Boletín de Matemáticas
Vol. XVI, No. 3 (1982) Pags. 143 - 186

NO HAY PLANOS PERPENDICULARES EN TRES DIMENSIONES

Alberto CAMPOS

I. AXIOMATIZACION EN EUCLIDES Y EN HILBERT

Se supone que Euclides compuso los Elementos de la Geometría , siguiendo los preceptos de Aristóteles ; por eso , es muy difícil hallar una explicación para ciertos procedimientos que allí figuran y que contrarían las enseñanzas del filósofo en algunos puntos de lógica . Es el caso de las definiciones . En diversos lugares enseña él que no se puede definirlo todo y que la definición declara la esencia de las cosas ; esto segundo agrava la situación , dado que Euclides no se atiene a lo primero . Llega a forjar definiciones como la del ángulo , que tilda Bourbaki : "es tan confusa e inutilizable como las que da de recta o de plano" . El mismo Euclides no las emplea posteriormente , por lo que Blanché (L'Axiomatique . 1959 . PUF. Paris. 102 pp.) en el parágrafo 5 del primer capítulo , concreta una crítica , apoyada en una observación de Leibniz : "Esta discordancia entre las propiedades enunciadas en la pseudodefinición y las propiedades efectivamente utilizadas después , constituye una falta lógica grave , porque hace nacer una sospecha sobre la identidad de la noción ; qué nos asegura que la recta de la que hablan los teoremas es exactamente la misma que la que la definición estaba encargada de introducir ? " . El Carácter inmutable de las definiciones , por ser como reflejos de la esencia de las cosas , es lo que hace más delicada la no aparición , en las 23 definiciones del libro primero , de la reducción a nociones que se llaman actualmente , términos no definidos .

En la axiomatización de Hilbert de la geometría , paradigma de la matemática contemporánea , las nociones de punto , recta , plano son los términos no definidos , y no conllevan un contenido determinado . Es la geometría pura , de la cual pueden obtenerse geometrías aplicadas mediante ciertas interpretaciones . Que punto , como término no definido , es vacío y que ha de tomarse como una especie de variable , puede verse porque admite varias realizaciones . Punto puede ser un número real para la geometría de la recta , una pareja de números reales para la geometría del plano , una tripla de números reales para la geometría del espacio tridimensional . Como esta aplicación entre puntos y números es biyectiva , la noción de punto no puede significar , sin más , lo mismo , así se esté pensando , suspicazmente , en un mismo puntico negro como elemento común de una recta , un plano y el espacio , que se han dado cita precisamente allí , en el puntico negro . Esta idea estaba ya muy clara en la mente de Hilbert , unos ocho años antes de publicar Los Fundamentos de la Geometría , cuando observaba que punto , recta, plano debían de concebirse como reemplazables por mesa , taburete , vaso de cerveza , pues , lo que importa no es qué signifiquen estas formas (sin materia) sino las relaciones que guardan entre sí , que , a la postre , resultarán definiéndolas , pero implicitamente . Si se tiene dificultad con este desprendimiento de la cotidianeidad , es preferible emplear letras ; este es el papel de la simbolización ; es digno de notarse , empero , que ni Hilbert , ni Bourbaki , su discípulo más distinguido , den , ni de muy lejos , a la simbolización , la importancia que le dieron , me refiero a la práctica , lógicos como Russell y Whitehead .

En la axiomática a la manera de Hilbert las definiciones pierden el aspecto esencialista de que estaban ungidas en la axiomática a la manera de Euclides . Según la expresión de Bourbaki , son meros símbolos abreviadores .

Ahora bien ; dada la imprecisión de algunas definiciones en Euclides y el papel que , acabamos de anotar , le concede la axiomática actual a la definición , puede haber nociones que no se refieran a lo mismo en la ya añeja concepción del matemático alejandrino y en la actual . Nos proponemos indagar este punto , en el caso específico de la perpendicularidad .

II. LA DEFINICION 4 DEL LIBRO XI DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

En lo referente a Euclides sigo el texto de

HEATH Thomas. The thirteen books of Euclid's Elements. Vol. 3. Books X-XIII. Second edition. 1956 Dover republication. New York. 546 pp.

El origen de toda la discusión está en la definición 4 del libro XI .

Un plano está en ángulo recto respecto a otro plano cuando las líneas rectas trazadas , en uno de ellos , en ángulos rectos con la sección común de los planos, están en ángulos rectos con el otro plano.

Transcribo la definición 3 del mismo libro para contraponerla a la 4.

Una línea recta está en ángulo recto respecto a un plano, cuando forma ángulos rectos con todas las líneas rectas que la encuentran y que están en el mismo plano.

Esta es una versión más literal que la de los traductores que han empleado sistemáticamente el vocablo perpendicular.

En la definición 10 del primer libro, para introducir la noción de recta perpendicular, Euclides se sirve de una palabra cuya transcripción fonética al español sería: Káthetos; mientras que para las definiciones 3 y 4 del libro XI lo hace de otra cuya transcripción sería: orthón, generalmente usada para lo que es recto, como el ángulo. Si hubiera utilizado orthón para la definición 4 y káthetos para la 3, como para la 10 del libro I, los epígonos de Euclides habrían observado que no hay analogía entre las definiciones 3 y 4, a pesar de las apariencias. Cuando una recta es perpendicular a un plano, es perpendicular a todas las rectas contenidas en ese plano e incidentes con ella en el punto en que ella incide con el plano . Hubiera sido , pues , de esperar , cuando menos por analogía , un enunciado universal en el caso de la perpendicularidad de planos ; éste precisamente .

Si dos planos son perpendiculares , toda recta de uno de los planos es perpendicular a toda recta que la corte del otro de los planos .

Evidentemente , con la evidencia de la intuición , ningún par de planos en tres dimensiones , puede verificar tal enunciado . En consecuencia , no habría planos perpendiculares en tres dimensiones . Aspiro a mostrar que esta es la situación más conveniente para la claridad de los conceptos y , por ende , para la facilidad de la enseñanza .

Es de observar , para volver al texto en cuestión, que nadie controvirtió el especioso parentesco de las dos nociones , sino más bien el hecho de que Euclides se valiera del enunciado que afirma que si dos planos se cortan la sección es una línea recta , por no ser éste legitimado sino hasta el tercer teorema del libro .

Es interesante apuntar que káthetos proviene de un verbo (griego) que significa : tirar de arriba abajo. La noción de línea recta perpendicular es la de una línea recta que se deja caer sobre la superficie de la tierra, la cuerda de plomada, tan utilizada en la construcción; a lo cual añade Heath que según Proclo, la perpendicular era llamada desde tiempos antiguos, gnomónica, a manera de gnomon, por su semejanza con éste, una especie de estilo vertical respecto al horizonte. Así pues, Euclides está en la línea de la tradición. Y, por lo demás, en la del pensamiento de Aristóteles en diversos pasajes; en particular en aquél (VI.Cielo. 1 268 a) en el que el filósofo enseña

La magnitud que se extiende en un solo sentido es la línea, la que se extiende en dos sentidos es la superficie, la que se extiende en los tres sentidos es el cuerpo; y fuera de éstas no existe ninguna otra magnitud, por ser las tres las únicas posibles y por ser el mismo tres la totalidad, ...

Exponente del pensamiento griego, Euclides hacía geometría, en cierta manera como si hiciera física; (todavía Comte, al final de la segunda lección, la de su célebre clasificación de las ciencias, distingue "la matemática abstracta o cálculo" de las "matemáticas concretas , la geometría y la mecánica racional , ... , verdaderas ciencias naturales , basadas como las restantes en la observación") ; abstraía del espacio ambiente, a la manera de Aristóteles , esto es , se restringía a la consideración de unas pocas propiedades de los objetos, las que le interesaban para su elucubración racional . Las tres magnitudes de la realidad aristotélica son las tres dimensiones de la geometría . Y no hay más . La cuestión de generalizar no se presenta . Y mientras no haya que tratar más de tres dimensiones no hay razón para que la de planos perpendiculares sea una noción incómoda.

Con la definición 3 del libro XI tienen que ver específicamente las proposiciones 4 y 5 del mismo libro .

XI.4. Si una línea recta forma , en el punto de intersección , ángulos rectos con dos líneas rectas que se cortan , también formará ángulos rectos con el plano que las contiene .

XI.5. Si una línea recta forma , en el punto de intersección , ángulos rectos con tres líneas rectas que se cortan , las tres líneas rectas están en un plano .

Según Heath , atribuye Crelle a Fourier el estribar en la definición 3 con la intención , no del todo viable , de lograr una definición de plano , que sería así

Un plano está formado por la totalidad de las líneas rectas que pasan por un mismo punto de una recta en el espacio y son perpendiculares a ella .

Con la definición 4 del libro XI está particularmente relacionada la proposición 18 del mismo libro.

XI.18. Si una recta forma ángulos rectos con un plano cualquiera , todos los planos que pasan por ella forman ángulos rectos con el mismo plano .

Es curioso que Euclides no quiera sacar todas las consecuencias de sus premisas , como las que se leen en dos autores que me permito citar a continuación .

En elementos de Geometría , de Rey y Puig (ver el dato completo en la quinta parte del presente artículo) se encuentran dos .

Todos los planos que pasan por una recta perpendicular a un plano , son perpendiculares a dicho plano .

Por un punto se pueden trazar infinitos planos perpendiculares a uno dado : todos los que pasan por la recta perpendicular trazada por este punto .

Frases muy similares figuran en Elementos de Geometría (ver la parte quinta) , de un buen matemático italiano , Severi .

Dos planos se llaman perpendiculares , cuando uno de ellos contiene una recta perpendicular al otro , y , por consiguiente , éste una recta perpendicular al primero . Cuando dos planos son perpendiculares , toda recta trazada sobre cada uno de los dos planos perpendicularmente a su intersección es perpendicular al otro . (p.166). Por un punto pasan infinitos planos perpendiculares a un plano dado y son todos los planos que contienen a la recta perpendicular al plano , trazada por el punto . (p. 167) .

Los traductores (nótese que hay excepciones , como Heath) que han inducido a los autores de textos a tratar de plano perpendicular a un plano en sentido análogo al de recta perpendicular a un plano , en realidad no han traicionado a Euclides , quien no se sabe porqué razón utilizó dos términos para lo mismo , los que , por ende , se vuelven sinónimos . Es de advertir , empero, que con la definición 3 puede aspirar Fourier a determinar la noción de plano , mientras que con la definición 4 , Rey y Puig , o Severi alcanzan una familia de planos que contienen a una recta perpendicular a un plano , que parece poder engullir , por cierto , a la noción de recta perpendicular a un plano , tanto la envuelve y la desdibuja.

Mayor indeterminación habría si se ensayara pasar a cuatro dimensiones , pues , a más de esta perpendicularidad heredada (o si alguien lo prefiere , una teoría para cuatro dimensiones , debe contener por restricción los resultados del geómetra alejandrino), habrá la que resulta apropiada para cuatro o más dimensiones , en línea directa , como era de esperar , con la noción dada por la definición 3. Esta , es acomodable , o si se quiere , tiene su análogo en las dimensiones superiores , a más de estar de acuerdo con la intuición de tipo espacial . La de planos perpendiculares , es verdad que está sacada de la experiencia , pero su caracterización en tres dimensiones , a saber , que uno de los planos contenga una recta perpendicular al otro , no es generalizable como sería de esperar para la intuición de tipo matemático (no forzosamente de tipo espacial) . Naturalmente se podría pensar un concepto generalizado que contuviera , entre otros , el emparentado con la definición 4 ; y un ejercicio de Bourbaki , que citaremos más adelante , a pesar de no dar razón a Euclides , es la realización de dicho pensamiento .

Sin embargo , el estudio de diversos tipos de perpendicularidad es innecesario inclusive en la preparación profesional de un matemático , y sería aventurado conjeturar que su examen a nivel avanzado sea más prometedor de lo que supone Bourbaki al proponerlo como un ejercicio .

En cambio , el hecho , sin consecuencias dentro de su sistema , de que Euclides haya concebido planos perpendiculares en tres dimensiones , sí puede tenerlas para una exposición actualizada de la geometría y , luego , para la docencia . Porque al contacto con la rutina de la escuela , se convirtió la definición de Euclides , en una especie de segunda naturaleza , a la cual muchos no solamente no quieren renunciar (conducta que carecería de importancia) sino que se obstinan en continuar cultivando en sus oyentes , a pesar de reconocer , algunos por lo menos , que , mínimo , se comete un abuso de lenguaje (ver la última parte) .

Puede alguien creer que insisto en demasía sobre un asunto , para cuya exploración unas cuantas líneas serían bastantes . Dado , empero , lo inveterado de la costumbre que testimonian la multitud de los autores y ese gran repertorio de sentido común que son los diccionarios , juzgo oportuno recordar someramente las grandes líneas de una exposición actualizada de la geometría ; faltaría ver que dentro de ella caben , sin esfuerzo , los resultados más significativos de Euclides ; pero no esbozaré aquí sino lo tocante a la perpendicularidad , objeto de estas reflexiones .

Una exposición de la geometría elemental , a la altura de la matemática contemporánea , es la que se hace algebraicamente mediante conjuntos los cuales se han dotado de una estructura asociada a R^n .

Es cierto que , en un nivel avanzado , R^n es tanto un espacio vectorial , como una variedad afín , como un espacio topológico . Pero esta convivencia , fruto de la madurez que permite discernir las estructuras si es el caso , es muy mal vista , y , quizá no únicamente en los primeros semestres de entrenamiento , por los futuros matemáticos , así vayan hacia la invención o la enseñanza . Cito en mi apoyo a quienes , incluidos profesores bien preparados , no encuentran nada fácil el libro de Dieudonné a pesar de un título que puede inspirar confianza , como es el de Algebra lineal y Geometría elemental . Yo leí en alguna parte que una de las razones que aducía era el designar con la misma letra al que el discernimiento del lector y la atención de éste en el proceso del razonamiento , debería reconocer , como un elemento del espacio vectorial o como un elemento de la variedad afín asociada . Aunque haya un isomorfismo , creo que es lo más indicado mantener , sobretodo inicialmente , paralelamente el lenguaje algebraico y el geométrico .

El marco general de la exposición es la teoría de las formas sesquilineares , que puede consultarse en el capítulo de Bourbaki citado en la parte quinta . Más particularmente , la teoría concerniente está expuesta en el parágrafo 36 de

GODEMENT Roger. Cours d'algebre. 1963. Paris. Hermann. 633 pp.

teniendo siempre en mente el caso ortogonal real . Más directamente , para dos y tres dimensiones a nivel de último año de enseñanza secundaria en Francia , primeros semestres universitarios entre nosotros , y tanto para la parte algebraica como para la de geometría , puede verse

CONDAMINE M. Géométrie. Terminales C-E. 1971. Paris. Delagrave. 751 pp.

En una nota de carácter divulgativo y que concierne sobre todo a los principios (lo cual autoriza una constante preocupación por la visión de conjunto y dispensa de los detalles , porque pueden distraer) , y no otra cosa pretende la presente , sobra el transcribir las demostraciones que , por lo demás , el eventual lector puede encontrar completas , con las acotaciones ya hechas , en los excelentes libros citados , o , en otros similares y de su particular preferencia .

III. SUBESPACIOS VECTORIALES ORTOGONALES

III.1. Leyes de composición con subespacios de R^n

Sean U , V dos subespacios vectoriales de R^n .

Se llama <u>suma de los dos subespacios</u> , y si es el caso se nota U+V , al conjunto de los vectores de la forma u+v , donde u es un vector de U y v es un vector de V. La suma de dos subespacios de R^n es un subespacio de R^n.

Se llama <u>intersección de los subespacios</u>, y si es el caso se nota $U \cap V$, al conjunto de los vectores comunes a los dos subespacios. La intersección de dos subespacios de R^n es un subespacio de R^n. En efecto, ella nunca es vacía, por lo menos contiene al vector nulo.

Quizá sea conveniente explicitar que los subconjuntos obtenidos de los subespacios mediante la suma y la intersección, son subespacios respecto a la restricción a ellos de la adición de vectores en R^n.

Si dos subespacios no tienen común sino el vector nulo, se dice que su suma es <u>suma directa</u>. Para que W sea suma directa de U y V se requieren, pues, dos condiciones : $W = U + V$, y, $U \cap V$ se reduce al vector nulo. Cuando W es R^n, se dice que los dos subespacios U, V son <u>suplementarios</u>.

En el conjunto de los subespacios de R^n, a cada subespacio quedan, de esta manera, asociados dos subespacios. $U \cap V$, el mayor subespacio contenido a la vez en U y en V. En segundo lugar, $U + V$, el me nor subespacio que contiene a la vez a U y a V . Se dice que el conjunto de los subespacios de R^n tiene una estructura de red .

III.2. Ortogonal de un subespacio

Sobre el espacio vectorial real R^n se considera ahora la forma producto escalar euclidiano , aplicación bilineal simétrica definida positiva , que a dos vectores de R^n hace corresponder un número real , su producto escalar . Si éste es nulo , se dice que los dos vectores , no nulos , son ortogonales .

Si V es un subespacio propio de R^n , se llama ortogonal de V , y si es el caso se nota V^o , al subconjunto de los vectores de R^n ortogonales a cada uno de los vectores de V .

Cítanse (sin demostración como ya se explicó) los teoremas importantes para dilucidar la cuestión propuesta.

Teorema

$(V^o)^o = V$, cualquiera sea el subespacio V de R^n .

Teorema

$\dim V + \dim V^o = d^{im} R^n = n$.

Si V es un subespacio vectorial de R^n, de m dimensiones, m menor que n, por los teoremas anotados el orotogonal de V es de dimensión $n - m$.

Teorema

R^n es suma directa de V y del ortogonal de V. Por tratarse de suma directa de dos subespacios, todo vector de R^n es, de manera única, suma de dos vectores, respectivamente elementos de cada uno de los subespacios sumandos.

El subespacio V es estable mediante biyecciones lineales ortogonales en m dimensiones, es decir, mediante elementos del grupo lineal general $GL(n,R)$ tales que las primeras m líneas y las primeras m columnas de sus matrices formen matrices ortogonales.

Análogamente, el ortogonal de V es estable mediante biyecciones lineales ortogonales en $(n - m)$ dimensiones.

Estos dos enunciados traen como consecuencia el que dos subespacios ortogonales al mismo subespacio son isomorfos.

IV. SUBVARIEDADES AFINES PERPENDICULARES

IV.1. Variedad afín asociada a R^n

El objeto fundamental para el estudio de la geometría afín y euclidiana, llamado variedad afín real n-dimensional, es un conjunto con una estructura modelada sobre R^n, cuya construcción me permito recordar brevemente.

Sea (P) un conjunto, cuyos elementos llamamos puntos y notamos, si es el caso, $O,P,Q,R,\ldots$

Decir que el grupo $(R\times\ldots\times R, +)$ opera sobre (P) es equivalente a decir, que existe una aplicación, que puede llamarse <u>translación de puntos</u>,

$$(R\times\ldots\times R, +) \times (P) \rightarrow (P)$$

$$(v, P) \rightarrow Q = v + P$$

que a un punto P hace corresponder, mediante un vector v el punto Q, aplicación que satisface las dos condiciones siguientes:

. $v' + (v + P) = (v' + v) + P$

.. $\vec{0} + P = P$

Según esta concepción, los elementos del grupo

$(R\times\ldots\times R, +)$, es decir , los vectores de R^n , aparecen como operadores que actúan sobre puntos ; de esta manera se aplican puntos en puntos .

El primer axioma indica que entre los operadores rige la composición de funciones , que en este caso es la suma de vectores .

El segundo axioma indica que el vector nulo , $\vec{0} = (0,\ldots,0)$, de R^n , deja todos los puntos invariantes .

A la pareja formada por el conjunto (P) , y el grupo aditivo del espacio vectorial R^n como grupo de operadores sobre (P) , en las condiciones dichas , se la designa <u>variedad</u> <u>afín</u> <u>real</u> <u>n-dimensional</u> , $A(R^n)$.

Se puede expresar toda la situación en este solo enunciado :

Decir que $A(R^n)$ es una variedad afín real n-dimensional , es equivalente a decir , que

dados dos puntos P,Q de $A(R^n)$

existe un único vector v de R^n

tal que $v + P = Q$.

En vez de $v + P = Q$ se puede emplear la notación de

Grassmann , $v = Q - P$, o la de los físicos , $v = \vec{PQ}$.

Cuando $n = 1$, $A(R)$ se llama recta afín real .

Cuando $n = 2$, $A(R^2)$ se llama plano afín real .

Cuando $n = 3$, $A(R^3)$ se llama espacio afín real .

IV.2. Subvariedades Perpendiculares

A R^n se asocia la variedad afín $A(R^n)$.

A los subespacios vectoriales de R^n se asocian las subvariedades afines , de la siguiente manera .

En $A(R^n)xA(R^n)$ se define una relación asociada a un subespacio , V , de R^n , así

$$P \text{ rel } Q \leftrightarrow \vec{PQ} \text{ es un vector de } V$$

Se demuestra que esta relación es de equivalencia .

Cada clase de equivalencia es una subvariedad afín asociada a V , o, como también se dice , cuya dirección es V .

Dado un subespacio propio , V , de R^n , cada punto P_o de $A(R^n)$ determina o fija una relación de equivalencia , la subvariedad afín de $A(R^n)$ que pasa por P_o y cuya dirección es V . Si es el caso se la nota

$((P_o), V)$. Cada punto de $A(R^n)$ pertenece a una única clase de equivalencia , siempre respecto al mismo subespacio V . En otras palabras , si Q_o es un punto de la subvariedad $((P_o), V)$ se tiene que

$$((Q_o), V) = ((P_o), V) .$$

Si Q_o no es un punto de $((P_o), V)$ entonces

$$((Q_o), V) \cap ((P_o), V)$$

es el conjunto vacío . En este caso , las subvariedades se dicen paralelas . Es decir , dos subvariedades de $A(R^n)$ son paralelas si tienen la misma dirección .

Como caso particular , si $n = 2$, las subvariedades propias de $A(R^2)$ son las rectas del plano . Dos de ellas son paralelas si tienen el mismo vector director v . Si P_o , Q_o son dos puntos del plano , si el conjunto de las combinaciones lineales , $\{rv\}$, donde r es un número real cualquiera , es el subespacio vectorial unodimensional , dirección de ambas rectas y si Q_o no es un punto de $((P_o), \{rv\})$ entonces existe una única recta $((Q_o), \{rv\})$, paralela , por tanto a $((P_o), \{rv\})$.

El quinto postulado de Euclides resulta como teorema en esta axiomatización de la geometría .

Se puede mostrar que

$$\dim ((P_o) , V) = \dim V$$

Si U es un subespacio de R^n , distinto de V , hay las subvariedades afines de $A(R^n)$ asociadas a U y surge el problema de determinar las posiciones relativas de dos subvariedades dadas , o de subvariedades de éstas . Como los elementos constitutivos de la noción de subvariedad son los puntos y los subespacios , hay que tener en cuenta, por una parte los puntos comunes (dejamos de lado el paralelismo) y, por otra , la intersección de los subespacios a los cuales están asociadas . A este respecto , son tres los teoremas , ya clásicos , que se van a enunciar sin demostración , como convenido .

Teorema

Si dos subvariedades afines asociadas a U y V respectivamente , tienen un punto común , entonces , la intersección de las dos subvariedades es una subvariedad afín , asociada a $U \cap V$.

Teorema

Las subvariedades afines $((P_1) , U)$, $((P_2), V)$

tienen puntos comunes si y solo si $\overrightarrow{P_1P_2}$ es un vector de $U + V$.

Un caso particular de éste, se pone también como teorema, por la importancia que tiene, sobre todo para la afirmación principal del presente escrito.

Teorema

Si U,V son subespacios suplementarios en R^n, entonces, las subvariedades $((P_1), U)$, $((P_2), V)$ tienen un único punto común.

Por definición, estas dos subvariedades se llaman <u>perpendiculares</u>. Para que dos subvariedades sean perpendiculares es necesario y suficiente que tengan un punto común y que si la una está asociada al subespacio V, la otra lo esté al subespacio ortogonal de V. Pero también hay la noción de subvariedades de estas subvariedades perpendiculares entre sí.

En $A(R^3)$, una recta es perpendicular a un plano, pero en el plano mismo hay inumerables parejas de rectas perpendiculares entre sí.

Para que dos subvariedades cualesquiera sean perpendiculares es necesario y suficiente que estén asociadas a subespacios tales que todo vector del uno es ortogonal a todo vector del otro (se subentiende siempre que los vectores en cuestión son no nulos) .

En efecto , para m menor que n estrictamente , es R^m un subespacio propio de R^n ; por lo tanto , la variedad asociada a R^m es subvariedad de la variedad asociada a R^n y para cada valor de m mayor o igual que dos , vale el último teorema enunciado a partir del cual se ha definido la perpendicularidad entre dos subvariedades .

En una dimensión , no hay perpendicularidad , propiamente hablando , por estar la noción asociada a subespacios vectoriales propios , y no haberlos en dimensión uno .

En dos dimensiones , las subvariedades afines unodimensionales son las rectas .

Dados dos vectores linealmente independientes , cada uno genera un subespacio vectorial unodimensional y habrá sendas familias de rectas asociadas a cada uno de los dos subespacios .

Fijado un punto del plano , pasa por él una única recta de cada familia . Si los dos vectores generadores son ortogonales , las dos rectas son perpendiculares .

Cada recta de cada una de las dos familias cumple entonces una de las condiciones de perpendicularidad , la de que sus vectores directores son ortogonales . Para cada recta de cada familia existe un único punto del plano donde se cumple también la segunda , al encontrar una única recta en dicho punto : entonces las dos son perpendiculares entre sí .

La variedad bidimensional asociada a los dos vectores ortogonales es un plano .

Si a los dos vectores ortogonales anteriores añadimos un tercer vector ortogonal a los dos vectores dados , al espacio vectorial tridimensional obtenido está asociada una variedad afín tridimensional , de la cual , en particular , son subvariedades las rectas asociadas al tercer vector y el plano asociado a los dos primeros . Un vector director de la recta es ortogonal a todo vector del subespacio vectorial al cual está asociado el plano . La recta es perpendicular a todo el plano y también a cada una de las rectas del plano que pase por el punto donde la recta encuentra al plano .

Y no hay más casos posibles de perpendicularidad, que no sea el de otras rectas cuyo vector director es el mismo tercer vector ya dicho.

Desde luego, entre las rectas de esta familia, se puede considerar la subfamilia que corta al plano según una recta del plano que pasa por el punto donde la recta cuyo vector director es el tercero dado, corta al plano.

Estas rectas están en un plano que algunos persisten en considerar, como hizo Euclides, perpendicular al primer plano.

Pero estos dos planos tienen una recta común, y no un único punto común como se requiere para la perpendicularidad definida de manera que convenga para cualquier dimensión finita. Los subespacios vectoriales, a los cuales están asociados los dos planos, tienen en común un subespacio vectorial unodimensional.

Si hubiera planos perpendiculares en tres dimensiones y si fuera V el subespacio vectorial bidimensional en R^3 al cual estuviera asociado uno de los planos, un plano perpendicular a éste estaría necesariamente asociado al subespacio ortogonal de V; ahora bien, en tres dimensiones el ortogonal de un subespacio bidimensional es un subespacio unodimensional ; en consecuencia, no hay planos perpendiculares en tres dimensiones.

Análogamente sucederá en dimensiones superiores en cuanto a la relación entre subespacios y subvariedades. Habrá una familia de subvariedades asociadas a un subespacio vectorial, V, de R^n, y una familia asociada al ortogonal de V, referido R^n desde luego a una base ortogonal ; y, por cada punto de $A(R^n)$ una única subvariedad asociada a V, perpendicular a una única subvariedad asociada al ortogonal de V. Sea P_o este punto. Cabe considerar las subvariedades de la subvariedad $((P_o), V)$ que pasan por P_o, y, las subvariedades de la subvariedad $((P_o), V^o)$ que pasan por P_o : éstas son las subvariedades afines euclidianas asociadas a subespacios propios del subespacio propio V, y, las subvariedades afines asociadas a subespacios propios del subespacio propio ortogonal de V, respectivamente, que cumplan la condición de pasar por P_o. Estas subvariedades de las subvariedades asociadas a V y al ortogonal de V que pasa por P_o, y, por lo tanto, perpendiculares, son también perpendiculares, entre sí, y, de una familia a la otra ; una subvariedad , empero , no es perpendicular consigo misma , lo cual sí acontecería en tres dimensiones , en el caso de que hubiera planos perpendiculares : la recta común , por pertenecer a los dos planos perpendiculares en un punto dado , sería perpendicular a sí misma , en dicho punto . Lo cual no tiene sentido según las definiciones y teoremas citados .

Las últimas consideraciones generales se concretan en el conocido teorema que se enuncia en seguida .

Teorema

Dada una subvariedad afín m-dimensional $((P), V)$ y un punto Q de $A(R^n)$, existe una única subvariedad de dimensión $n - m$ que pasa por Q y es perpendicular a la subvariedad dada .

En efecto , $\dim ((P), V) = \dim V = m$, y , $\dim V^o = n - m$. Ahora bien ; subvariedades asociadas a V y a V^o no pueden ser paralelas , por lo menos tienen un punto común , P_o . Dado que $V + V^o = R^n$, es P_o el único punto común .

Se dice que P_o es la proyección perpendicular de Q según la subvariedad $((Q), V^o)$ sobre la subvariedad

$((P), V)$.

Así , en tres dimensiones , por un punto exterior a un plano pasa una única recta perpendicular al plano .

En la variedad afín asociada a R^3 , referido a la base canónica , por el punto (1,1,1) , por ejemplo , pasa una única recta , de vector director (0,0,1) , perpendicular al plano que pasa por el origen , cuya dirección es dada por los vectores (1,1,0) y (0,1,0) .

V. LA PERPENDICULARIDAD EN ALGUNOS TEXTOS .

Ahora se trata de ojear algunos textos para averiguar cuál es su posición respecto a los planos perpendiculares en tres dimensiones .

En esta última parte del trabajo me veo obligado a emplear el lenguaje de los autores citados que no distingue ortogonalidad de perpendicularidad y que habla de planos perpendiculares en tres dimensiones ; de lo contrario habría tenido que hacer perífrasis con el consiguiente riesgo de traicionarlos . Por otra parte , no podía enfrascarme en este comentario bibliográfico antes de recordar los grandes rasgos de la exposición actual de la

	Dimensión de la variedad $A(R^n)$						Dimensión de subvariedad propia $((P_o),V)$	Número de ecuaciones de la subvariedad m-dimensional en $A(R^n)$.
	1	2	3	4	5	n		
Subvariedades		recta	recta	recta	recta	recta	1	n-1
			plano	plano	plano	plano	2	n-2
				subvariedad 3-dimensional	subvariedad 3-dimensional	subvariedad 3-dimensional	3	n-3
						....	.	.
						subvariedad m-dimensional	m	n-m
						....	.	.
						....	.	.
						subvariedad (n-2)-dimensional	n-2	2
						hiperplano	n-1	1

En este cuadro aparecen algunos datos concernientes a las subvariedades afines asociadas a subespacios vectoriales de R^n. Para una dimensión dada, n, una subvariedad puede ser perpendicular a otra, únicamente si la dimensión la coloca por encima de la línea punteada (---). Sólo así, un subespacio y su ortogonal (direcciones de las subvariedades) pueden tener la misma dimensión. En dos y tres dimensiones una recta puede ser perpendicular a una recta. En tres dimensiones un plano no puede ser perpendicular a un plano.

geometría que me parece digna de hacerse , porque habría tenido que entrometer nociones inoportunamente , con el peligro de crear confusión .

Grosso modo , los autores compulsados se los puede repartir de la manera que sigue .

V.1. En primer lugar , los que no tienen ningún escrúpulo , por no haber cuestionado la noción o por no haberse dado cuenta de que podría ser problemática ; son , sin duda , los más numerosos , aunque no se aliste a todos los autores sino que apenas se considere una muestra , que es lo que se hace aquí . Así pues , en los nombrados en seguida tiene carta de ciudadanía la perpendicularidad de planos en tres dimensiones .

JAMES Glenn, and, JAMES Robert. Mathematics Dictionary. 1959. Van Nostrand. Princeton. New Jersey.

GRUENBERG K.W., and, WEIR A.J. Linear Geometry. 2nd.edition . 1977. Springer Verlag. New York. 198 pp.

KARUSH William. The Crescent dictionary of mathematics. 1967. New York. The Macmillan Company .

KINDLE Joseph. Geometría analítica. Edición española. 1980. Cali. Carvajal. Compendios Schaum. 150 pp.

LESIEUR Léonce, et, JOULAIN Claude. Mathematiques P.C. Première année et Spéciales B. Tome I. Algèbre et géométrie. Troisième édition. 1968. Paris. Armand Colin. 496 pp.

MOISE - DOWNS. Geometry. 1964. Reading Massachusetts. Addison Wesley. 578 pp.

POGORELOV A.V. Geometría elemental. 1974. Moscú. Mir. 224 pp.

PUIG Adam,Pedro. Curso de geometría métrica. Tomo I. Fundamentos . 5a.edición. 1956. Madrid. 372 pp.

REUNION DE PROFESSEURS. Cours de géométrie. 1951. Paris. Livrairie générale. 516 pp.

REY Pastor, Julio - PUIG Adam,Pedro. Elementos de geometría. 1959. Madrid.

REY Pastor,Julio - SANTALO Luis - BALANZAT Manuel. Geometría analítica. 4a.edición. 1959. Buenos Aires. 535 pp.

REY Pastor,Julio - PI Calleja ,Pedro - TREJO César. Análisis matemático. Vol.II. 3a.edición. 1959. 624 pp.

RIVAUD Jacques. Exercises de géométrie. 1962. Paris. Vuibert. 284 pp.

SEVERI Francesco. Elementos de geometría. Tomo II. 3a.

edición. 1962. Labor. Barcelona. 373 pp.

Aunque parece querer acogerse a la terminología de Bourbaki citada un poco más adelante , en las páginas 149-150 habla de las propiedades de ortogonalidad de dos planos en dimensión tres , lo cual coloca en el primer grupo a

MARTIN Pierre. Applications de l'algèbre et de l'analyse a la géométrie. M.P. et Spéciales AA'. 1967. Paris. Armand Colin. 589 pp.

V.2. En un segundo grupo están dos textos franceses , excelentes ambos , que reconocen lo inapropiado de la noción en cuestión , pero , por una razón no expresada , continúan empleándola , incluso en la fraseología de un teorema , uno de ellos ; como puede leerse a continuación .

PICHAUD Joëlle, et, REVUZ André. Mathématique. Terminale C-E. Tomo 3. Géométrie. 1972. Paris. Fernand Nathan. 349 pp.

En la página 143 escriben la siguiente definición

Dos partes de un espacio vectorial euclidiano se dicen ortogonales si todo elemento de la una es ortogonal a todo elemento de la otra

perfectamente ortodoxa , como el teorema que enuncian , p. 144

Dados dos subespacios ortogonales de un espacio vectorial euclidiano , la suma de ellos es suma directa

Añaden , luego , este comentario

Resulta , en particular , que en un espacio vectorial euclidiano de dimensión 3 , una condición necesaria para que dos subespacios vectoriales sean ortogonales es que la suma de sus dimensiones sea inferior o igual a 3. Por tanto , dos planos vectoriales no pueden ser ortogonales . Diremos , sin embargo , en este caso , y es un abuso de lenguaje , que dos planos vectoriales son ortogonales cuando tienen suplementarios ortogonales .

Justificado , si así puede aceptarse , este modo de hablar , lo siguiente ya les parece lícito .

Ejercicio

Dados dos planos vectoriales P,P' de un espacio vectorial euclidiano de dimensión 3 , mostrar que las dos propiedades siguientes son equivalentes:

i) P y P' son ortogonales

ii) P' contiene una recta vectorial ortogonal a P.

Más adelante , p. 218 , se prolongan las consecuencias .

Como lo hicimos en el caso de los espacios vectoriales euclidianos de dimensión 3 , diremos que , en un espacio afín euclidiano de dimensión 3 , dos planos son ortogonales si sus direcciones son planos vectoriales ortogonales . De donde resulta que

Teorema

Dos planos de un espacio afín euclidiano de dimensión 3 son ortogonales si y solo si uno de ellos contiene una recta ortogonal al otro .

Debe ser esto el obrar conforme al espíritu de la tradición : imposible desprenderse de algo que se hace así desde tiempos .

Un poco menos inconsecuentemente procede nada menos que Condamine , autor recomendable por todo el resto de su libro , ya citado antes (II) , quien en la página 504 estampa lo que sigue .

Observación . No existen planos ortogonales , en el sentido definido , en el espacio afín euclidiano tridimensional . Existen , no obstante , parejas de planos notables tales que una recta del uno sea ortogonal al otro plano . Se les dice "ortogonales" .

(Lo cual explica numerosos errores :

Si dos planos son "ortogonales" , toda recta del uno no es ortogonal a toda recta del otro .

En particular , la recta intersección no es ortogonal a ella misma) .

Definición

Dos planos del espacio euclidiano tridimensional se dicen "ortogonales" (o perpendiculares) si una recta del uno es ortogonal al otro .

V.3. Un tercer grupo está formado por los siguientes tratadistas , quienes mensionan la perpendicularidad entre recta y plano , legítima , pero no la de plano con plano (aunque , en este punto , no esté muy seguro en cuanto a la intención de Choquet) seguramente por considerarla espuria .

CENTRE D'ETUDES MATHEMATIQUES en vue des applications . Formulaire des mathématiques a l'usage des physiciens et

des ingénieurs . Géométrie. 1962. Centre National de la Recherche Scientifique . Paris. 221 pp.

CHOQUET Gustave. L'enseignement de la géométrie. 1964. Paris. Hermann. 176 pp.

DIEUDONNE Jean. Algèbre linéaire et géométrie élémentaire. Troisieme édition. 1964. Paris. Hermann. 240 pp.

HOCHSCHILD G. A second introduction to analytic geometry. 1968. San Francisco. Holden Day. 63 pp.

V.4. Bourbaki. Forma grupo aparte , aunque está naturalmente en la misma tónica de los autores citados en V.3., uno de los cuales , Dieudonné , es miembro importantísimo del grupo Bourbaki . No se puede aseverar , pues , que todos los franceses sacrifiquen al tradicionalismo . La teoría atinente está en

BOURBAKI N. Eléments de mathématique . Algèbre . Chapitre 9. Formes sesquilinéaires et formes quadratiques . 1959. Hermann. Paris. 213 pp.

Lamento no saber si este capítulo ha sido publicado ya en la forma "provisionalmente definitiva" que Bourbaki está dando a la última edición de su fundamental tratado , y por tanto , si le ha hecho cambios significativos a este capítulo . Dado su grado de generalidad , el somero recuento de álgebra que se hizo en la parte 3 , sería insuficiente . Es preferible transcribir al caso particular de las formas hermitianas en la situación ortogonal real , lo que más interesa para esta averiguación .

Después de haber tratado en el parágrafo 3 (siempre en el capítulo citado más arriba) lo referente a la ortogonalidad , propone entre los ejercicios el siguiente , p. 63 .

Ejercicio 11.

Se dice que un subespacio vectorial U es debilmente ortogonal a un subespacio vectorial V si uno de los dos subespacios U , el ortogonal de V contiene al otro . Mostrar que

a) La relación " U es debilmente ortogonal a V " es simétrica .

b) Si U y V son debilmente ortogonales , el ortogonal de U y el ortogonal de V son también debilmente ortogonales .

c) Si U y V son debilmente ortogonales y si su intersección se reduce al vector nulo , entonces U y V son ortogonales .

En el número 6 del parágrafo 6 , da la definición que sigue

Dos subvariedades son ortogonales si sus direcciones son ortogonales .

Así , pues , Bourbaki emplea el mismo término para las subvariedades como para los subespacios direcciones de las subvariedades . Ya había apuntado que Dieudonné hace lo mismo , y que esto disuena del leitmotiv del presente artículo . Lamento no contar con la influencia del gran maestro en la propuesta de una separación sistemática entre los dos lenguajes , algebraico y geométrico ; pero , al fin y al cabo , el de Bourbaki es un profundo trabajo , no destinado a la iniciación de los profesionales , ni siquiera a libro de texto para cursos de especialización , aunque ese haya podido ser el designio en sus comienzos . Superó tales esperanzas , para convertirse luego en la exposición más sistemática y completa de más o menos la matemática conocida hasta mediados de este siglo . Quiero decir que el ejemplo de Bourbaki no invalida las razones de claridad en la exposición para la etapa formativa de los futuros matemáticos .

En seguida de la definición transcrita y comentada, aparece un resultado ya mencionado (al final de IV) el de que una subvariedad y la subvariedad perpendicular (que, desofortunadamente , Bourbaki y otros autores llaman ortogonal) correspondiente se encuentran en un único punto .

Al designar como ortogonales tanto a los subespacios vectoriales como a las subvariedades afines euclidianas , a Bourbaki le queda libre el término perpendicular. En el ejercicio 22 del parágrafo 6 (ver p.109) Bourbaki le da un uso que parece avenirse con el común en textos y diccionarios . Iría a sacrificar también el grupo francés de matemáticos en aras del tradicionalismo ? En realidad , Bourbaki no va a justificar las ancianas costumbres disponiendo la exposición de tal manera que en tres dimensiones coincida con la tradición escolar de que no pudieron desprenderse los profesores recordados en V.2. Para que se vea , transcribo al susodicho ejercicio .

Dos subvariedades son perpendiculares si sus direcciones son subespacios debilmente ortogonales .

Sean $A(U)$ y $A(V)$ dos subvariedades y $\dim(U+V) = m < n$. Mostrar que si R^n es suma directa de $(U+V)$ y de $(U+V)^o$, existe una subvariedad $A(W)$ de dimensión $n - m$, perpendicular a $A(U)$ y a $A(V)$, y que encuentra a cada una de las dos subvariedades en un solo punto.

La otra parte del ejercicio no aporta información al punto en litigio. La condición de que m sea estrictamente menor que n, impide para $n = 3$, que m sea más que 2; entonces se tienen subespacios propios de dimensión uno; si U y V son diferentes, son direcciones de dos rectas perpendiculares, y, hay una tercera recta perpendicular a cada una de ellas. Y ninguna venía al uso.

V.5. Epílogo

Semiperpendicularidad. Qué hacer para mantener el paralelismo deseado entre el lenguaje del álgebra y el de la geometría?

WOODS Frederick. Higher geometry. 1961 Dover republication. (First edition, 1922, Ginn and Company). 423 pp. en la parte cuarta "geometría de cuatro o más dimensiones",

p. 375, llama planos semiperpendiculares a dos planos tales que cada uno contiene una línea perpendicular al otro. Es el término que me parece indicado . Si se reúnen todas las líneas de uno de los planos que cumplen tal condición, es posible reencontrar la definición de Euclides , cuya noción de planos perpendiculares se podría entender entonces en el sentido de planos semiperpendiculares .

La sexta proposición de Woods , en el mismo sitio, dice :

Todas las líneas perpendiculares a un plano en un punto fijo están contenidas en un plano . Los dos planos son tales que cada línea de uno de ellos es perpendicular a cada una de las líneas del otro .

Este segundo enunciado es el obstaculizado por la definición 4 de Euclides ; es , empero , el que está en la vía de la generalización . Woods llama completamente perpendiculares a estos planos . Y añade

Obviamente ellos no existen en el espacio tridimensional ordinario .

Pienso que es inútil el empleo del adverbio completamente para modificar una noción de perpendicularidad que no admite ambiguedades . Para cada subvariedad hay una subvariedad perpendicular bien determinada . Hay luego subvariedades semiperpendiculares . En tres dimensiones hay la noción de recta perpendicular a una recta en un punto de ésta , recta perpendicular a un plano en un punto de éste , y , plano semiperpendicular a otro a lo largo de la línea de intersección de los dos . En tres dimensiones dos planos se cortan a lo largo de una recta o son paralelos : no hay más posibilidades en geometría afín euclidiana . La otra manera de decir de que se dispone es seguir a Euclides al pié de la letra y hablar de planos en ángulo recto . De todos modos que se reserve la expresión planos perpendiculares para cuando los haya de veras. Deprecación que se hace en honor a la claridad del pensamiento y , por ende , para la facilidad de la enseñanza .

Alberto CAMPOS

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional

Bogotá - Colombia .