Boletín de Matemáticas
Volumen III (1969), págs. 115-116

SOBRE LA NO EXISTENCIA DE UNA σ-ÁLGEBRA INFINITA NUMERABLE

por

Hernando PÉREZ y Carlos RODRÍGUEZ

En el libro <<Real and Complex Analysis>> de Walter Rudin [1], el autor plantea a título de ejercicio la siguiente pregunta: ¿ Existe una σ-álgebra infinita numerable ? La presente nota responde esta pregunta negativamente.

1. Recordaremos la definición de σ-álgebra. Dado un conjunto X, una familia $\mathfrak{M}$ de subconjuntos de X se llama σ-álgebra si satisface las siguientes propiedades:

A) $X \in \mathfrak{M}$

B) Si $A, B \in \mathfrak{M}$, entonces $A-B \in \mathfrak{M}$.

C) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathfrak{M}$ entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$. (Obsérvese que también $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$.)

2. Si $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra que contiene una familia disyunta $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(A_k \cap A_j = \emptyset$ si $k \neq j)$, entonces $\mathfrak{M}$ es infinita no numerable. Esto se puede demostrar considerando la aplicación h definida por

$$h: \mathcal{P}(N) \to \mathfrak{M}$$
$$J \leadsto \bigcup_{k\in J} A_k = h(J) .$$

h <u>es una aplicación inyectiva</u>.

3. Supongamos que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra numerable. Vamos a mostrar que es entonces finita.

i) Para x elemento de X, sea $\mathcal{F}_x$ la colección de los elementos A de $\mathfrak{M}$ tales que $x \in A$. El conjunto $[x] = \bigcap_{A\in\mathcal{F}_x} A$ pertenece a $\mathfrak{M}$ y es entonces el menor elemento de $\mathfrak{M}$ que contiene a x.

ii) Si A es un elemento de $\mathfrak{M}$ tal que $A\cap[x] \neq \emptyset$, entonces $[x] \subset A$, pues de lo contrario, uno de los conjuntos $A\cap[x]$, $A-(A\cap[x])$, que pertenecen a $\mathfrak{M}$, contendría x, pero ambos están contenidos estrictamente en $[x]$.

iii) Si $X = \emptyset$, entonces $\mathfrak{M} = \{ \emptyset \}$. Supongamos pues $X \neq \emptyset$ y sea $x_1 \in X$. Llamando $A_1 = [x_1]$ puede ser que $A_1 = X$, y entonces

$\mathcal{M} = \{X, \emptyset\}$. Si $A_1 \neq X$ elegimos $x_2 \in X - A_1$. Llamando $A_2 = [x_2]$ se tiene $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; en el caso que $A_1 \cup A_2 = X$, entonces $\mathcal{M} = \{\emptyset, X, A_1, A_2\}$.

iv) Continuando el razonamiento anterior, supongamos que existen $x_1, \ldots, x_n$ elementos de X tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, donde $A_k = [x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Si $X = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ entonces

$$\mathcal{M} = \left\{ \bigcup_{i \in K} A_i \; ; \; K \in \mathcal{P}(1, \ldots, n) \right\}$$

y así $\mathcal{M}$ es finita. En el caso contrario, podemos definir $A_{n+1} = [x_{n+1}]$ donde $x_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Como $\mathcal{M}$ es numerable, la parte 2. nos dice que deben existir $x_1, \ldots, x_N$ elementos de X tales que si $A_j = [x_j]$ entonces $A_q \cap A_p = \emptyset$ para $p \neq q$ y $\bigcup_{k=1}^{N} A_k = X$. De esto se sigue que $\mathcal{M}$ es finita.

REFERENCIAS

1. Walter RUDIN, Real and complex analysis: MacGraw-Hill, New York, 1968.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia, S.A.

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
Cali, Colombia, S.A.

(Recibido en mayo de 1969)