40. Examen de Topología Algebraica (Magister) Matemáticas. I. Sean K_1 y K_2 dos complejos simpliciales. 1) Mostrar que $K_1 \cap K_2$ es un complejo simplicial, pero que generalmente $|K_1| \cap |K_2| \neq |K_1 \cap K_2|$. 2) Mostrar que $K_1 \cup K_2$ no es generalmente un complejo. 3) Mostrar que $K_1 \cup K_2$ es un complejo si $|K_1 \cap K_2| = |K_1| \cap |K_2|$, y que, en este caso, es verdad que $|K_1| \cup |K_2| = |K_1 \cup K_2|$. 4) Mostrar que la condición en la parte (3) se verifica si K_1 y K_2 son subcomplejos de un mismo complejo K.

II. Sean A un convexo de R^n, $V(A)$ la variedad afín engendrada por los puntos de A. 1) Mostrar que $\dim \overline{A} = \dim A$. Deducir de allí que $V(A) = V(\overline{A})$. 2) Mostrar que el interior de A relativamente a $V(A)$ no es vacío. 3) Mostrar que $y \in V(A)$ si y sólo si existe una recta D tal que $y \in D$ y $D \cap \overline{A}$ es un segmento verdadero.

41. Examen final Algebra Lineal (15142) Ingenierías. I. Definir: a) rango de una matriz; b) matriz antisimétrica; c) conjunto de vectores linealmente independientes; d) base de un espacio vectorial; e) dimensión de un espacio vectorial.

II. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcule A^{-1}.

III. Calcule

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

IV. Sea $\vec{x} = (1,2,1)$ un vector expresado en la base canónica $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Encuentre sus coordenadas respecto de la base $\vec{a}_1 = (1,1,0)$, $\vec{a}_2 = (1,0,1)$, $\vec{a}_3 = (1,1,1)$.

V. a) Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

calcule AB.

b) Calcule el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

42. <u>Examen parcial de Algebra Moderna I-II. Matemáticas.</u> 1. Demuestre que todos los grupos de orden $n = 1, 2, 3$, son isomorfos.

2. Mostrar que si $(a,m) = 1$ entonces $(x,m) = 1$ para todo $x \in \dot{a} = C_m(a) \in Z/(m)$. Llamemos $\mathbb{M}(m)$ al conjunto de todos los $\dot{a} \in Z/(m)$ tales que $(a,m) = 1$, y designemos card $\mathbb{M}(m)$ por $\varphi(m)$ (EULER). Mostrar que

a) $\mathbb{M}(m)$ forma un grupo multiplicativo para la multiplicación de clases de equivalencia.

b) Si $b \in \mathbb{M}(m)$, deducir $b^{\varphi(m)} \equiv 1$ (mód m) (FERMAT)

c) Si $m = p$ es un número primo, deducir $\varphi(p) = p-1$, y explicitar los elementos de $\mathbb{M}(p)$.

3; Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de grupos. Sea $A_i \subset X_i$ un subgrupo de X_i. Mostrar que el conjunto $A = \prod_{i\in I} A_i$ es un subgrupo de $\prod_{i\in I} X_i$ para la ley inducida por la de $\prod_{i\in I} X_i$. Considerando cada A_i como un grupo, mostrar que la ley del grupo producto $\prod_{i\in I} A_i$ coincide con la ley inducida sobre $\prod A_i$ por la de $\prod X_i$.

4. Mostrar que la familia $\underline{\underline{S}}$ de los sugbrupos de un grupo G es una familia de Moore. Sea $A \subset G$. Sea $\overline{A} = \{ x_1 \ldots x_n \; ; \; x_k \in AUA^{-1}, \; n \geq 0 \}$. Mostrar que $\overline{A}$ es el subgrupo enegedrado por A. En particular, si $A = \{a\}$, mostrar que $\overline{A} = \{ e, a, a^{-1}, a^2, a^{-2}, \ldots \}$. Deducir que $a = a^{-1}$ si y sólo si el orden de a es 1 ó 2.

<u>43. Examen Parcial de Matemática Moderna . Física.</u> 1. Sean E, F, G, tres $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales con bases B, B´, B´´, respectivamente. Si $u: E \to F$ y $v: F \to G$ son aplicaciones lineales, muestre que

$$M_{B''}^{B}(v \circ u) = M_{B''}^{B'}(v) M_{B'}^{B}(u).$$

2. Muestre que si todo vector $x \in \mathbb{K}^n$ es un vector propio de $A \in \underline{\underline{M}}_n(\mathbb{K})$ para algún valor propio λ, entonces $A = \lambda I_n$.

3. Sea P_3 el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo más 2, con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sean $B = \{1, X, X^2\}$ y $B' = \{1+X+X^2$,

$-2 - X + X^2, \ -1 + X + X^2 \}$ bases de P_3.

a) Halle la matriz de paso de la base B a la base B'.

b) Halle $M_{B'}^{B'}(D)$ donde D es la aplicación <u>derivada</u>, usando la matriz de paso de B a B' y la de paso de B' a B.

c) Halle el polinomio característico $C(\lambda)$ de D.

d) Verifique que $C(D) = 0$. Halle un polinomio $R(\lambda)$ de grado menor que el grado de $C(\lambda)$ y tal que $R(D) = 0$.

44. <u>Examen final de Cálculo IV (Ingenierías)</u>.

1.a) Halle una primitiva de

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} + e^{\operatorname{sen} x} \cos x + \sqrt{(x^2-1)}$$

b) Demuestre que

$$I(x) = \int_1^x \frac{2t.\ \log t}{(1+t^2)^2}\,dt = -\frac{\log x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\frac{2x^2}{x^2+1} \qquad (x>0)$$

y verifique que $\lim_{x\to+\infty} I(x) = \frac{1}{2}\log 2$, sabiendo que

$$\lim_{x\to+\infty} -(\log x)/(1+x^2) = 0.$$

2. Halle condiciones sobre α y β para que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 0 \\ 2x - y + z - u &= 1 \\ x + y - z - u &= 0 \\ x - y + z + \alpha u &= \beta \end{aligned}$$

tenga una única solución; en este caso, encuentre, en función de α y β las soluciones del sistema usando la regla de Cramer.

3.a) Sean

$$p(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_o$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_o$$

dos polinomios de grados $n+1$ y n ($n>1$), respectivamente. Usando división de polinomios, demuestre que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_{n+1}}{b_n}x + \frac{1}{b_n}\left(a_n - \frac{a_{n+1}b_{n-1}}{b_n}\right) + \varphi(x)$$

donde $\varphi(x) = 0$ ó $\varphi(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Si $\varphi(x) \neq 0$, deducir que la recta

$$y = \frac{a_{n+1}}{b_n} x + \frac{1}{b_n}\left(a_n - \frac{a_{n+1} b_{n-1}}{b_n}\right)$$

es una asíntota oblicua del gráfico de $y = p(x)/q(x)$.

b) Usar a) para encontrar a, b, c, tales que la recta $x+y-1=0$ sea una asíntota oblicua de la curva

$$y = (ax+bx^2+cx^3)/(1+2x-x^2),$$

y que además la recta tangente a esta curva en el origen se la recta $2x - y = 0$.

45. Examen Parcial de Algebra I. Matemáticas.

1. Si $x > 0$, $x \in \mathbb{Q}$, demuestre que $x^{-1} > 0$.

2. a) Demuestre el lema de Arquimedes para los enteros. b) Deduzca de a) el lema de Arquimedes para los racionales. c) Sea $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$; muestre que existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

3. Si, para $x \in \mathbb{Q}$,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

muestre que

a) $|x| = \text{máx}(x,-x)$; $|-x| = |x|$; $|x| \geq x$.

b) $|xy| = |x||y|$

c) $|x/y| = |x|/|y|$.

d) $|x^2| = |x|^2$.

e) $|x+y| \leq |x| + |y|$

4. Demuestre que el sistema de ecuaciones

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

donde $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$, $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 \in \mathbb{Q}$, tiene una solución única $(x,y) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.