Boletín de Matemáticas
Vol. XVIII, N° 1,2,3, (1984) ***APORTES***

ESTRUCTURAS TOPOLOGICAS DE $\mathbb{R}^*$

Yu Takeuchi

§0. INTRODUCCION.

Sea $\mathcal{F}_r^*$ un ultrafiltro regular en $\mathbb{N}$ (ó un ultrafiltro de Frechet); por medio de $\mathcal{F}_r^*$ se introduce el concepto de "*casi todo*" como sigue. Consideremos una cierta propiedad "p" para los elementos de sucesiones reales, (a_n); por ejemplo, "p" puede ser la propiedad "ser a_n positivo", ó, "ser a_n diferente de cero", ó "ser a_n mayor que 10", etc. Decimos que

a_n satisface la propiedad "p" para *casi todo* n

si y sólo si

$\{n \in \mathbb{N}/a_n$ satisface la propiedad "p"$\} \in \mathcal{F}_r^*$.

Gracias a las propiedades del ultrafiltro de Frechet, la palabra "*casi todo*" introducida de la manera anterior se comporta prácticamente en la misma forma como la hablada intuitivamente; más precisamente, ésta se rige bajo las siguientes reglas:

(I) "*n suficientemente grande*" implica "*casi todo n*".

(II) Si "*p*" implica "*q*", entonces, "*p* para *casi todo n*" implica "*q* para *casi todo n*".

(III) Si se cumple simultáneamente "*p* para *casi todo n*", y, "*q* para *casi todo n*", entonces se tiene que "*p*, y, *q* para *casi todo n*".

(IV) La negación de "*p* para *casi todo n*" es " *NO p* para *casi todo n*".

Dadas dos sucesiones (a_n) y (b_n), si $a_n = b_n$ para *casi todo n* estonces decimos que la sucesión (a_n) es *casi igual* a la sucesión (b_n), y se denota por:

$$(a_n) \sim (b_n).$$

(V) Si (a_n) satisface la propiedad "*p*" para *casi todo n*, entonces existe otra sucesión $(\hat{a}_n)$ *casi igual* a (a_n) tal que $(\hat{a}_n)$ satisface la propiedad "p" para ***todo*** n.

Sea $\mathbb{R}^\infty$ ($= \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) la colección de todas las sucesiones de elementos reales, la relación "*casi igual* $\sim$" es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^\infty$; la clase de equivalencia representada por la sucesión (a_n) se denota por:

$$[(a_n)],$$

o sea que $[(a_n)]$ es la clase de todas las sucesiones *casi iguales* a (a_n). La colección de todas las clases, o sea, el conjunto cociente $\mathbb{R}^\infty/\sim$ es un cuerpo ordenado de acuerdo con las siguientes operaciones:

(Adición y Sustración)

$$[(a_n)] \pm [(b_n)] = [(a_n \pm b_n)].$$

(Multiplicación)

$$[(a_n)] \cdot [(b_n)] = [(a_n \cdot b_n)]$$

(Desigualdad)

$$[(a_n)] < [(b_n)] \quad \text{si } a_n < b_n \text{ para } \textit{casi todo } n.$$

El elemento neutro para la adición es la clase representada por la sucesión constante de valor **cero**: $[(0)] = [(0,0,\ldots,0,\ldots)]$, y el elemento neutro para la multiplicación es la clase representada por la sucesión constante de valor 1: $[(1)] = [(1,1,\ldots,1,\ldots)]$. Si $[(a_n)] \neq [(0)]$ entonces $a_n \neq 0$ para *casi todo* n. Por la propiedad (V) de "*casi todo*", existe $(\hat{a}_n) \sim (a_n)$ tal que $\hat{a}_n \neq 0$ para ***todo*** n. La clase representada por la sucesión $(1/\hat{a}_n)$ es el *inverso multiplicativo* de la clase $[(a_n)]$.

El cuerpo ordenado $\mathbb{R}^\infty/\sim$ se denota por $\mathbb{R}^*$, el cual se llama "*el cuerpo de números no-estándar*"(1) y los elementos de $\mathbb{R}^*$, o sea, las clases de equivalencia en $\mathbb{R}^\infty$, se llaman "*números no-estándar*".

La clase representada por la sucesión constante de valor real c, $[(c)] = [(c,c,\ldots, c,\ldots)]$ se denota nuevamente por **c**; de esta manera podemos considerar a $\mathbb{R}$ como un subcuerpo ordenado de $\mathbb{R}^*$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^*$; se define "***el valor absoluto de*** α" por:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

---

(1) Todos los cuerpos ordenados así obtenidos son isomorfos, suponiendo la hipótesis del continuo. (ver Cap.

Decimos que $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ es un *infinitesimal* si $|\varepsilon| < c$ para todo *real* $c > 0$. Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}^*$ es un *infinito* si $|\lambda| > c$ para todo *real* $c > 0$. Si $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ es un infinitesimal, entonces $1/\varepsilon$ es un infinito. Un número no-estándar α es *finito* si α *no es* infinito, esto es, si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ es finito entonces existe un número real positivo M tal que $|\alpha| < M$.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$; si $\alpha - \beta$ es un infinitesimal, decimos que α es infinitamente próximo a β, y se denota por $\alpha \approx \beta$. Con esta notación, se tiene que $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ es un infinitesimal si y sólo si $\varepsilon \approx 0$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ es finito, entonces se puede demostrar que existe un único número real a tal que $\alpha \approx a$; decimos que a es "*la parte estándar de* α" y se denota por $a = \text{Est } \alpha$.(2)

13, p.184, Gillman y Jerison. Anillos de funciones contínuas, Van Nostrand, 1960).

(2) A partir de un filtro de Frechet $\mathcal{F}_r$, hay varias maneras de llegar a un ultrafiltro $\mathcal{F}_r^*$. Por ejemplo si a $\mathcal{F}_r$ se agrega $S_1 = \{2m | m \in \mathbb{N}\}$ se obtiene uno de tales ultrafiltros y si se agrega $S_2 = \{2m-1 | m \in \mathbb{N}\}$ se obtiene otro. De la construcción del ultrafiltro, depende la asignación de la parte estándar de α. Por ejemplo, si se ha agregado S_1 tenemos que

$$(1,0,1,0,1,0,\ldots) \sim (0,0,0,0,\ldots) = 0$$

y si se ha agregado S_2 obtenemos

$$(1,0,1,0,1,0,\ldots) \sim (1,1,1,1,\ldots) = 1.$$

Es bien conocido el siguiente hecho: Sea $\alpha = [(a_n)] \in \mathbb{R}^*$, si $a_n \to L$ $(n \to \infty)$ entonces:

$$L = \text{Est}\ \alpha \quad (\text{ó},\ L \approx \alpha).$$

Así, toda sucesión que tiende a cero representa un infinitesimal en $\mathbb{R}^*$.

§1. TOPOLOGIA DE ORDEN EN $\mathbb{R}^*$.

Como el cuerpo $\mathbb{R}^*$ es un conjunto ordenado, esta propiedad nos permite trabajar en $\mathbb{R}^*$ con intervalos abiertos, cerrados y semi-abiertos; gracias a esta útil herramienta podemos dotar a $\mathbb{R}^*$ de una estructura topológica, similar a la que trabajamos para $\mathbb{R}$.

Primero se definen los intervalos no-estándar:

$$(\alpha,\beta) = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \alpha < \tau < \beta\}$$

(intervalo no-estándar abierto).

$$[\alpha\ \beta] = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}$$

(intervalo no-estándar cerrado).

También a veces es conveniente emplear los *símbolos* $\pm\infty$ para denotar los intervalos no-estándar *no-acotados*:

$$(\alpha, +\infty) = \{\tau \in \mathbb{R}^*/\tau > \alpha\}$$

$$(-\infty, \beta) = \{\tau \in \mathbb{R}^*/\tau < \beta\}$$

No se debe confundir los *símbolos* $\pm\infty$ con los números no-estándar *infinitos*.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}^*$, el intervalo $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, es "la *vecindad*" de α de radio ε, y se denota por:

$$V(\alpha;\varepsilon),$$

o simplemente una vecindad de α, $V(\alpha)$.

Sea S un conjunto de números no-estándar; decimos que S es "*abierto*" si para todo $\tau \in S$ existe una vecindad $V(\tau)$ contenida en S. Evidentemente, los intervalos no-estándar abiertos son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^*$.

Se ve fácilmente que la unión de cualquier número de conjuntos abiertos es abierta, y la intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierta.

Consideremos $\mathcal{O}$ la familia de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^*$, entonces $\mathcal{O}$ es una topología para $\mathbb{R}^*$ (*Topología de orden*).

Ejemplo 1. Intervalos no-estándar abiertos, (α,β), $(\alpha, +\infty)$, $(-\infty,\beta)$ son abiertos en $\mathbb{R}^*$. ϕ (el conjunto vacío) y $\mathbb{R}^*$ también son abiertos.

Ejemplo 2. Sea E_o el conjunto de todos los números infinitesimales:

$$E_o = \{\varepsilon \in \mathbb{R}^* / \varepsilon \approx 0\}$$

entonces E_o es abierto. En efecto, tenemos:

$$E_o = \bigcup_{\substack{\varepsilon \approx o \\ \varepsilon > o}} (-\varepsilon,\varepsilon) \quad \text{(unión de intervalos abiertos).}$$

Ejemplo 3. El conjunto A de todos los números no infinitesimales es abierto en $\mathbb{R}^*$. En efecto:

$$A = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \not\approx 0\} = \bigcup_{\tau \not\approx o} (\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon)$$

donde ε es un infinitesimal positivo.

Ejemplo 4. El conjunto B de todos los números no-estándar *finitos* es abierto. En efecto:

$$B = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \text{ es finito}\} = \bigcup_{\tau \text{finito}} (\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon).$$

$$(\varepsilon \approx 0).$$

Ejemplo 5. El conjunto D de todos los números no-estándar *infinitos* es abierto. En efecto:

$$\mathcal{D} = \{\tau \in \mathbb{R}^*/\tau \text{ es infinito}\} = \bigcup_{\tau \text{infinito}} (\tau-1,\tau+1).$$

Decimos que $F(\subseteq \mathbb{R}^*)$ es "*cerrado*" si su complemento $\mathbb{R}^*-F$ es abierto. Evidentemente, los intervalos cerrados no-estándar son conjuntos cerrados.

Dado un conjunto $S(\subseteq \mathbb{R}^*)$, un número no-estándar $\alpha \in \mathbb{R}^*$ es un punto de *acumulación* de S si toda vecindad de α contiene, por lo menos, un punto de S diferente de α. Un conjunto $F(\subseteq \mathbb{R}^*)$ es cerrado si y sólo si todos los puntos de acumulación de F pertenecen a F.

Ejemplo 6. ϕ, $\mathbb{R}^*$, $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,+\infty)$, $(-\infty,\beta]$ son cerrados.

Ejemplo 7. $\mathbb{R}$, como un subconjunto de $\mathbb{R}^*$, es cerrado.

Es suficiente mostrar que $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \phi$.

En efecto: i) Sea $x \in \mathbb{R}$, si $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \approx 0$ entonces la vecindad $V(x;\varepsilon)$ contiene como *único número real* a x:

$$V(x;\varepsilon) \cap \mathbb{R} = \{x\},$$

es decir, todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ son "*aislados*" en $\mathbb{R}^*$.

ii) Si τ es infinito, y $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \approx 0$, entonces $V(\tau,\varepsilon) \cap \mathbb{R} = \phi$.

iii) Si $\tau \in \mathbb{R}^*-\mathbb{R}$ y es finito, para $\sigma = |\tau\text{-Est }\tau|$, se tiene que $V(\tau, \frac{\sigma}{2}) \cap \mathbb{R} = \phi$.

Más generalmente, cualquier conjunto de números reales es cerrado en $\mathbb{R}^*$.

Ejemplo 8. Sean E_o, A, B, D los conjuntos no-estándar dados en los ejemplos 2,3,4 y 5, entonces estos conjuntos son cerrados en $\mathbb{R}^*$. En efecto:

$$E_o = \mathbb{R}^*-A,\quad A = \mathbb{R}^*-E_o,\quad B = \mathbb{R}^*-D,\quad D = \mathbb{R}^*-B,$$

luego estos conjuntos son cerrados ya que A, E_o, D, B son abiertos.

También, podemos observar directamente así:

$$E_o = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$$

siendo E_o la intersección de intervalos cerrados no-estándar, éste debe ser cerrado.

Nótese que E_o *no* tiene *puntos de frontera*.

Ejemplo 9. Sea $E_\alpha = \{\tau \in \mathbb{R}^*/\tau \approx \alpha\}$; entonces E_α es abierto y cerrado. No existen puntos de frontera de E_α. Además

$$E_\alpha = \alpha + E_o = \{\alpha + \varepsilon / \varepsilon \in E_o\}.$$

La presencia de subconjuntos cerrados y a la vez abiertos (diferentes a ϕ y a $\mathbb{R}^*$), como se muestra en los ejemplos anteriores, nos dice que: "$\mathbb{R}^*$ no es conexo".

Sea $S(\subseteq \mathbb{R}^*)$; un número no-estándar α se llama "el *extremo superior* de S" (α = sup S) si α es la *mínima cota superior* de S. Por ejemplo, si $S = (\alpha,\beta)$ (un intervalo no-estándar) entonces β = Sup S.

De la misma forma, se define el extremo inferior de S, Inf S.

Un conjunto acotado no siempre posee Sup ni Inf.

Ejemplo 10. $E_o = \{\varepsilon/\varepsilon \approx 0\}$ es acotado superiormente ya que cualquier número positivo no-infinitesimal es una cota superior de E_o. Se ve que *no* existe Sup E_o. En efecto, supongamos que $\alpha > 0$ es una cota superior de E_o. Si $\alpha \approx 0$ entonces $2\alpha > \alpha$, $2\alpha \in E_o$, luego α no es una cota superior de E_o (*absurdo!*). Por lo tanto,

$\alpha \not\approx 0$. Entonces tenemos:

$$\tfrac{1}{2}\alpha \not\approx 0, \qquad \tfrac{1}{2}\alpha < \alpha ,$$

esto es, $\frac{1}{2}\alpha$ es una cota superior de E_o, *estrictamente menor* que α, luego no existe la mínima cota superior de E_o.

El Ejemplo 10 nos muestra que:

"$\mathbb{R}^*$ *no es completo*".

§2. SUCESIONES DE NUMEROS NO-ESTANDAR.

Sea $(\alpha_n)_n$ una sucesión de números no-estándar(#), decimos que $(\alpha_n)_n$ tiende (o converge) a β si

dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ cualquiera, existe $N_o \in \mathbb{N}$

tal que

$$|\alpha_n - \beta| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{con} \quad n > N_o .$$

Los siguientes teoremas cuyas demostraciones aparecen en el libro "Teoría de Funciones No-estándar, Y. Takeuchi", son sumamente importantes.

(#) Una sucesión de números no-estándar es una "función":

$$(\alpha_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$$
$$n \to \alpha_n$$

TEOREMA 1. Toda sucesión de números no-estándar es *acotada*. (ver p.83 del libro citado).

TEOREMA 2. Ninguna sucesión no-constante de números no-estándar converge en $\mathbb{R}^*$. (ver p.86 del libro citado).

Nota. Decimos que una sucesión $(\alpha_n)_n$ es "*constante*" si $\alpha_n = \alpha$ para *todo* n a partir de algún subíndice.

Sean $S(\subseteq \mathbb{R}^*)$ un conjunto no-estándar y $\alpha \in \mathbb{R}^*$ un punto de acumulación de S. Según el Teorema 2, "*no existe* una sucesión de puntos de S, dos a dos distintos, que converge a α". Esto es, el concepto de "*punto de acumulación*" es diferente al concepto de "*punto límite*", por esta razón los métodos de estudio de sucesiones en $\mathbb{R}^*$ son sustancialmente diferentes a los de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 11. Sea $(\alpha_n)_n$ una sucesión de números no-estándar, estrictamente creciente; entonces el conjunto:

$$T = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, +\infty) = \{\tau \in \mathbb{N}^* / \tau > \alpha_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

es *abierto* y *cerrado*.

Demostración. Como $(\alpha_n)_n$ es estrictamente cre ciente, se tiene que

$$T = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \geqslant \alpha_n\}$$

por lo tanto, T es cerrado. (intersección de intervalos cerrados).

Por otra parte, sea $\tau \in T$, entonces $\tau > \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 2, τ *no es límite* de la sucesión $(\alpha_n)_n$, por lo tanto existe $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}^*$ tal que $\tau - \varepsilon > \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o sea

$$(\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon) \subset T,$$

luego, T es un conjunto abierto.

De la misma manera, tenemos:

Ejemplo 12. Sean $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ sucesiones estrictamente creciente y estrictamente decreciente respectivamente; entonces los conjuntos:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, \beta_n)$$

son abiertos y cerrados.

Ejemplo 13. Sean $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ sucesiones estrictamente decreciente y estrictamente creciente respectivamente, entonces los conjuntos:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n,\beta_n], \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n,+\infty), \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,\beta_n]$$

son abiertos y cerrados.

§3. EXTENSION ELEMENTAL DE CONJUNTOS REALES.

Sea $S(\subseteq \mathbb{R})$ un conjunto de números reales.... El conjunto no-estándar S^* definido por:

$$S^* = \{\tau = [(x_n)_n]/x_n \in S \text{ para } \textit{casi todo } n\}$$

se llama "*la extensión elemental* del conjunto S".

TEOREMA 3. (i) Si $S \subseteq T$ entonces $S^* \subseteq T^*$.

(ii) $(S \cup T)^* = S^* \cup T^*$.

(iii) $(S \cap T)^* = S^* \cap T^*$.

(iv) $(\mathbb{R}-S)^* = \mathbb{R}^* - S^*$.

Demostracion. (i) Evidente.

(ii) Como $S \subseteq (S \cup T)$ entonces $S^* \subseteq (S \cup T)^*$ (por (i)), por lo tanto:

$$S^* \cup T^* \subseteq (S \cup T)^*.$$

Ahora, sea $\tau = [(x_n)_n] \in (S \cup T)^*$, entonces

$$x_n \in S \cup T = S \cup (T - S) \text{ para } \textit{casi todo } n.$$

Por lo tanto:

$x_n \in S$ para *casi todo* n, ó

$x_n \in T\text{-}S \subset T$ para *casi todo* n.

esto es,

$$\tau = [(x_n)_n] \in S^* \text{ ó, } \tau = [(x_n)_n] \in T^*,$$

luego

$\tau \in S^* \cup T^*$, esto es, $(S \cup T)^* \subseteq S^* \cup T^*$.

(iii) y (iv) se prueban similarmente a (ii).

Como una consecuencia inmediata del Teorema 3, tenemos:

Dada una familia finita de subconjuntos de $\mathbb{R}$, $\{S_k;\ k = 1,2,\ldots,m\}$, se tiene:

$$\left(\bigcup_{k=1}^{m} S_k\right)^* = \bigcup_{k=1}^{m} (S_k)^*, \quad \left(\bigcap_{k=1}^{m} S_k\right)^* = \bigcap_{k=1}^{m} (S_k)^*.$$

Sin embargo, esta "*intercambiabilidad*" entre "la extensión elemental (*)" y "la unión" ó "la intersección" *no* se puede generalizar para el caso de la "unión infinita", ó "la intersección infinita". En general, se cumplen solamente las siguientes contenencias:

Sea $\{S_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ una colección infinita de subconjuntos de $\mathbb{R}$, entonces:

(i) $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right)^* \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (S_k)^*$,

(ii) $\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k\right)^* \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} (S_k)^*$.

En efecto se tiene que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \supseteq S_k \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Por el Teorema 3 se obtiene:

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right)^* \supseteq (S_k)^* \quad \text{para todo } k,$$

por lo tanto:

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right)^* \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (S_k)^*.$$

De la misma manera, se obtiene la contenencia (ii).

Supongamos ahora que la colección $\{S_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ satisface la condición:

$$S_n \not\subset \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

entonces existe a_n tal que $a_n \in S_n$, $a_n \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k$.
Consideremos el número no-estándar
$\alpha = [(a_n)]$. Como $a_n \in \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ para *todo* n.

$$\alpha = [(a_n)] \in (\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k)^*.$$

Por otra parte, para cada k fijo se tiene:

$a_n \notin S_k$ para $n > k$ (o sea, para *casi todo* n)

esto es:

$$\alpha = [(a_n)] \notin (S_k)^* \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}$$

y por lo tanto:

$$\alpha = [(a_n)] \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} (S_k)^*.$$

De lo anterior se tiene que:

$$(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k)^* \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} (S_k)^*.$$

De la misma manera, si la colección $\{S_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ satisface la condición $S_n \not\supset \bigcap_{k=1}^{n-1} S_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que:

$$(\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k)^* \neq \bigcap_{k=1}^{\infty} (S_k)^*.$$

Ejemplo 14. Dados $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, el intervalo no-estándar $(a,b) = \{\tau \in \mathbb{R}^*/a < \tau < b\}$ es la extensión elemental del intervalo real $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$.

En efecto, si $a < x_n < b$ para *casi todo* n, entonces:

$$a = [(a)_n] < [(x_n)_n] < [(b)_n] = b \quad (*)$$

o sea:

$$a < \tau < b \quad \text{con} \quad \tau = [(x_n)_n].$$

Ejemplo 15. Sean $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^*$ con $\alpha < \beta$, $\alpha,\beta \notin \mathbb{R}$. El intervalo no estándar (α,β) no es extensión elemental de ningún conjunto real.

Demostración. Supongamos que existe $S \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$(\alpha,\beta) = S^*.$$

Si $a = \text{Est}\ \alpha$, $b = \text{Est}\ \beta$, entonces podemos considerar los siguientes 4 casos:

(i) $a > \alpha$, $b < \beta$, (ii) $a > \alpha$, $b > \beta$,

(iii) $a < \alpha$, $b < \beta$, (iv) $a < \alpha$, $b > \beta$.

Supongamos el primer caso (i): $a > \alpha$, $b < \beta$. Como $S^* = (\alpha,\beta) \supseteq [a,b] = \{\tau \in \mathbb{R}^*/a \leq \tau \leq b\} = [a,b]^*$

(*) $(a)_n$, $(b)_n$ son sucesiones constantes de valor a, b respectivamente, que representan a los números reales a,b en $\mathbb{R}^*$.

entonces

$$S \supseteq [a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Si $S \neq [a,b]$ entonces existe $x \in S$ tal que $x > b$, ó, $x < a$.

Pero como $x \in S$ entonces $x = [(x)_n] \in S^*$, luego $\alpha < x < \beta$ y en consecuencia $x = a$ ó $x = b$; esto contradice a: $a > b$ ó $x < a$ (*absurdo!*). Por lo tanto se debe tener que $S = [a,b]$, luego $S^* = [a,b]^* = [a,b] = (\alpha,\beta)$.
Esto es imposible. (*absurdo!*

De manera similar, podemos llegar a un absurdo en los casos (ii), (iii) y (iv).

NUMEROS NATURALES NO-ESTANDAR $\mathbb{N}^*$

Si $\lambda = [(k_n)_n] \in \mathbb{N}^*$ (λ es un número no-estándar representado por una sucesión de números naturales), decimos que λ es "*un número natural no-estándar*". A continuación veremos las propiedades de $\mathbb{N}^*$.

1º $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$. (Evidente).

2º Si $\lambda \in \mathbb{N}^*$ entonces $\lambda+1 \in \mathbb{N}^*$.

En efecto, si $\lambda = [(k_n)_n] \in \mathbb{N}^*$, entonces $k_n \in \mathbb{N}$ para *casi todo n*, luego $k_n+1 \in \mathbb{N}$ para *casi todo n*, por lo tanto:

$$\lambda+1 = [(k_n)] + [(1)_n] = [(k_n+1)_n] \in \mathbb{N}^*.$$

3º Sea $\lambda \in \mathbb{N}^*$. No existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tal que $\lambda < \alpha < \lambda+1$.

En efecto, si $\lambda = [(k_n)_n]$, $\alpha = [(x_n)_n]$ entonces $\lambda < \alpha < \lambda+1$ implica que

$$k_n < x_n < k_n+1 \qquad \text{para } casi\ todo\ n,$$

luego:

$$x_n \notin \mathbb{N} \qquad \text{para } casi\ todo\ n,$$

o sea

$$\alpha = [(x_n)_n] \notin \mathbb{N}^*.$$

4º Sea $\lambda \in \mathbb{N}^*$, si λ es *finito*, entonces $\lambda \in \mathbb{N}$ (esto es, un número natural no-estándar finito es un número natural).

En efecto, si $\lambda \in \mathbb{N}^*$ es finito entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \leqslant \lambda < n+1.$$

De la propiedad 3º se tiene que $\lambda = n \in \mathbb{N}$.

5º Sea $\tau \in \mathbb{R}^*$ ($\tau > 0$) entonces existe $\lambda \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\lambda-1 \leqslant \tau < \tau.$$

En efecto, si $\tau = [(x_n)_n]$ entonces se define $k_n \in \mathbb{N}$ como sigue:

$$k_n = (\text{la parte entera de } x_n) + 1 \quad (\text{para todo } n)$$

tenemos

$$k_n - 1 \leqslant x_n < k_n \quad \text{para todo } n,$$

luego: $\lambda-1 \leqslant \tau = [(x_n)_n] < \lambda$, donde

$$\lambda = [(k_n)_n] \in \mathbb{N}^*.$$

Nótese que ésta es la *versión no-estándar* de la *propiedad arquimediana* de $\mathbb{R}^*$.

6º Si $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^*$ con $\lambda > \mu$ entonces

$$\lambda+\mu \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda \cdot \mu \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda-\mu \in \mathbb{N}^*.$$

Como un caso particular, si $\lambda \in \mathbb{N}^*$ es *infinito* entonces $\lambda \pm n \in \mathbb{N}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

7º Sea $\lambda \in \mathbb{N}^*$, λ un número natural no-estándar *infinito*, se define:

$$\mathbb{Z}_\lambda = \{\tau \in \mathbb{N}^* / \tau = \lambda \pm n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

entonces: (a) $\mathbb{Z}_\lambda \subset \mathbb{N}^*$. (b) $\mathbb{Z}_\lambda$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$. (c) Si $\lambda-\mu$ es *infinito* entonces $\mathbb{Z}_\lambda \cap \mathbb{Z}_\mu = \emptyset$.

8º Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^*$ con $\mu > \lambda$. Si $\mu-\lambda$ es *infinito*, entonces existe $\nu \in \mathbb{N}^*$ tal que $\lambda < \nu < \mu$, $\nu-\lambda$ es infinito, $\mu-\nu$ es infinito.

En efecto, por la propiedad 5º existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tal que
$$\alpha - 1 \leqslant \tfrac{1}{2}(\mu-\lambda) < \alpha.$$

α es finito ya que $\mu-\lambda$ es infinito. Si $\nu = \lambda+\alpha$ entonces $\nu \in \mathbb{N}^*$, además $\nu-\lambda$, $\mu-\nu$ son infinitos.

En la siguiente figura se muestra la estructura de $\mathbb{N}^*$.

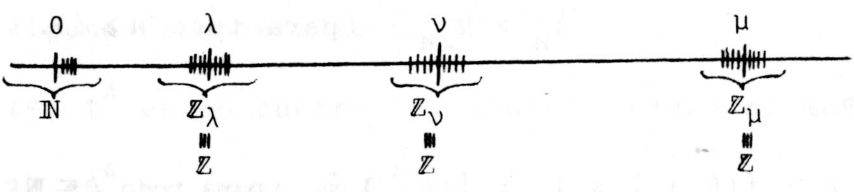

Figura 1 Estructura de $\mathbb{N}^*$

9º $\mathbb{N}^*$ no es contable.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{N}^*$ es contable: sea:

$$\mathbb{N}^* = \{\lambda_i / \ i = 1,2,3,\dots\} .$$

Sean $\lambda_i = [(k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{in}, \dots)] = [(k_{in})_n]$ $(i = 1,2,3,\dots)$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $k_{in} \in \mathbb{N}$ para todo i, para todo n. Se define h_n como sigue:

$$h_1 = k_{11} + 1$$

$$h_2 = k_{12} + k_{22} + 1$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$h_n = k_{1n} + k_{2n} + \dots + k_{nn} + 1$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

Tenemos:

$$h_n > k_{1n} \quad \text{(para todo } n\text{)}$$

$$h_n > k_{2n} \quad \text{(para todo } n \geqslant 2\text{)}$$

en general:

$$h_n > k_{in} \quad \text{(para todo } n \geqslant i\text{)}.$$

Por lo tanto

$$\alpha = [(h_n)_n] > \lambda_i = [(h_{in})_n] \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N},$$

o sea que

$$\alpha \notin \mathbb{N}^*$$

Pero como $h_n \in \mathbb{N}$ para todo n, entonces $\alpha \in \mathbb{N}^*$ (*absurdo!*).

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^*$ con $\lambda \neq \mu$ entonces, de la propiedad 3ª se tiene:

$$(\lambda, \lambda+1) \cap (\mu, \mu+1) = \emptyset.$$

De la propiedad 9ª se desprende que

"$\mathbb{R}^*$ no es *separable*",

puesto que existe una colección *no contable* de intervalos abiertos, dos a dos disyuntos, por ejemplo, $\{(\lambda, \lambda+1)/\lambda \in \mathbb{N}^*\}$.

NUMEROS RACIONALES NO-ESTANDAR, $\mathbb{Q}^*$.

Si $\alpha = [(r_n)_n] \in \mathbb{Q}^*$ (α es un número no-estándar representado por una sucesión de números racionales), decimos que α es un *número racional no-estándar*. A continuación daremos algunas propiedades de $\mathbb{Q}^*$.

1ª. $\mathbb{Q}^*$ es un *cuerpo* (evidente).

2ª. $\mathbb{Q}^*$ es denso en $\mathbb{R}^*$.

En efecto, sea $\tau = [(x_n)_n] \in \mathbb{R}^*$, dado $\varepsilon = [(e_n)_n] > 0$ cualquiera, existe r_n racional tal que

$$x_n - e_n < r_n < x_n + e_n \quad \text{para cada } n.$$

Si $\alpha = [(r_n)_n]$, entonces $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, y además:

$$[(x_n)_n]-[(e_n)_n] = [(x_n-e_n)_n] < [(r_n)_n]$$
$$< [(x_n+e_n)_n] = [(x_n)_n]+[(e_n)_n]$$

o sea

$$\tau - \varepsilon < \alpha < \tau + \varepsilon.$$

3º $\mathbb{Q}^*$ no es contable.

En efecto, como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ entonces $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{Q}^*$, por lo tanto $\mathbb{Q}^*$ no es contable.

Nota. A pesar de que $\mathbb{Q}^*$ no es equipotente a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^*$ sí es equipotente a $\mathbb{R}$, ya que

$$\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{R}^* \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}.$$

§4. EXTENSION ELEMENTAL DE CONJUNTOS ABIERTOS.

En $\mathbb{R}$, todo conjunto abierto A es la unión contable de intervalos abiertos, dos a dos disyuntos. Esta propiedad no se tiene para conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^*$ como el caso de E_o de todos los números infinitesimales. Sin embargo, para las extensiones elementales de conjuntos abiertos reales se tiene *una versión no-estándar* de esta propiedad.

TEOREMA 4. Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, entonces A^* (la extensión elemental de A) es la unión de intervalos no-estándar abiertos, dos a dos disyuntos. El número de intervalos que componen a A^* es igual al de $\mathbb{N}^*$.

Demostración. Como A es abierto en $\mathbb{R}$, entonces

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

donde los intervalos (a_n, b_n), $n = 1,2,3,...$ son dos a dos disyuntos. Vamos a demostrar que

$$A^* = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}^*} (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$$

donde

$$\lambda = [(k_n)_n] \in \mathbb{N}^*, \ \alpha_\lambda = [(a_{k_n})_n], \ \beta_\lambda = [(b_{k_n})_n].$$

En efecto, (i) sea $\tau = [(x_n)_n] \in A^*$ entonces

$$x_n \in A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \quad \text{para } casi\ todo\ n,$$

o sea:

$$x_n \in (a_k, b_k) \text{ para algún } k, \text{ para } casi\ todo\ n.$$

Notemos (a_{k_n}, b_{k_n}) el intervalo que contiene a x_n:

$$a_{k_n} < x_n < b_{k_n} \quad \text{para } casi\ todo\ n,$$

entonces

$$[(a_{k_n})_n] < [(x_n)_n] < [(b_{k_n})_n],$$

es decir, $\tau \in (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$. Esto nos muestra que

$$A^* \subseteq \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}^*} (\alpha_\lambda, \beta_\lambda).$$

(ii) Recíprocamente, supongamos que

$$\tau = [(x_n)_n] \in \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}^*} (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$$

con

$$\alpha_\lambda = [(a_{k_n})_n], \quad \beta_\lambda = [(b_{k_n})_n],$$

entonces $\tau \in (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ para algún $\lambda \in \mathbb{N}^*$, luego:

$$a_{k_n} < x_n < b_{k_n} \quad \text{para } casi\ todo\ n,$$

así:

$$x_n \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) = A \quad \text{para } casi\ todo\ n.$$

Por lo tanto, se tiene que $\tau \in A^*$, o sea:

$$\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}^*} (\alpha_\lambda, \beta_\lambda) \subseteq A^*.$$

Ahora solamente hace falta demostrar que los intervalos $(\alpha_\lambda,\beta_\lambda)$ son disyuntos dos a dos. En efecto, sean $\lambda,\mu \in \mathbb{N}^*$ tales que $\lambda \neq \mu$ con $\lambda = [(k_n)_n]$, $\mu = [(h_n)_n]$, entonces

$$k_n \neq h_n \quad \text{para } \textit{casi todo } n, \text{ y}$$

esto quiere decir que

$$(a_{k_n},b_{k_n}) \cap (a_{h_n},b_{h_n}) = \emptyset \quad \text{para } \textit{casi todo } n,$$

por lo tanto se tiene que

$$(\alpha_\lambda,\beta_\lambda) \cap (\alpha_\mu,\beta_\mu) = \emptyset.$$

Con esto queda demostrado el Teorema 4.

§5. CONJUNTOS COMPACTOS EN $\mathbb{R}^*$.

En $\mathbb{R}$ un conjunto compacto es *acotado* y *cerrado*. Esta propiedad no se tiene en $\mathbb{R}^*$; tenemos el siguiente teorema bastante extraño:

TEOREMA 5. Sea $S \subset \mathbb{R}^*$. S es compacto si y sólo si S es "*finito*".

Nota. S es *finito* quiere decir que el conjunto S posee un número finito de elementos.

Demostración. Evidentemente, un conjunto finito es compacto. Procedemos a demostrar el recíproco por reducción al absurdo.

Sea S un conjunto compacto en $\mathbb{R}^*$, supongamos que S es infinito (o sea, S posee un número infinito de elementos), y consideremos los siguientes dos casos; llegaremos a un absurdo para cada caso.

(i) S contiene un intervalo no-estándar,
(ii) S no contiene intervalos no-estándar.

(i) Supongamos que S contiene un intervalo no-estándar. Como cualquier intervalo no-estándar contiene intervalos no-estándar de *longitud infinitesimal*, supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$S \supset [\alpha,\beta] \quad \text{tal que} \quad \beta-\alpha = \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \approx 0.$$

La colección de intervalos $\{(\tau-\varepsilon^2,\tau+\varepsilon^2)/\tau \in S\}$ es un recubrimiento abierto del conjunto compacto S:

$$[\alpha,\beta] \subseteq S \subseteq \bigcup_{\tau\in S} (\tau-\varepsilon^2,\tau+\varepsilon^2).$$

Como S es compacto, existen $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n \in S$ con $\tau_1 < \tau_2 <\ldots< \tau_n$ tales que

$$[\alpha,\beta] \subseteq S \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (\tau_k - \varepsilon^2, \tau_k + \varepsilon^2).$$

Entonces:

$$\tau_k - \tau_{k-1} < 2\varepsilon^2,$$

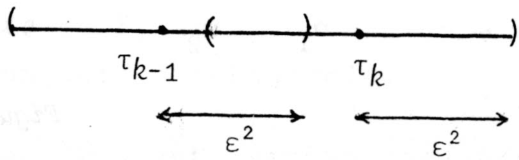

Figura 2

luego

$$\beta - \alpha < 2(n+1)\varepsilon^2,$$

o sea

$$\varepsilon < 2(n+1)\varepsilon^2,$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{2(n+1)} < \varepsilon$$

lo cual es *absurdo*, puesto que $\varepsilon \approx 0$.

(ii) Supongamos que S es infinito, pero S no contiene intervalos no estándar.

Como S es infinito, existe una sucesión de puntos de S estrictamente monótona, digamos estrictamente creciente (#):

$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \ldots, \quad \tau_k \in S \text{ para } k = 1,2,3,\ldots$$

(#) Si el conjunto S no tiene elemento máximo, es evidente que podemos extraer una sucesión estrictamente cre-

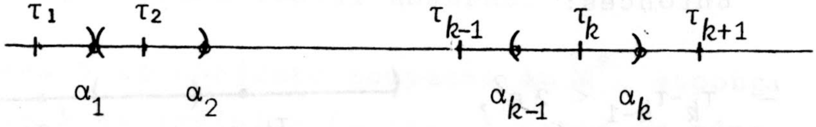

Figura 3

Como S no contiene intervalos, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ entre τ_k y τ_{k+1} existe, por lo menos, un punto que no pertenece a S, digamos $\alpha_k \notin S$. Tenemos el siguiente recubrimiento abierto de S:

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, \alpha_{k+1}) \cup (-\infty, \alpha_1) \cup \{\tau / \tau > \alpha_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}$$

Nótese que $\{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > \alpha_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, +\infty)$ es abierto según el ejemplo 11.

---

ciente de puntos de S.
Si S tiene máximo, sea τ_1 = Máximo de S.

Ahora, consideremos el conjunto infinito $S_1 = S - \{\tau_1\}$. Si S_1 no tiene máximo, entonces existe una sucesión estrictamente creciente de puntos de S_1. Si S_1 tiene máximo, sea τ_2 = Máximo de S_1.

Así sucesivamente. Si este procedimiento termina en algún momento, en tal caso existe una sucesión estrictamente creciente de puntos de S; si el procedimiento *sigue sin terminar nunca*, entonces la sucesión $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots)$ es estrictamente decreciente.

Los intervalos (α_k, α_{k+1}) $k = 1,2,3,\ldots$ son disyuntos, y cada uno contiene por lo menos, un punto de S, por lo tanto no existe un *subrecubrimiento finito* de S, esto contradice a la compacidad del conjunto S (*absurdo!*).

Por lo tanto, S debe ser un conjunto finito.

A P E N D I C E.

ALGUNAS OTRAS PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE $\mathbb{R}^*$.

1º $\mathbb{R}^*$ es de Hausdorff (T_2).

En efecto, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \neq \beta$, si $\delta = |\alpha - \beta| > 0$ entonces tenemos:

$$V(\alpha, \tfrac{1}{2}\delta) \cap V(\beta, \tfrac{1}{2}\delta) = \emptyset.$$

2º $\mathbb{R}^*$ es regular (T_3).

En efecto, sean F un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \notin F$, entonces α no es punto de acumulación de F, luego existe $\delta \in \mathbb{R}^*$, $\delta > 0$ tal que

$$V(\alpha, \delta) \cap F = \emptyset.$$

Consideremos dos conjuntos abiertos A, B:

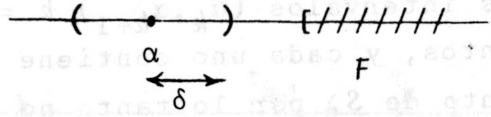

Figura 4

$$A = V(\alpha, \tfrac{1}{2}\delta), \qquad B = \bigcup_{\tau \in F} V(\tau, \tfrac{1}{2}\delta)$$

entonces se tiene que

$$\alpha \in A, \quad F \subset B, \quad y, \quad A \cap B = \emptyset.$$

3º $\mathbb{R}^*$ es normal (T_4).

Demostración. Sean F, G dos conjuntos cerrados disyuntos. Dado $\tau \in F$ existe $\delta_\tau \in \mathbb{R}^*$, $\delta_\tau > 0$ tal que

$$V(\tau, \delta_\tau) \cap G = \emptyset.$$

Dado $\sigma \in G$ existe $\varepsilon_\sigma \in \mathbb{R}^*$, $\varepsilon_\sigma > 0$ tal que

$$V(\sigma, \varepsilon_\sigma) \cap F = \emptyset$$

Consideremos dos conjuntos abiertos A, B definidos por:

$$A = \bigcup_{\tau \in F} V(\tau, \tfrac{1}{2}\delta_\tau), \quad B = \bigcup_{\sigma \in G} V(\sigma, \tfrac{1}{2}\varepsilon_\sigma).$$

Evidentemente tenemos:

$$F \subseteq A, \quad G \subseteq B.$$

Además, se tiene que $A \cap B = \emptyset$; en efecto, si existiera $\lambda \in A \cap B$ entonces existiría $\tau \in F$ con $|\tau-\lambda| < \frac{1}{2}\delta_\tau$, y también existiría $\sigma \in G$ con $|\sigma-\lambda| < \frac{1}{2}\varepsilon_\sigma$. Entonces se tendría:

$$|\tau-\sigma| \leqslant |\tau-\lambda|+|\lambda-\sigma| < \tfrac{1}{2}(\delta_\tau+\varepsilon_\sigma).$$

Si $\delta_\tau \geqslant \varepsilon_\sigma$ entonces $\delta_\tau < |\tau-\sigma| < \frac{1}{2}(\delta_\tau+\varepsilon_\sigma) \leqslant \delta_\tau$ (*absurdo!*).

Si $\varepsilon_\sigma \geqslant \delta_\tau$ entonces $\varepsilon_\sigma < |\tau-\sigma| < \frac{1}{2}(\delta_\tau+\varepsilon_\sigma) \leqslant \varepsilon_\sigma$ (*absurdo!*).

Por lo tanto, se tiene que $A \cap B = \emptyset$.

EL COMPLETADO DE $\mathbb{R}^*$, $\overline{\mathbb{R}^*}$.

Como $\mathbb{R}^*$ es un conjunto ordenado, podemos construír el completado de $\mathbb{R}^*$, $\overline{\mathbb{R}^*}$, agregando a $\mathbb{R}^*$ el extremo superior y el extremo inferior de todo subconjunto acotado de $\mathbb{R}^*$. (ver: Victor Mejía, Conjunto Ordenado sin Estructura Algebraica, Rev.Matemática, Enseñanza Universitaria, Nº 23,Junio de 1982, pp.23-53).

$\overline{\mathbb{R}^*}$ es nuevamente un conjunto ordenado, sin embargo *se pierde la estructura algebraica* en $\overline{\mathbb{R}^*}$. Veámoslo.

Consideremos el conjunto A de todos los números no-estándar *positivos, no infinitesimales*: $A = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > 0,\ \tau \not\approx 0\}$, sea α *el extremo inferior* de A en $\overline{\mathbb{R}^*}$, entonces

$$0 < \alpha < \tau \quad \text{para todo } \tau > 0,\ \tau \not\approx 0.$$

Si $\overline{\mathbb{R}^*}$ (el completado del cuerpo $\mathbb{R}^*$) fuera un *grupo aditivo, consistente* con la desigualdad (el orden en $\overline{\mathbb{R}^*}$) entonces se debería tener:

$$\alpha+\alpha < \alpha+\tau < \tau+\tau \quad \text{para todo } \tau > 0,\ \tau \not\approx 0$$

Como $\{\tau+\tau / \tau \in \mathbb{R}^*,\ \tau \not\approx 0,\ \tau > 0\} = A$ entonces $\alpha+\alpha$ debería ser una *cota inferior* del conjunto A, pero

$$\alpha = 0+\alpha < \alpha+\alpha$$

entonces α *no sería la máxima cota inferior* de A (*absurdo!*).

Figura 5.

GENERALIZACION DE LOS NUMEROS

	$\mathbb{N}$ ⊂	$\mathbb{Z}$ ⊂	$\mathbb{Q}$ ⊂	$\mathbb{R}$ ⊂	$\mathbb{R}^*$ ⊂	$\overline{\mathbb{R}^*}$
Orden (Desigualdad)	<	<	<	<	<	<
Operaciones algebraicas	$+,\cdot$	$\left\{\begin{matrix}+,\cdot\\ -\end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix}+,\cdot\\ -,\div\end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix}+,\cdot\\ -,\div\end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix}+,\cdot\\ -,\div\end{matrix}\right.$	no hay operaciones algebraicas
Propiedad analítica (existencia de límites)			no completo	completo	no completo	completo
Números infinitesimales.					si hay	si hay

* *

BIBLIOGRAFIA

[1] Robinson A., *Non-Standard Analysis*, North Holland, Amsterdam, 1966.

[2] Mejía Victor, *Conjunto ordenado sin estructuras algebraicas*, Matemática Enseñanza Universitaria, Nº 23 junio de 1982.

[3] Takeuchi Y., *Funciones no-estándar y Teoría de Distribuciones*, Revista Col. de Matemáticas, Vol.XVIII, Nºs 3-4, 1983.

[4] Takeuchi Y., *Teoría de Funciones No-estándar*, Univ.Nal. de Colombia, Bogotá, 1983.

[5] Takeuchi Y., *Una noción de filtros*, Boletín de Matemáticas, Vol.XII, N°s 4-6 Dic. 1978.

[6] Tellez J.I., *Un modelo no-estándar de Funciones Generalizadas*, Tesis de Magister, Universidad Nacional, 1982.

[7] Villa Dumar, *Una ojeada al Análisis no-estándar*, Matemática , Enseñanza Universitaria, Nº 8 dic. 1978.

[8] Villa Dumar, *Los hiperreales como ultrapotencia de* $\mathbb{R}$, Matemática, Enseñanza Universitaria, Nº 9, febrero 1979.

*

Universidad Nacional de Col.
Departamento de Matemáticas
BOGOTA. D.E. Colombia.