\text{grad}_g f)(m) = df(m).$$

Sea  $(dx, dy)$  la base canónica de  $T_{(x,y)}^*D$ . En esta base,  $df$  y  $g$  se escriben respectivamente:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

### III.4.

$$g = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx^i dx^j, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y$$

dónde  $g_{11} = \phi^2 = g_{22}$ ,  $g_{12} = 0 = g_{21}$ .

Sea  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$  la base dual de  $(dx, dy)$ ; entonces:

$$g(\text{grad}_g f, \frac{\partial}{\partial x}) = df \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

### III.5.

$$g(\text{grad}_g f, \frac{\partial}{\partial y}) = df \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Si ponemos  $\text{grad}_g f = \Phi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Phi_2 \frac{\partial}{\partial y}$ , las ecuaciones III.5 se convierten en:

$$g_{11} \Phi_1 + g_{21} \Phi_2 = \frac{\partial f}{\partial x}$$

### III.6.

$$g_{12} \phi_1 + g_{22} \phi_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$$

o bien ,

$$\phi^2 \phi_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\phi^2 \phi_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Por otra parte ,

### III.7.

$$\| \text{grad}_g f \|_g^2 = g_{11} \phi_1^2 + g_{22} \phi_2^2$$

$$= \frac{1}{\phi^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\phi^2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2$$

de donde el resultado se obtiene inmediatamente .

En particular , esta relación es cierta para la función longitud de las geodésicas ,  $\lambda(s, t) = \int_{K(s, t)} \phi ds$  .

Si la función  $\lambda(s, t)$  es conocida , podemos establecer una estimación de la métrica  $g$  sobre  $D$  en términos del gradiente de  $\lambda$  , dada por el teorema siguiente :

### III.8. Teorema .

Bajo las mismas condiciones de convexidad dadas en II.1.1. a  $D$ ,  $F$ , y  $g$  , tenemos :

$$\text{Área } (\bar{D}) \leq \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{Fr}} \|\text{grad}_g \lambda\|_g^2 d\sigma_g$$

donde  $d\sigma_g$  es la medida correspondiente a la métrica  $g$ .

### Demostración :

En secciones anteriores hemos encon-

trado expresiones para el volumen del fibrado unitario , las fórmulas II.3.3. y I.4.2., utilizando la submer-  
sión  $\bar{U}\bar{D} \rightarrow \bar{C}$  y la fibración  $U\bar{M} \rightarrow M$  , respectivamente.

A partir de estas dos fórmulas obtenemos :

### III.9.

$$\text{Área } (\bar{D}) = \frac{1}{2\pi} \int_C \lambda(\theta, s) \sin \theta d\theta \wedge ds$$

donde  $2\pi$  es el volumen de la esfera  $S^1$  .

Entonces , si  $L$  es la longitud de la curva  $T$  ,

### III.10.

$$2\pi \text{ Área } (\bar{D}) = \int_0^L \int_0^\pi \lambda(\theta, s) \sin \theta d\theta \wedge ds$$

Una integración por partes juega un papel determi-  
nante :

### III.11.

$$2\pi \text{ Área } (\bar{D}) = \int_0^L \lambda(\theta, s) (-\cos \theta) \Big|_0^\pi +$$

$$\int_0^L \int_0^\pi \frac{\theta}{\theta\theta} \lambda(\theta, s) \cos \theta \, d\theta \, ds$$

El primer término de la integral es nulo pues  $\lambda(\theta, s) \rightarrow 0$  cuando  $\theta \rightarrow \pi, \theta \rightarrow 0$ .

Por otra parte, puesto que (Ver Helgasson (5))

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} (\theta, s) = \cos \theta$$

para  $\theta$  y  $s$  como se muestran en la figura 5, la ecuación III.11

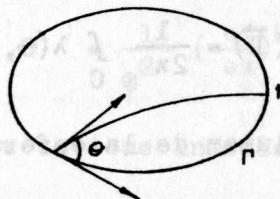


fig. 5

se transforma en :

III.12

$$2\pi \text{ Area } (\bar{D}) \int_0^L \int_0^\pi \frac{\theta \lambda}{\theta\theta} (\theta, s) \, d\theta \, ds$$

Volvemos ahora a la otra parametrización de

$\tilde{C} = f \times \Gamma$  descrita en II.1.2., es decir, cada geodésica  $r$  está determinada por una pareja  $(s, t)$  en  $\Gamma \times \Gamma$ . Entonces, si hacemos el cambio de variable  $s = s$ ,  $\theta = \theta(t)$ ,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} = \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

y  $\frac{d\theta}{dt}$  es el jacobiano de la transformación. III.12 se convierte en:

### III.13.

$$2\pi \text{Area}(\bar{D}) = \int_0^L \int_0^L \frac{\partial \lambda}{\partial t}(t, s) \frac{\partial \lambda}{\partial s}(t, s) dt ds$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^L \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right)^2 dt ds.$$

de donde,

### III.14.

$$(1) \quad \text{Besse, A. "Manifolds all of whose 1st Betti numbers are zero". Springer Verlag. 1978.}$$

$$\text{Area}(\bar{D}) \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^L \int_0^L \|\text{grad}_o \lambda\|_o^2 dt ds$$

o bien, de acuerdo con el lema III.3.

### III.15.

$$(3) \quad \text{Dieudonné, J. "Calculus on Banach spaces". Academic Press. 1973.}$$

$$\text{Area}(D) \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^L \int_0^L \|\text{grad}_g \lambda\|_g^2 \phi^2 dt ds$$

Si ponemos  $d\sigma_g = \phi^2 dt ds$ ,  $d\sigma_g$  es precisamente la medida asociada a la métrica  $g$ , lo cual finaliza la demostración.

tracción del teorema .

### III.16.

Es bueno notar el carácter geométrico e intrínseco de la estimación dada por el teorema , ya que los elementos que intervienen : área , gradiente , norma , medida , no dependen sino de la métrica  $g$  .

Desafortunadamente , esta estimación no puede ser generalizada para  $n > 2$  . En efecto , supongamos que sea cierta para una métrica  $g$  sobre un dominio  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  acotado por una hipersuperficie regular  $\Gamma$  . Es decir,

$$\text{Vol}(D, g) \leq \frac{1}{2n\pi} \iint_{\Gamma \times \Gamma} \| \text{grad}_g \lambda \|_g^2 ds \wedge dt$$

donde  $ds \wedge dt$  es la forma volumen sobre  $\Gamma \times \Gamma$  asociada a la métrica  $g$  . Sea  $g' = kg$  . Entonces ,

$$\text{Vol}(D, g') = k^{n/2} \text{Vol}(D, g)$$

$$\| \text{grad}_{g'} \lambda \|_{g'} = \| \text{grad}_g \lambda \|_g$$

$$ds = k \frac{n-1}{2} ds , dt' = k \frac{n-1}{2} dt$$

$$\iint_{\Gamma \times \Gamma} \| \text{grad}_{g'} \lambda \|_{g'} ds' \wedge dt' =$$

$$k^{\frac{n-1}{2}} \iint_{\Gamma \times \Gamma} \| \text{grad}_g \lambda \|_g ds \wedge dt$$

Luego la fórmula es homogénea únicamente en el caso

$$\frac{n}{2} = n-1, \text{ i.e. } n = 2$$

III.17.

Para finalizar, si recordamos que

$$\text{Área } (\bar{D}) = \iint_{\bar{D}} \phi^2 \, d\bar{D}$$

La fórmula III.8 puede ser escrita:

$$\|\phi\|_{L_2(\bar{D})} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \|\|\text{grad}_o \lambda\|_0\|_{L_2(\Gamma \times \Gamma)}$$

lo cual nos da de manera explícita la estimación de la métrica en términos de la función  $\lambda$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- (1) Besse, A. "Manifolds all of whose geodesics are closed". Springer Verlag. 1978 .
- (2) Berger, M., Gauduchon, P., Mazet, E. "Le spectre d'une variété riemannienne". Springer Verlag. 1978 .
- (3) Dieudonne, J. "Elements d'analyse". Tomo IV. Gauthier-Villars. Paris. 1971 .
- (4) Godbillon, C. "Géometrie différentielle et mécanique analytique". Hermann, Paris. 1969 .

- (5) Helgasson, S. "Differential Geometry and Symmetric spaces". Academic Press, New York. 1968 .
- (6) Muhametov, R.G. "The problem of Recovery of a Two-dimensional Metric and Integral Geometry". Soviet Math. Dokl. Vol. 18 (1977), No. 1 .

los elementos que intervienen : área , gradiente , norma , medida , no dependen sino de la métrica  $g_{ij}$ .

**Maria Victoria GUTIERREZ**

Departamento de Matemáticas  
Universidad Nacional  
Bogotá - Colombia.

donde  $\Delta$  es la forma fundamental asociada a

la métrica  $g$ . Sea  $g^* = kg$ . Entonces ,

$$\text{Vol}(g^*) = k^{1/2} \text{Vol}(g)$$

entonces el volumen en  $\mathbb{R}^n$  es

$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{|g|} d^n x$

de donde  $\int_{\mathbb{R}^n} d^n x = \sqrt{k^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x$

$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x = \sqrt{k^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{|g|} d^n x$

es decir  $\int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{|g|} d^n x = \sqrt{k^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x$

$\int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{|g|} d^n x = \sqrt{k^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x$