EXAMENES UNIVERSITARIOS

CALCULO IV 15242

1). Determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \, n!}{n^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$

2). Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'' + 2y' = \operatorname{sen} x$

b) $x^3 y^3 - xy - y' = 0$

3). En el comienzo de la <<Fiebre de esmeraldas>> la población de Borbur era 365 habitantes. Desde entonces la población debería haber crecido proporcionalmente a e cada año, excepto por la alta rata de muertes «accidentales» que alcanzaba a una víctima por día entre cada 100 ciudadanos. Resolviendo una E.D. apropiada determinar como función del tiempo la población actual de Borbur t años después de los días de la fiebre de esmeraldas.

4). Verificar que el desarrollo en serie de Taylor de la función $\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ esta dado por

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (\,|x| < 1)$$

y que el desarrollo es válido para los valores de x indicados.

Julio 15/69. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional

1). Calcular el área de la superficie del sólido obtenido por revolución de la curva

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

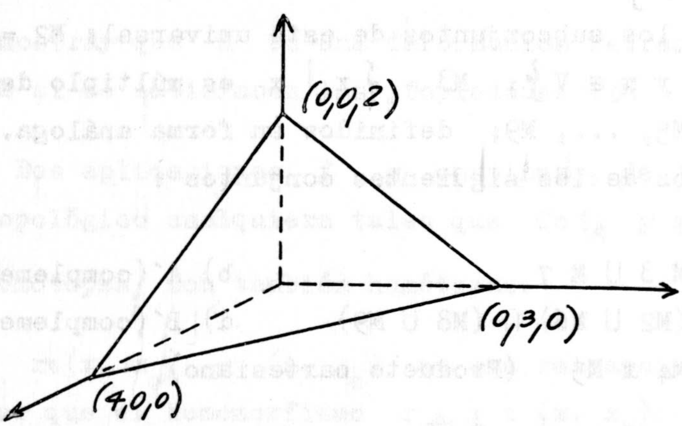
alrededor del eje x.

2). Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos

$P_1(\alpha, 0, 0)$ $P_2(0, \alpha, 0)$ $P_3(0, 0, \alpha)$

$\alpha \neq 0$

3). Hallar el centro de masa en la pirámide triangular de la figura



4). Encontrar las ecuaciones cartesianas de la tangente a la curva

$x = t \quad y = t^2 \quad z = \frac{2}{3} t^3$

en el punto correspondiente a $t - 1$

5). Calcular el volumen engendrado por la revolución de la curva

$y = a\,(e^{y/a} + e^{-y/a})$ alrededor del eje de las x en el intervalo $[0, b]$.

Julio 15/69. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional

NOTA: Las tres primeras preguntas son obligatorias.

1) Probar por inducción que :

$$(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^{2^n}) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q} \qquad q \neq 1$$

2) Hallar $\log_{25} 200$, conocido $\log_{10} 2 = 0.3$

3) Si $\tan \frac{x}{2} = A$, hallar el valor $\cos 2x$

4) Sea el conjunto universal $V = \{20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29\}$

Sean los subconjuntos de este universal: $M2 = \{x \mid x$ es múltiplo de 2 y $x \in V\}$; $M3 = \{x \mid x$ es múltiplo de 3 y $x \in V\}$; M4, M5, ..., M9; definidos en forma análoga. Enumere los elementos de los siguientes conjuntos :

a) $A = M3 \cup M7$ b) A' (complemento de A)

c) $B = (M2 \cup M6) \cap (M8 \cup M9)$ d) B' (complemento de B)

d) $C = M4 \times M5$ (Producto cartesiano)

5) La expresión $ax^2 + bx + c$ vale 3 cuando $x = 0$ y vale 1 cuando $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Determinar los valores de a, b, c.

6) Hallar el conjunto solución de la desigualdad :

$$\left| \frac{x}{4} + 6 \right| \geq 1/2$$

7) Una de las raices de la ecuación $x^3 - x^2 + hx + 4 = 0$ es 2. Hallar las demás raices.

8) Si $x = \frac{i-5}{2}$, expresar $\frac{1}{x+2} + i^3$ en la forma $a + bi$

Julio de 1969. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional

EXAMEN FINAL DE TOPOLOGIA ALGEBRAICA.

Julio de 1969

1) Si k^p designa el p-esqueleto de un complejo simplicial K, mostrar que $C_p(k)$ y $H_p(k^p, k^{p-1})$ son isomorfos.

2) Demostrar que $H_p(s_p, \overset{o}{s}_p)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ donde s_p es un p-simplejo.

3) Sean X un espacio topológico, A un subespacio de X.

a) Demostrar que A es un retracto de X si y solamente si se satisface la propiedad (α)

(α) Cada aplicación continua de A en un espacio topológico cualquiera admite una extensión a X.

b) Demostrar que A es una deformación retracto de X si y solo si se satisfacen las propiedades (α) y la (β)

(β) Dos aplicaciones f, g continuas, de X en un espacio topológico cualquiera tales que $f \circ 1_A$ y $g \circ 1_A$ son homótopas, son también homótopas.

c) Si $r: (X, x_o) \to (A, x_o)$ es una retracción punteada, mostrar que el homomorfismo $r_{\#}: \pi(X, x_o) \to \pi(A, x_o)$ es sobre.

Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional