Boletín de Matemáticas

Vol. XVI , No. 3 , (1982) pags, 187 - 214

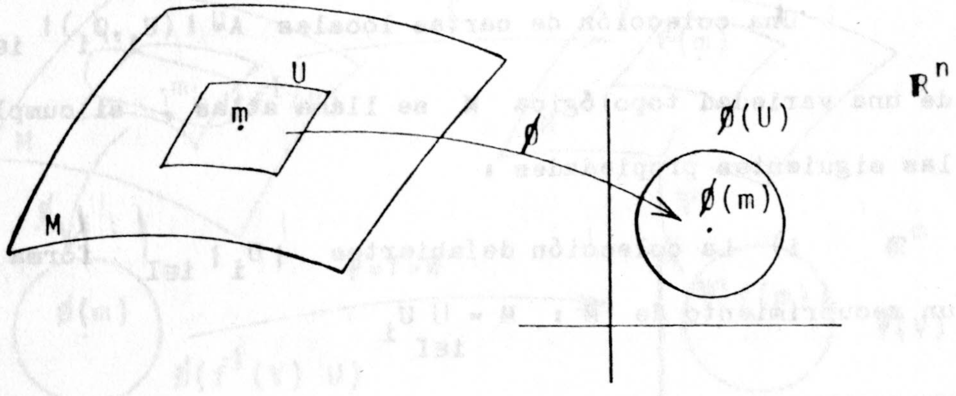
CORCHETE DE LIE DE DOS CAMPOS VECTORIALES Y SU INTERPRETACION GEOMETRICA

Gilma RODRIGUEZ DE VILLAMARIN

En el presente artículo se dan sucesivamente los conceptos necesarios para llegar a definir el Corchete de Lie de dos campos de vectores y obtener su interpretación geométrica.

VARIEDAD DIFERENCIABLE :

Una variedad topológica M, de dimensión n, es un espacio topológico de Hausdorff donde cada punto posee una vecindad abierta homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

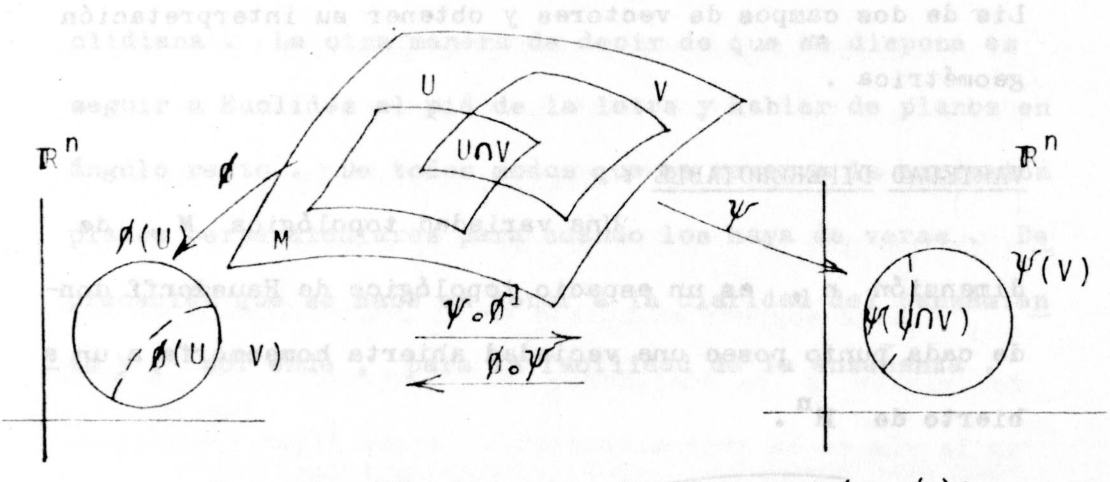


Para cada punto m de M , se llama carta local alrededor de m a la pareja (U,ϕ) donde U es la vecindad abierta de m y $\phi: U \rightarrow \phi(U)$ es el homeomorfismo local correspondiente .

Dos cartas locales (U,ϕ) y (V,ψ) alrededor de un punto m de M se dicen compatibles C^{∞}, si

$$\phi\circ\psi^{-1}: \psi(U\cap V) \rightarrow \phi(U\cap V), \quad y ,$$
$$\psi\circ\phi^{-1}: \phi(U\cap V) \rightarrow \psi(U\cap V)$$

son homeomorfismos de clase C^{∞}



Una colección de cartas locales $A = \{(U_i,\phi_i)\}_{i\in I}$ de una variedad topológica M se llama atlas , si cumple las siguientes propiedades :

i) La colección de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ forma un recubrimiento de M : $M = \bigcup_{i\in I} U_i$

ii) Dos cartas locales cualesquiera de A son compatibles C^∞.

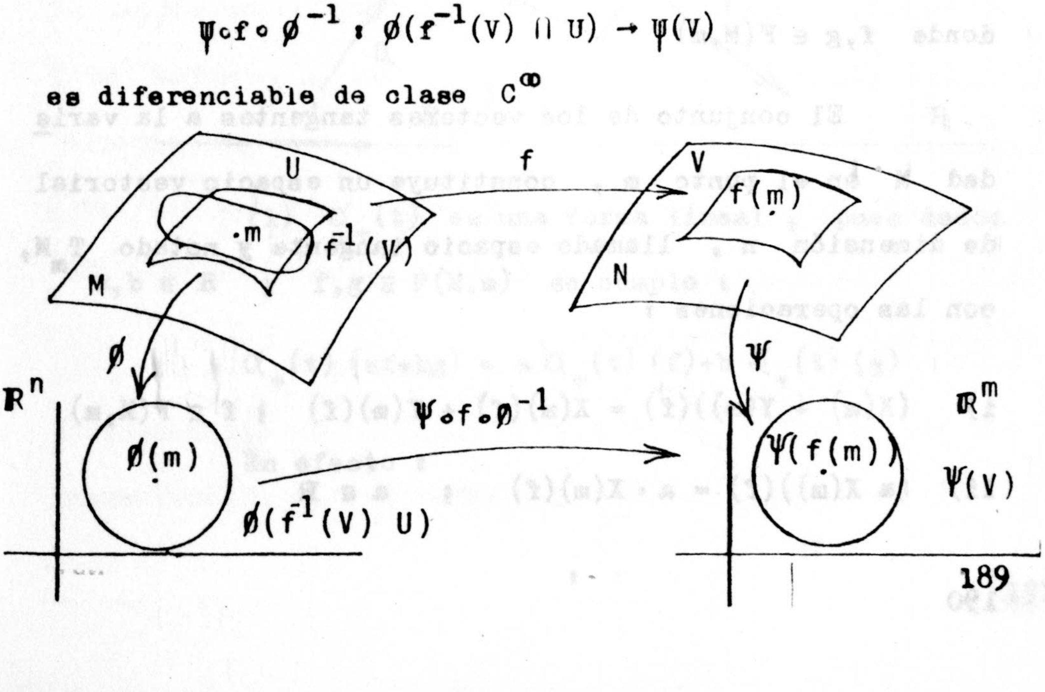
Un atlas A se dice maximal, si contiene a toda carta compatible con las del atlas.

La pareja (M,A) define una variedad diferenciable n dimensional de clase C^∞. La estructura diferenciable sobre M está dada por el atlas A, el cual se omite usualmente refiriéndose sólo a la variedad M.

Dadas (M,A) y (N,A') dos variedades diferenciables de dimensión n y m respectivamente, una aplicación continua $f: M \to N$ se dice diferenciable de clase C^∞ si para toda carta (U,ϕ) de A y (V,ψ) de A' con $f^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$, la aplicación

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(f^{-1}(V) \cap U) \to \psi(V)$$

es diferenciable de clase C^∞



Es decir , la diferenciabilidad de la aplicación f se tiene , si pasando localmente por las cartas , se tiene la diferenciabilidad de la aplicación $\Psi \circ f \circ \emptyset^{-1}$ entre los abiertos correspondientes de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.

ESPACIO TANGENTE :

Consideremos una variedad diferenciable M y un punto m de M . Se notará con $F(M,m)$ al conjunto de las funciones de valor real diferenciables C^{∞} en una vecindad del punto m .

Un vector tangente a M en el punto m , notado $X(m)$ es una forma lineal sobre el álgebra de las funciones $F(M,m)$ que satisface la siguiente condición :

$$X(m)(f \cdot g) = X(m)(f) \cdot g(m) + f(m) \cdot X(m)(g)$$

donde $f,g \in F(M,m)$

El conjunto de los vectores tangentes a la variedad M en el punto m , constituye un espacio vectorial de dimensión n , llamado espacio tangente y notado $T_m M$, con las operaciones :

i) $(X(m) + Y(m))(f) = X(m)(f) + Y(m)(f)$; $f \in F(M,m)$

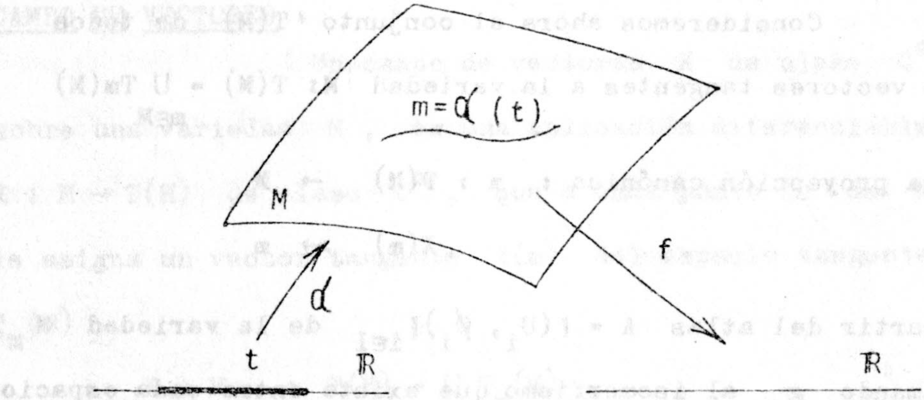
ii) $(a\, X(m))(f) = a \cdot X(m)(f)$; $a \in \mathbb{R}$

En lo que sigue se considerarán vectores tangentes determinados por curvas en la variedad M.

Una curva α en una variedad M es una aplicación diferenciable C^{∞} de un intervalo real en M.

Una curva α determina una forma lineal $\alpha_*(t)$ que como se verá es un vector tangente a M en el punto $m = \alpha(t)$ definida por:

$$\alpha_*(t) : F(M,m) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \alpha_*(t)(f) = (f \circ \alpha)'(t)$$



(1) $\alpha_*(t)$ es una forma lineal, pues dados $a,b \in \mathbb{R}$ y $f,g \in F(M,m)$ se cumple:

$$\alpha_*(t)(af+bg) = a\,\alpha_*(t)(f)+b\,\alpha_*(t)(g)$$

En efecto:

$$\alpha_*(t)(af+bg) = ((af+bg)\circ\alpha)'(t)$$
$$= a(f\circ\alpha)'(t) + b(g\circ\alpha)'(t)$$
$$= a\cdot\alpha_*(t)(f) + b\cdot\alpha_*(t)(g)$$

(2) $\alpha_*(t)$ es un vector tangente pues dados $f,g \in F(M,m)$ se cumple :

$$\alpha_*(t)(f\cdot g) = ((f\cdot g)\circ\alpha)'(t)$$
$$= ((f\circ\alpha)\cdot(g\circ\alpha))'(t)$$
$$= (f\circ\alpha)'(t)\cdot(g\circ\alpha)(t) + (f\circ\alpha)(t)\cdot(g\circ\alpha)'(t)$$
$$= \alpha_*(t)(f)\cdot g(m) + f(m)\,\alpha_*(t)(g)$$

Consideremos ahora el conjunto $T(M)$ de todos los vectores tangentes a la variedad M: $T(M) = \bigcup_{m\in M} T_m(M)$

y la proyección canónica : $\pi : T(M) \to M$

$$X(m) \mapsto m$$

A partir del atlas $A = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ de la variedad M y llamando g_m al isomorfismo que existe entre cada espacio vectorial n-dimensional $T_m(M)$ y R^n, se puede definir una topología y una estructura diferenciable en $T(M)$. Se consideran las biyecciones :

$$\delta_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times R^n$$
$$X(m) \mapsto (m, g_m(X(m)))$$

y se toman como abiertos para la topología de $T(M)$ a las reuniones de imágenes recíprocas de abiertos de $U_i \times \mathbb{R}^n$.
Cada carta local $(U_i, \emptyset_i)$ de M induce una carta local $(\pi^{-1}(U_i), \rho_i)$ de $T(M)$ donde ρ_i es el homeomorfismo :

$$\begin{aligned} \rho_i : \pi^{-1}(U_i) &\rightarrow \emptyset_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \\ X(m) &\rightarrowtail (\emptyset_i(m), g_m(X(m))) \end{aligned}$$

Se obtiene el atlas $A' = \{(\pi^{-1}(U_i), \rho_i)\}_{i \in I}$ con el cual $T(M)$ es una variedad diferenciable $2n$ dimensional de clase C^∞.

CAMPO DE VECTORES :

Un campo de vectores X de clase C^∞ sobre una variedad M, es una aplicación diferenciable $X : M \rightarrow T(M)$ de clase C^∞, que a cada punto m de M le asigna un vector tangente $X(m)$ del espacio tangente $T_m(M)$

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow T(M) = \bigcup_{m \in M} T_m(M) \\ m &\rightarrowtail X(m) : F(M,m) \rightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad f \rightarrowtail X(m)(f) = (Xf)(m) \end{aligned}$$

Luego si X es un campo de vectores, para toda función diferenciable $f \in F(M,m)$ de clase C^∞ se determina una nueva función diferenciable $Xf \in F(M,m)$ de clase C^∞

definida naturalmente por : $(Xf)(m) = X(m)(f)$ y que satisface las condiciones :

(1) $X(af+bg) = a\,X(f) + b\,X(g)$; $a,b \in \mathbb{R}$

(2) $X(f\cdot g) = f\,Xg + g\,Xf$

De esta manera se puede reconocer un campo de vectores por su acción sobre los elementos de $F(M,m)$. Por cumplir las propiedades (1) y (2) se dice que X es una derivación del algebra $F(M,m)$.

Los siguientes hechos serán usados posteriormente .

Dada α una curva diferenciable C^{∞} en la variedad M , es decir , una aplicación C^{∞} de un intervalo real I en la variedad M , si $0 \in I$, y $\alpha(0) = m$, se puede demostrar :

(a) Si $\alpha_*(0) = 0$, es decir si el vector tangente a M en el punto $m = \alpha(0)$ es el vector nulo , entonces la siguiente función $L(m)$ define un vector tangente a la variedad M en el punto $m = \alpha(0)$:

$$L(m) : F(M,m) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto L(m)(f) = (f\circ\alpha)''(0)$$

Basta verificar que la función $L(m)$ es una derivación del álgebra $F(M,m)$

(1) $L(m)(af + bg) = a\,L(m)(f) + b\,L(m)(g)$; $a,b \in \mathbb{R}$

(2) $L(m)(f\cdot g) = L(m)(f)\cdot g(m) + f(m)\cdot L(m)(g)$

Se mostrará (2) y se deja al lector verificar (1) .

Verificar (2) es equivalente a verificar la identidad :

$$((f\cdot g)\circ\alpha(\ ))''(0) = (f\circ\alpha(\ ))''(0)\cdot g(m) + f(m)\cdot(g\circ\alpha(\ ))''(0)$$

En efecto : $((f\cdot g)\circ\alpha(\ ))''(t) = [((f\cdot g)\circ\alpha(\ ))'(t)]'$

$= [\alpha_*(t)(f\cdot g)]'$

$\downarrow$ (2)

$= [(f\circ\alpha(\ ))'(t)\cdot(g\circ\alpha(\ ))(t) + (f\circ\alpha(\ ))(t)\cdot(g\circ\alpha(\ ))'(t)]'$

$= [(f\circ\alpha(\ ))'(t)\cdot(g\circ\alpha(\ ))(t)]' + [(f\circ\alpha(\ ))(t)\cdot(g\circ\alpha(\ ))'(t)]'$

$= (f\circ\alpha(\ ))''(t)\cdot(g\circ\alpha(\ ))(t) + (f\circ\alpha(\ ))'(t)\cdot(g\circ\alpha(\ ))'(t) +$

$+ (f\circ\alpha(\ ))'(t)\cdot(g\circ\alpha(\ ))'(t) + (f\circ\alpha(\ ))(t)\cdot(g\circ\alpha(\ ))''(t)$

$= [\alpha_*(t)(f)]'\cdot g(\alpha(t)) + 2\,\alpha_*(t)(f)\cdot(g\circ\alpha(\ ))'(t) +$

$+ f(\alpha(t))\cdot[\alpha_*(t)(g)]'$

Para $t = 0$, se tiene $\alpha(0) = m$, y , $\alpha_*(0) = 0$, y entonces :

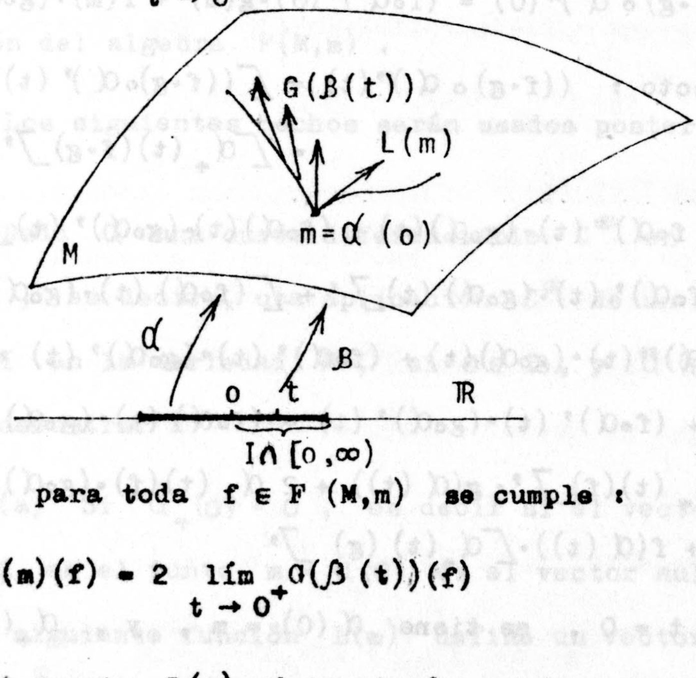
$$[\alpha_*(0)(f\cdot g)]' = [\alpha_*(0)(f)]'g(m) + f(m)\cdot[\alpha_*(0)(g)]'$$

la cual es equivalente a la identidad propuesta .

(b) Consideremos la curva β definida para números positivos del intervalo I por : $\beta(t^2) = \alpha(t)$.

Si $G(\beta(t))$ es el vector tangente determinado por la curva β en el punto $\beta(t)$, el vector tangente $L(m)$ definido en la parte (a) por la curva α en el punto $m = \alpha(0)$ cumple la relación :

$$L(m) = 2 \lim_{t \to 0^+} G(\beta(t))$$



Es decir , para toda $f \in F(M,m)$ se cumple :

$$L(m)(f) = 2 \lim_{t \to 0^+} G(\beta(t))(f)$$

El vector tangente $L(m)$ determinado por la curva α en el punto $m = \alpha(0)$ está dado por :

$$L(m)(f) = (f \circ \alpha)''(0) \quad ; \quad f \in F(M,m)$$

Por otra parte el vector tangente $G(\beta(t))$ determinado

Basta verificar que la función $L(m)$ es una derivación del álgebra $F(M,m)$

(1) $L(m)(af + bg) = a\,L(m)(f) + b\,L(m)(g)$; $a,b \in \mathbb{R}$

(2) $L(m)(f\cdot g) = L(m)(f)\cdot g(m) + f(m)\cdot L(m)(g)$

Se mostrará (2) y se deja al lector verificar (1) .

Verificar (2) es equivalente a verificar la identidad :

$$((f\cdot g)\circ \alpha)''(0) = (f\circ\alpha)''(0)\cdot g(m) + f(m)\cdot(g\circ\alpha)''(0)$$

En efecto : $((f\cdot g)\circ\alpha)''(t) = [((f\cdot g)\circ\alpha)'(t)]'$

$= [\alpha_*(t)(f\cdot g)]'$

$\downarrow$ (2)

$= [(f\circ\alpha)'(t)\cdot(g\circ\alpha)(t) + (f\circ\alpha)(t)\cdot(g\circ\alpha)'(t)]'$

$= [(f\circ\alpha)'(t)\cdot(g\circ\alpha)(t)]' + [(f\circ\alpha)(t)\cdot(g\circ\alpha)'(t)]'$

$= (f\circ\alpha)''(t)\cdot(g\circ\alpha)(t) + (f\circ\alpha)'(t)\cdot(g\circ\alpha)'(t) +$

$+ (f\circ\alpha)'(t)\cdot(g\circ\alpha)'(t) + (f\circ\alpha)(t)\cdot(g\circ\alpha)''(t)$

$= [\alpha_*(t)(f)]'\cdot g(\alpha(t)) + 2\,\alpha_*(t)(f)\cdot(g\circ\alpha)'(t) +$

$+ f(\alpha(t))\cdot[\alpha_*(t)(g)]'$

Para $t = 0$, se tiene $\alpha(0) = m$, y , $\alpha_*(0) = 0$, y entonces :

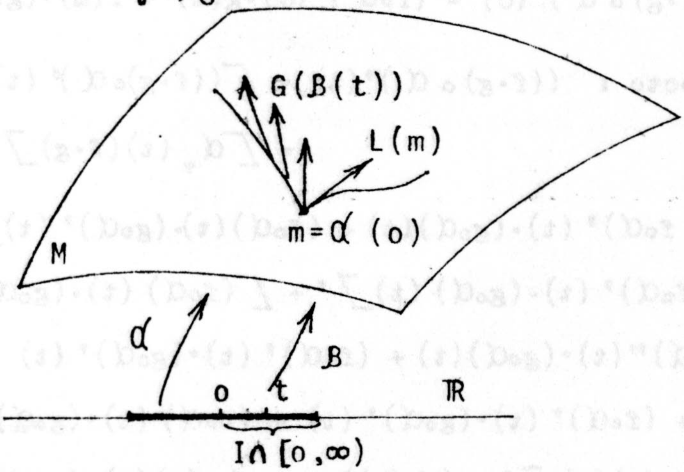
$$[\alpha_*(0)(f\cdot g)]' = [\alpha_*(0)(f)]'g(m) + f(m)\cdot[\alpha_*(0)(g)]'$$

la cual es equivalente a la identidad propuesta .

(b) Consideremos la curva β definida para números positivos del intervalo I por : $\beta(t^2) = \alpha(t)$.

Si $G(\beta(t))$ es el vector tangente determinado por la curva β en el punto $\beta(t)$, el vector tangente L(m) definido en la parte (a) por la curva α en el punto $m = \alpha(0)$ cumple la relación :

$$L(m) = 2 \lim_{t \to 0^+} G(\beta(t))$$



Es decir , para toda $f \in F(M,m)$ se cumple :

$$L(m)(f) = 2 \lim_{t \to 0^+} G(\beta(t))(f)$$

El vector tangente L(m) determinado por la curva α en el punto $m = \alpha(0)$ está dado por :

$$L(m)(f) = (f \circ \alpha)''(0) \quad ; \quad f \in F(M,m)$$

Por otra parte el vector tangente $G(\beta(t))$ determinado por la curva β en el punto $\beta(t)$ está dado por :

$$G(\beta(t))(f) = (f\circ\beta)'(t) = \beta_*(t)(f) \quad ; \quad f \in F(M,m)$$

Se desea demostrar entonces que :

$$(f\circ\alpha(\ ))''(0) = 2 \cdot \lim_{t \to 0^+} (f\circ\beta)'(t)$$

lo cual se deduce fácilmente del hecho de que $\alpha = \beta \circ \phi$

donde :

$$\phi : I \to I \cap [0, +\infty)$$

$$t \mapsto \phi(t) = t^2$$

y por lo tanto $\phi'(t) = 2t$; $\phi''(t) = 2$, $\phi'(0) = 0$, $\phi''(0) = 2$

En efecto :

$$(f\circ\alpha(\ ))''(t) = [((f\circ\beta)\circ\phi)'(t)]'$$

$$= [(f\circ\beta)'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)]'$$

$$= (f\circ\beta)''(\phi(t)) \cdot \phi'(t) + (f\circ\beta)'(\phi(t)) \cdot \phi''(t)$$

Tomando límite cuando $t \to 0^+$

$$(f\circ\alpha(\ ))''(0) = 2 \cdot \lim_{t \to 0^+} (f\circ\beta)'(t)$$

CURVAS INTEGRALES :

Si X es un campo de vectores C^∞ sobre una variedad M, una curva integral α que parte de m en M, es una curva en M, definida sobre un intervalo real I que contiene al cero, tal que:

i) $\alpha(0) = m$

ii) $\alpha_*(t) = X(\alpha(t))$, para todo $t \in I$

La existencia y unicidad de curvas integrales en intervalos comunes de definición, es consecuencia de los correspondientes teoremas sobre soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en $\mathbb{R}^n$. Basta tomar en cada punto de la variedad M, la carta local correspondiente y reducirse al caso de un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Se enuncia sin demostrar el teorema correspondiente:

TEOREMA :

Dado X un campo de vectores C^∞ sobre una variedad M, para todo punto x de M, existe una variedad abierta U de x, un número positivo ε y una única aplicación ϕ diferenciable C^∞:

$$\phi : (-\varepsilon,\varepsilon) \times U \to M$$

$$(t,m) \mapsto \phi(t,m)$$

tal que:

(i) Para todo real t fijo del intervalo $(-\varepsilon,\varepsilon)$, ϕ_t

es un difeomorfismo de U sobre su imagen $\phi_t(U)$:

$$\phi_t : U \to \phi_t(U)$$

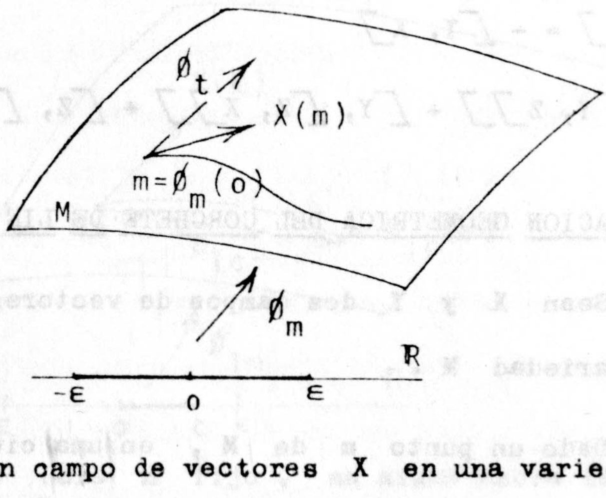
$$m \rightarrowtail \phi_t(m) = \phi(t,m)$$

(ii) Para todo punto m fijo de U, ϕ_m es una curva en M tal que :

i) $\phi_m(0) = m$

ii) $X(m) = X(\phi_m(0))$ es el vector tangente determinado por la curva ϕ_m en el punto m.

(iii) Para reales s y t, tales que $s + t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, y para los cuales $\phi_s(x)$, $\phi_t(x)$ están en U, si $x \in U$, se cumple : $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$



Es decir a un campo de vectores X en una variedad M, se encuentra asociado un grupo local de difeomorfismos a un parámetro : $\{\phi_t\}_{t \in (-\varepsilon,\varepsilon)}$ determinado por la aplicación diferenciable C^{∞} : $\phi : (-\varepsilon,\varepsilon) \times U \to M$, la cual es llamada germen del grupo .

CORCHETE DE LIE ENTRE DOS CAMPOS DE VECTORES :

Dados dos campos de vectores X y Y de clase C^{∞} sobre una variedad M , es posible definir un nuevo campo de vectores $[X, Y]$ llamado el Corchete de Lie entre X y Y de la manera siguiente :

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf) \quad ; \quad f \in F(M,m)$$

El Corchete de Lie es una derivación que además satisface las siguientes propiedades , lo cual es fácilmente comprobable :

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL CORCHETE DE LIE :

Sean X y Y dos campos de vectores C^{∞} sobre una variedad M .

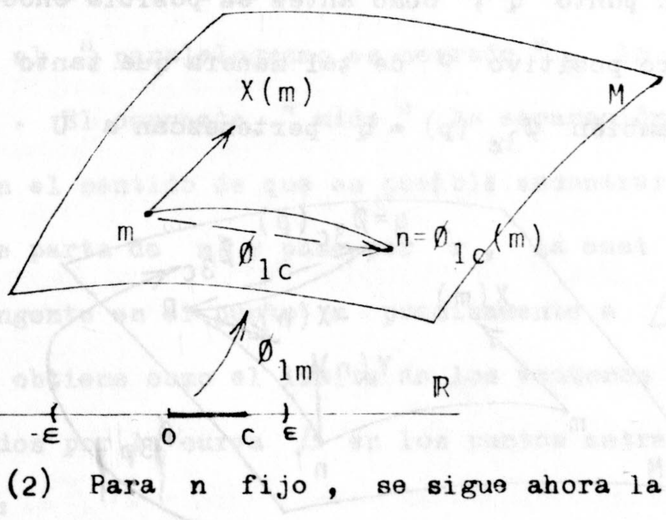
Dado un punto m de M , en una cierta vecindad U de m los campos de vectores : X, Y, - X, - Y, definen cada uno de acuerdo al teorema enunciado anteriormente , un germen de un grupo de difeomorfismos a un parámetro notados respectivamente $\emptyset_1, \emptyset_2, \emptyset_3, \emptyset_4$:

$$\emptyset_i : (-\epsilon,\epsilon) \times U \to M \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$(t, x) \mapsto \emptyset_i(t\, x)$$

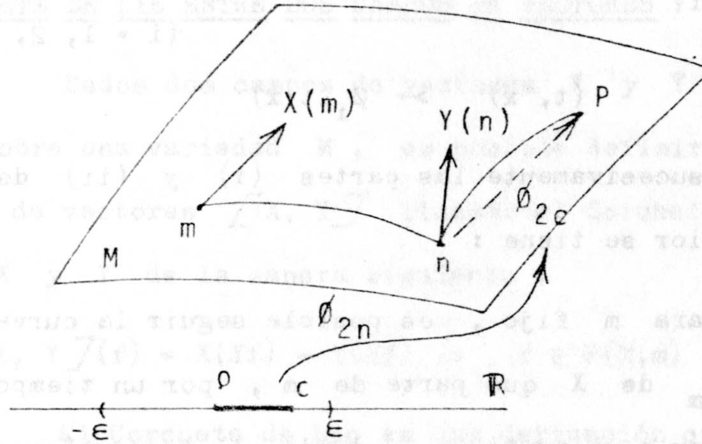
aplicando sucesivamente las partes (i) y (ii) del teorema anterior se tiene :

(1) Para m fijo , es posible seguir la curva integral $\emptyset_{1m}$ de X que parte de m , por un tiempo c , hasta llegar a un punto n , donde c es un número positivo suficientemente pequeño para que $\emptyset_{1c}(m) = n$ pertenezca a la vecindad U .

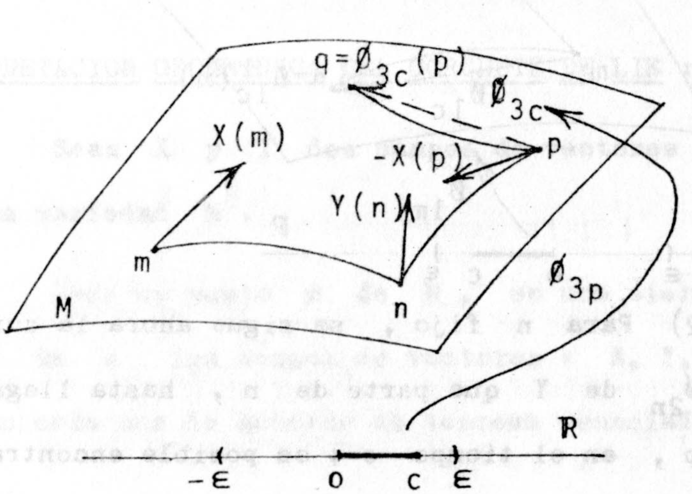


(2) Para n fijo , se sigue ahora la curva integral $\emptyset_{2n}$ de Y que parte de n , hasta llegar a un punto p , en el tiempo c ; es posible encontrar el

mismo número positivo c , de tal manera que tanto $n = \phi_{1c}(m)$ como $\phi_{2c}(n) = p$ pertenezcan ambos a la vecindad U .

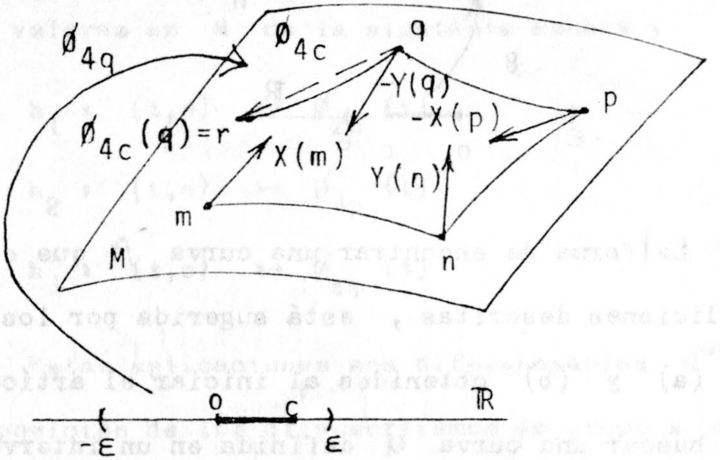


(3) Para p fijo , se sigue la curva integral ϕ_{3p} de $-X$ que parte de p , por el tiempo c hasta llegar a un punto q ; como antes es posible encontrar el mismo número positivo c de tal manera que tanto n , como p y también $\phi_{3c}(p) = q$ pertenezcan a U



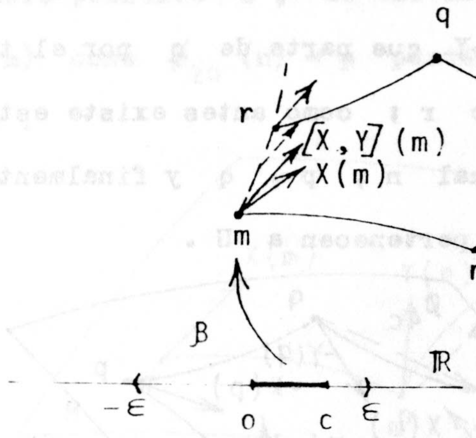
(4) Finalmente para q fijo, se sigue la curva integral ϕ_{4q} de $-Y$ que parte de q por el tiempo c hasta llegar a un punto r ; como antes existe este número positivo c para el cual n, p, q y finalmente

$\phi_{4c}(q) = r$ pertenecen a U.



Podría pensarse que el punto r coincide con el punto m, o sea que el " paralelogramo es cerrado ", lo cual no es cierto. El corchete " mide " la separación entre r y m, en el sentido de que es posible encontrar una curva β que parta de m y pase por r, la cual tenga por vector tangente en el punto m precisamente a $[X, Y](m)$ y éste se obtiene como el límite de los vectores tangentes determinados por la curva β en los puntos entre r y m Es decir:

$$[X, Y](m) = \lim_{t \to 0^+} \beta_*(t)$$



La forma de encontrar una curva β que cumpla las condiciones descritas , está sugerida por los resultados (a) y (b) obtenidos al iniciar el artículo . Se debe buscar una curva α definida en un intervalo I que contenga al cero tal que $\alpha(0) = m$, $\alpha_*(0) = 0$ y con vector tangente $L(m)$ en el punto m definido por $L(m)(f) = (f\circ\alpha)''(0)$ para $f \in F(M,m)$. Entonces se puede definir la curva β por $\beta(t^2) = \alpha(t)$ con vector tangente $G(\beta(t))$ en el punto $\beta(t)$ para la cual se tiene :

$$L(m) = 2 \cdot \lim_{t \to 0^+} G(\beta(t))$$

Si entonces se cumple que $(f\circ\alpha)''(0) = 2\cdot [X, Y](m)(f)$ para $f \in F(M,m)$ se tendría el resultado deseado , o sea:

$$[X, Y](m) = \lim_{t \to 0^+} \alpha(\beta(t))$$

El proceso siguiente está pues orientado a buscar la curva α anteriormente descrita . Para éllo se definen las funciones h_1, h_2, h_3 sobre una vecindad de $(0,0)$ en $\mathbb{R}^2$ con valores en M de la siguiente manera :

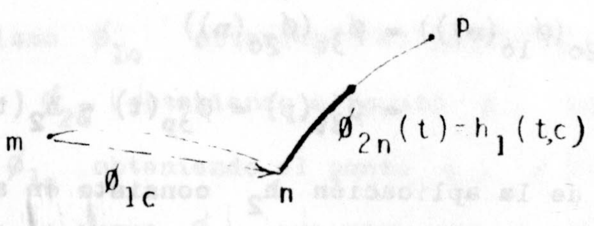
$$h_1 : (t,c) \mapsto \emptyset_{2n}(t)$$

$$h_2 : (t,c) \mapsto \emptyset_{3p}(t)$$

$$h_3 : (t,c) \mapsto \emptyset_{4q}(t)$$

Estas aplicaciones son diferenciables C^{∞} pues son composición de los difeomorfismos de grupo a un paráme tro y las curvas de los campos de vectores X, Y, – X, – Y.

(1) $h_1(t,c) = \emptyset_{2t}(\emptyset_{1c}(m))$



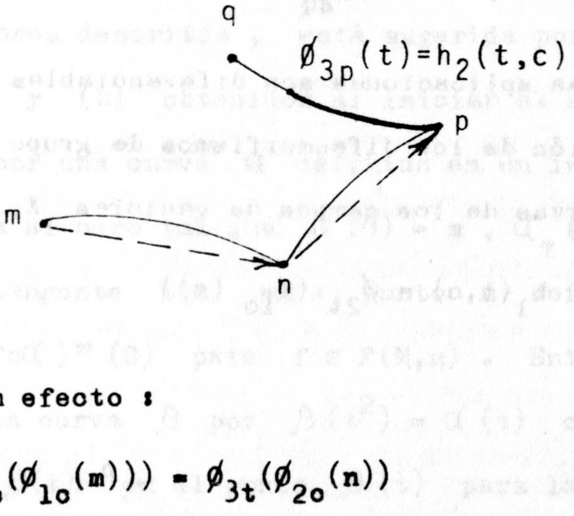
En efecto :

$$\phi_{2t}(\phi_{1c}(m)) = \phi_{2t}(n)$$

$$= \phi_{2n}(T) = h_1(t,c)$$

La acción de la aplicación h_1 consiste en aplicar a m el difeomorfismo ϕ_{1c} obteniendo el punto n ; de allí avanza por la curva ϕ_{2n} que pasa por n hasta el punto $\phi_{2n}(t) = h_1(t,c)$

$$(2) \quad h_2(t,c) = \phi_{3t}(\phi_{2c}(\phi_{1c}(m)))$$



En efecto :

$$\phi_{3t}(\phi_{2c}(\phi_{1c}(m))) = \phi_{3t}(\phi_{2c}(n))$$

$$= \phi_{3t}(p) = \phi_{3p}(t) = h_2(t,c)$$

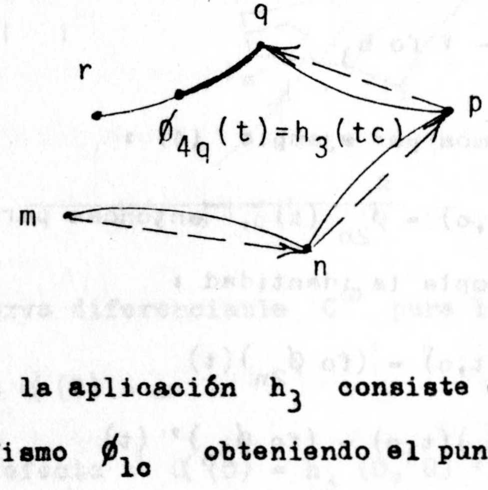
La acción de la aplicación h_2 consiste en aplicar a m , el difeomorfismo ϕ_{1c} obteniendo el punto n y luego el difeomorfismo ϕ_{2c} obteniendo el punto p ; de allí , se avanza por la curva ϕ_{3p} que pasa por p hasta el punto

$\phi_{3p}(t) = h_2(t,c)$.

(3) $h_3(t,c) = \phi_{4t}(\phi_{3c}(\phi_{2c}(\phi_{1c}(m))))$

En efecto :

$$\begin{aligned}\phi_{4t}(\phi_{3c}(\phi_{2c}(\phi_{1c}(m)))) &= \\ &= \phi_{4t}(\phi_{3c}(\phi_{2c}(n))) \\ &= \phi_{4t}(\phi_{3c}(p)) \\ &= \phi_{4t}(q) = \phi_{4q}(t) = h_3(t,c)\end{aligned}$$



La acción de la aplicación h_3 consiste en aplicar a m, el difeomorfismo ϕ_{1c} obteniendo el punto n, luego el difeomorfismo ϕ_{2c} obteniendo el punto p, luego el difeomorfismo ϕ_{3c} obteniendo el punto q, y finalmente se avanza por la curva ϕ_{4q} que pasa por q hasta obtener el punto $\phi_{4q}(t) = h_3(t,c)$

Los siguientes hechos son inmediatos y serán usados posteriormente :

(1) $h_3(0,t) = h_2(t,t) \qquad (0 \leq t \leq c)$

(2) $h_2(0,t) = h_1(t,t) \qquad (0 \leq t \leq c)$

Demostremos por ejemplo (2) :

$$h_2(0,t) = \phi_{30}(\phi_{2t}(\phi_{1t}(m))) = \phi_{2t}(\phi_{1t}(m)) = h_1(t,t)$$

(3) $D_2(f \circ h_1)(0,t) = Xf(h_1(0,t))$

(4) $D_1(f \circ h_1) = Y f \circ h_1$

(5) $D_1(f \circ h_2) = - X f \circ h_2$

(6) $D_1(f \circ h_3) = - Y f \circ h_3$

Demostremos por ejemplo (4) :

Puesto que $h_1(t,c) = \phi_{2n}(t)$, entonces para todo $f \in \mathcal{F}(M,m)$ se cumple la identidad :

$$(f \circ h_1)(t,c) = (f \circ \phi_{2n})(t)$$

Luego : $D_1(f \circ h_1)(t,c) = (f \circ \phi_{2n})'(t)$

$$= (Yf)(\phi_{2n}(t))$$

$$= (Yf)(h_1(t,c))$$

$$= (Yf \circ h_1)(t,c)$$

con lo cual $D_1(f \circ h_1) = Yf \circ h_1$

Se puede ahora definir la curva α , como sigue:

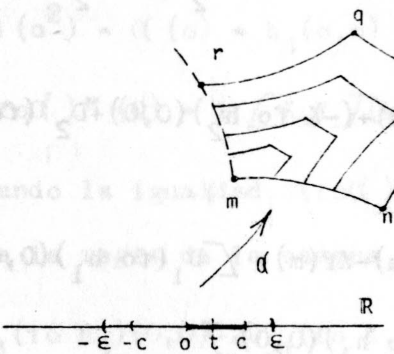
$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

$$t \mapsto \alpha(t) = h_3(t,t)$$

Es decir :

$$\alpha(t) = h_3(t,t)$$

$$= \phi_{4t}(\phi_{3t}(\phi_{2t}(\phi_{1t}(m))))$$



α es una curva diferenciable C^{∞} para la cual se cumple :

i) $\alpha(0) = m$

En efecto : $\alpha(0) = h_3(0, 0)$

$$= \phi_{40}(\phi_{30}(\phi_{20}\,\phi_{10}(m))) = m$$

ii) $\alpha_*(0) = 0$

En efecto , para todo $f \in F(M,m)$ veamos que :

$$\alpha_*(0)(f) = (f\circ\alpha)'(0) = 0$$

Aplicando la igualdad $\alpha(t) = h_3(t,t)$ y sucesivamente la regla de la cadena se obtiene :

$$(f\circ\alpha)'(0) = D_1(f\circ h_3)(0,0) + D_2(f\circ h_3)(0,0)$$

$$\downarrow (6)$$

$$= (-Y f\circ h_3)(0,0) + D_2(f\circ h_3)(0,0)$$

$$\downarrow (1)$$

$$= (-Y f\circ h_3)(0,0) + [D_1(f\circ h_2)(0,0) + D_2(f\circ h_2)(0,0)]$$

$$\downarrow (5)$$

$$= -Yf(m) + (-X f\circ h_2)(0,0) + D_2(f\circ h_2)(0,0)$$

$$\downarrow (2)$$

$$= -Yf(m) - Xf(m) + [D_1(f\circ h_1)(0,0) + D_2(f\circ h_1)(0,0)]$$

$$(4) \text{ y } (3)$$

$$\downarrow$$

$$= -Yf(m) - Xf(m) + Yf(m) + Xf(m) = 0$$

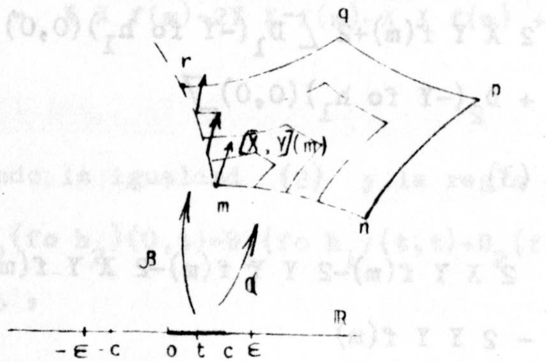
Finalmente se define la curva β por :

$$\beta(t^2) = \alpha(t) \quad \text{para} \quad t \in [0, c],$$ para la cual se cumple :

i) $\beta(0) = m$

En efecto : $\beta(0) = \alpha(0) = m$

ii) $\beta(c^2) = r$



En efecto : $\beta(c^2) = \alpha(c) = h_3(c,c) = \phi_{4c}(q) = r$

iii) $(f\circ\alpha)''(0) = 2\,[X,Y](m)f$

Aplicando la igualdad $(f\circ\alpha)(t) = (f\circ h_3)(t,t)$

y sucesivamente la regla de la cadena se obtiene :

$$(f\circ\alpha)''(0) = \underbrace{D_{11}(f\circ h_3)(0,0)}_{(A)} + \underbrace{2D_{21}(f\circ h_3)(0,0)}_{(B)} + \underbrace{D_{22}(f\circ h_3)(0,0)}_{(C)}$$

$\downarrow(6)$ $\quad\quad$ $\downarrow(6)$

(A) $\quad D_{11}(f\circ h_3)(0,0) = D_1(-Y\, f\circ h_3)(0,0) = YYf(m)$

$\downarrow(6)$

(B) $\quad 2D_{21}(f\circ h_3)(0,0) = 2D_2(-Y\, f\circ h_3)(0,0)$

$\downarrow(1)$

$$= 2\,[D_1(-Y\, f\circ h_2)(0,0) + D_2(-Y\, f\circ h_2)(0,0)]$$

(5) y (2)

$$\downarrow$$

$$= 2\,X\,Y\,f(m) + 2\,[\,D_1(-Y \text{ fo } h_1)(0,0) + D_2(-Y \text{ fo } h_1)(0,0)\,]$$

(4) y (3)

$$\downarrow$$

$$= 2\,X\,Y\,f(m) - 2\,Y\,Y\,f(m) - 2\,X\,Y\,f(m)$$

$$= -\,2\,Y\,Y\,f(m)$$

(C) Aplicando la igualdad (1) y la regla de la cadena se obtiene :

$$D_2(\text{fo } h_3)(0,t) = D_1(\text{fo } h_2)(t,t) + D_2(\text{fo } h_2)(t,t)$$

y por lo tanto :

$$D_{22}(\text{fo } h_3)(0,0) = D_{11}(\text{fo } h_2)(0,0) + 2D_{21}(\text{fo } h_2)(0,0) + D_{22}(\text{fo } h_2)(0,0)$$

$$\downarrow (5)$$

$$= D_1\,[\,(-X \text{ fo } h_2)(0,0)\,] + 2\,D_2\,[\,(-X \text{ fo } h_2)(0,0)\,] + D_{22}(\text{fo } h_2)(0,0)$$

(4) y (2)

$$\downarrow$$

$$= X\,X\,f(m) + 2\,[\,D_1(-X \text{ fo } h_1)(0,0) + D_2(-X \text{ fo } h_1)(0,0)\,] + D_{22}(\text{fo } h_2)(0,0)$$

(4) y (3)

$$\downarrow$$

$$= X\,X\,f(m) - 2Y\,X\,f(m) - X\,X\,f(m) + D_{22}(f\circ h_2)(0,0) \quad (D)$$

(D) Aplicando la igualdad (2) y la regla de la cadena se obtiene : $D_2(f\circ h_2)(0,t) = D_1(f\circ h_1)(t,t) + D_2(f\circ h_1)(t,t)$ y por lo tanto :

$$D_{22}(f\circ h_2)(0,0) = D_{11}(f\circ h_1)(0,0) + 2\,D_{21}(f\circ h_1)(0,0) + D_{22}(f\circ h_1)(0,0)$$

$$= Y\,Y\,f(m) + 2\,X\,Y\,f(m) + X\,X\,f(m)$$

(C) Así que :

$$D_{22}(f\circ h_3)(0,0) = Y\,Y\,f(m) - 2\,Y\,X\,f(m) + 2\,X\,Y\,f(m)$$

Y finalmente :

$$(f\circ \alpha)''(0) = 2\,(X\,Y\,f(m) - 2\,Y\,X\,f(m))$$
$$= 2\,[X, Y](m)f$$

BIBLIOGRAFIA

(1) Pham Mau Quan, Introduction à la géométrie des variétés différentiables. Monographies Universitaires de Mathématiques, Dunod, París, 1969.

(2) Richard L. Bishop, Richard J. Crittendeu, Geometry of Manifolds, Academic Press, New York and London 1964.

(3) Michael Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume I, Publish or Perish, Boston, 1970.

Gilma RODRIGUEZ de VILLAMARIN

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional

Bogotá - Colombia .