MATEMATICA MODERNA EN SECUNDARIA

JEAN JACQUES PAROT

INDICE DE MATERIAS.

-

BOLETIN DE MATEMATICAS
VOLUMEN IV No. 1

INTRODUCCION

La introducción de las matemáticas modernas en la ensenanza secundaria tiene dos consecuencias principales:

1o.) Reprogramar a los maestros: La mayoría de los maestros no han tenido la oportunidad de estudiar las teorías que deberán enseñar, es necesario darles esta oportunidad.

2o.) Evolución Pedagógica: Todo profesor se dará cuenta rápidamente de que el curso ex-cátedra implica un fracaso, éste fracaso no viene de la materia enseñada sino del método.
No es suficiente que los alumnos miren y escuchen; ellos deben ser tambien partícipes. El hecho de actuar los alumnos en un mismo instante, implica una modificación completa de la pedagogía.

En el Liceo Francés Louis Pasteur de Bogotá, donde todos los profesores siguieron cursos de reprogramación se presentaron ciertas teorías en el nivel de primero bachillerato.

El presente trabajo intenta mostrar como se ha llevado a cabo ésta labor.

Robert Moussi

MATEMATICA MODERNA EN SECUNDARIA

jean jacques parot

CAPITULO I

INTERSECCION DE DOS CONJUNTOS

NOTA: La experiencia prueba que la noción de intersección es muchísimo más simple que la de reunión.

Las tres lecciones siguientes tienen por fin dar a conocer la noción de intersección de dos conjuntos.

la. Lección:

Ejercicio No. 1.

Se traza en el tablero una línea "Azul" y una línea "Roja" que se "cortan" (Vease Fig. 1)

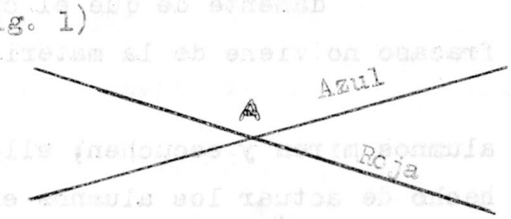


Fig. 1

(Con anterioridad, en la lección de los conjuntos, se habrá mostrado que una línea tal es un conjunto infinito de puntos).

Decidimos que cada línea representa una carretera; un alumno es llamado para que muestre el lugar donde las dos carreteras se cortan. - Este lugar corresponde a un punto A que llamamos punto de intersección de las dos líneas. Se necesita enseguida que los alumnos encuentren que el punto A tiene dos propiedades:

A es un elemento de la línea Azul.

A es un elemento de la línea Roja.

Ejercicio No. 2.

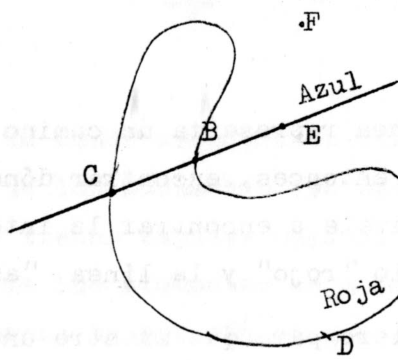


Fig. 2

Se traza en el tablero otra línea Azul y otra línea Roja que corta en varios puntos la Azul (Fig.2). Se llama a un alumno para que muestre donde la carretera Roja corta la carretera Azul. El alumno va probablemente a mostrar el punto B o el punto C se verificará que ese punto tiene las propiedades del punto A del Ejercicio No. 1. Luego se buscará el conjunto de los puntos que tienen las dos propiedades:

Pertenecer al conjunto de puntos Azules.

Pertenecer al conjunto de puntos Rojos.

Se considerará sucesivamente los puntos C, D, E, F,... para cada punto se hará la pregunta: Tiene éste punto las dos propiedades?. Que la respuesta sea sí o nó habrá que justificarla; por ejemplo: E no tiene las dos propiedades por que no pertenece a la línea roja.

Se concluirá enseguida según los casos si el punto pertenece (o no pertenece) a la intersección de los dos conjuntos. Es conveniente considerar tantos puntos como sea necesario para que no quede ninguna duda en los alumnos. Entonces se preguntará: Cúal es la intersección de la línea azul y la línea roja?: se encontrará (C.B.)

Ejercicio No. 3.

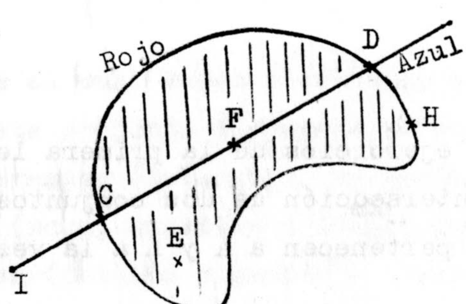


Fig. 3

Se dibuja en el tablero una línea "azul" y un dominio "rojo" .(Fig.3)

Se podrá admitir que la línea representa un camino y el dominio un campo. El problema puede ser entonces, encontrar dónde el camino corta el campo: problema que equivale a encontrar la intersección de dos conjuntos de puntos; el dominio "rojo" y la línea "azul".

Se pasará un alumno al tablero para que muestre un punto que pertenece a la vez a los dos conjuntos. Es muy posible que el diga C ó D. Se verificará que ese punto tenga bien las dos propiedades.

Pertenecer a la línea azul.

Pertenecer al dominio rojo.

Sucesivamente para los puntos C, D, E, F, G, H, I se hará la pregunta: tiene éste punto las dos propiedades y luego se colocará en blanco el conjunto de puntos que pertenece a la intersección de dos conjuntos (se buscará de esta forma la porción de curva comprendida entre C y D).

Ejercicio No. 4.

Se volverá a empezar con ejericios parecidos a los anteriores con figuras del tipo:

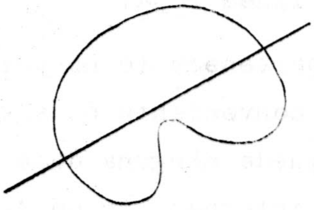


Fig.4

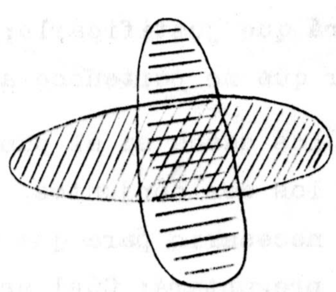


Fig.5

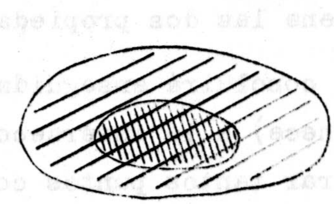


Fig.6

2a. Lección.

Revisión.

Se vuelve a ver uno de los ejercicios de la primera lección que consiste en el hecho de que la intersección de dos conjuntos A y R es el conjunto de los elementos que pertenecen a A y R a la vez.

Ejercicic No. 1.

Esta vez vamos a coger un conjunto de base más vivo: el conjunto de los alumnos de la clase de donde escogeremos dos sub-conjuntos, por ejemplo: el conjunto A de los muchachos (en una clase mixta) el conjunto B de los alumnos que tienen zapatos negros, los alumnos escribirán en el tablero la lista de los elementos de A y la lista de los elementos de B. Todos los alumnos se subirán en una silla uno despues de otro y se discutirá para cada uno de ellos si pertenece o nó a la intersección de los conjuntos , y se hará al mismo tiempo la lista de los elementos de la intersección I. Se verificará que todo elemento de I aparezca en la lista de elementos de A y en la lista de elementos de B.

Ejercicio No. 2.

Se volverá a empezar un ejercicio similar cambiando los conjuntos A y B.

3a. Lección.

Revisión:

Volvamos a coger el ejercicio de la la. Lección, por ejemplo uno donde hubiera dos dominios presentando la siguiente situación.

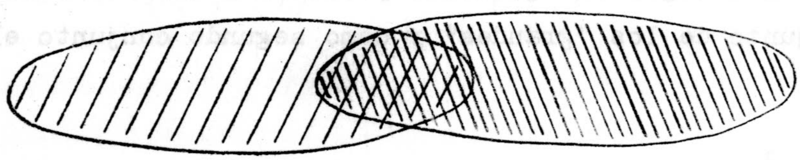


Fig. 7

Ejercicio No. 1.

El conjunto sobre el cual vamos a trabajar es el conjunto de los bloques lógicos. Este conjunto comprende 48 elementos todos diferentes. Hay 4 formas diferentes (tríangulo, rectángulo, cuadrado, disco) tres colores posibles (rojo, amarillo y azul), dos tallas (pequena y grande), dos espesores (delgado y grueso). Para el primer ejercicio nosotros trabajamos en el tablero de fieltro sobre el cual se adhiere facilmente un papel especial en el cual se cortarán los bloques logicos delgados (conjunto que llamaremos L y que contiene 24 elementos).

.-.

Se representa sobre el tablero de fieltro dos circulos secantes bastan te grandes (Fig.8) y se colocan todos los bloques sobre el tablero (fuera de los circulos).

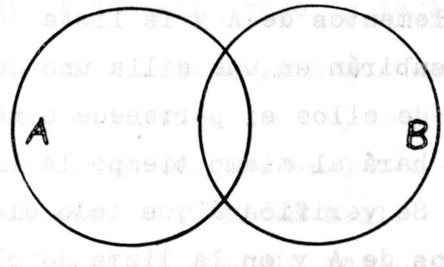


Fig. 8

Se pide entonces poner dentro del círculo A todos (y solamente) los bloques azules y dentro del círculo B todos (y solamente) los rectángulos. Cada alumno podra venir a examinar el caso particular de un bloque y explicar el lugar donde lo pone y porqué. Sera fácil hacer descubrir a los alumnos donde se encuentra la intersección del conjunto de los azules y del conjunto de los rectángulos.

Ejercicio No. 2.

Se puede volver a coger el ejercicio precedente tomando como primer conjunto el conjunto de los "grandes" y como segundo conjunto el de los triángulos.

Ejercicio No. 3.

Es preferible coger el primer ejercicio de manera de obtener una intersección vacía; basta para ello considerar el conjunto de los triángulos y el conjunto de los discos.

Ejercicio No. 4.

Los alumnos se dividen en grupos de 3. Cada grupo pone sobre la mesa; (estas mesas son tambien tableros) un conjunto de bloques lógicos y traza los círculos como los que estaban sobre el tablero de fieltro. Un alumno escoge un primer conjunto y otro el segundo. Esta escogencia se hace, pues se trata de colocar convenientemente todos los bloques de ma nera a encontrar la intersección de dos conjuntos. Para ello puede procederse así :

Un alumno coge un bloque y pregunta a otro cómo colocarlo convenientemente. Este último deberá explicar a los otros dos porqué escogió ese lugar. Para el bloque siguiente se cambian los papeles. El juego se termina cuando todos los bloques han sido convenientemente colocados.

C A P I T U L O I I

RELACIONES EN UN CONJUNTO

Lección la.

Grafos de una relación; representación sagital.

Ejercicio No. 1.

Se presentan en el tablero varios bloques, por ejemplo:

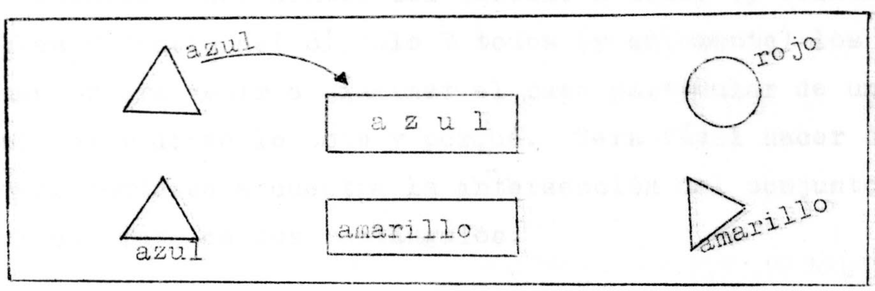


Fig. 9

En este conjunto de base que llamamos E, se considera entre los elementos de E la relación: "tener el mismo color que". Se podría entonces escribir por ejemplo: "el triángulo pequeno de izquierda arriba tiene el mismo color que el rectángulo pequeno azul del medio del tablero". Para evitar escribir frases tan largas se admite que se pueda reemplazar la frase por una flecha que va del triángulo pequeno al rectángulo del centro.

Atención: de la misma forma que sería inútil escribir dos veces la misma frase, no se pondrá más de una flecha entre dos elementos A y B. Despúes de haber explicado lo que precede, se pide a los alumnos de poner al máximo de flechas posibles; habrá algunos que hallarán que se pueden poner flecha sobre el elemento en si mismo. (bucle).

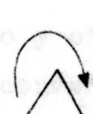


Fig. 10

Cuando terminemos se puede decir que hicimos la representación sagital de la relación.

Ejercicio No. 2.

En el tablero se representa un conjunto F de números y por ejemplo se considerá la relación "es inferior a" . Se pide hacer el grafo de esta relación sobre una hoja de papel.

Atención: esta vez no hay flechas sobre el elemento en si. (Los alumnos pueden discutir por grupos de 2 o de 3 los grafos obtenidos).

Ejercicio No. 3.

Sobre las "mesas tableros" cada grupo de los alumnos coloca un conjunto G de más o menos 7 bloques lógicos.

Se considera la relación "tener una diferencia". Cada bloque tiene cuatro propiedades(*) se dice que 2 bloques tienen una diferencia si tienen 3 propiedades comunes. Entonces se podrá poner una flecha que tenga por origen el pequeno triángulo azul delgado y por extremidad el pequeno triángulo rojo delgado. Un alumno A del grupo traza una flecha y explica a los otros dos (B y C) porqué trazó esa flecha. B y C despúes hacen lo mismo que hizo A y así continúa el ejercicio.

Ejercicio No. 4.

Se pide a los alumnos que propongan un ejercicio poniendo atención al hecho de determinar bien el conjunto y la relación a estudiar.

Por ejemplo: en el conjunto de los bloques lógicos se pueden considerar las relaciones "tener la misma forma geométrica" o "tener dos diferencias". En el conjunto de los alumnos la relación: "...pesa más que..".

Lección 2a.

Propiedades de una relación.

A). Refrexividad. Se pide a los alumnos que consideren los grafos de la Lección 1a. y en particular la presencia de las flechas en si mismo

(*) Nos interesan solamente, las cuatro propiedades consideradas en el Capítulo I .

de los elementos. Se constata que existen grafos para los cuales, - para cada elemento hay una flecha sobre el elemento en sí. Para enunciar esta propiedad, se dirá que la relación es reflexiva.

Se buscará cuales son, en las relaciones estudiadas en el curso de la Lección la., aquellas que son reflexivas. Teniendo en cuenta que, basta con que un elemento no tenga flecha sobre si mismo para que la relación no sea reflexiva, se pedirá a los alumnos ejemplos de relaciones reflexivas y no reflexivas.

Se mostrará que en un conjunto dado se pueden considerar relaciones reflexivas y no reflexivas. Se buscará en vano una relación que sea reflexiva en un conjunto y no reflexiva en otro.

Lección 3a.

Propiedades de una relación.

B) Transitividad. Se pone en el tablero el esquema siguiente:

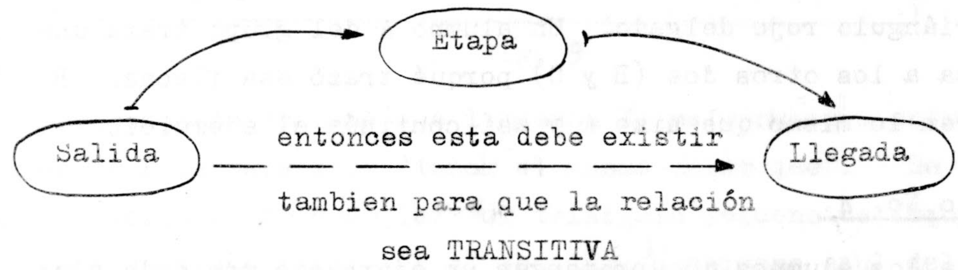


Fig. 11

Atención: La salida, la etapa y la llegada no son necesariamente puntos diferentes.

Consideramos los grafos de las relaciones de la Lección la.; cuáles - son aquellos que son transitivos, aquellos que no son. Encuentre - ejemplos de relaciones transitivas, de relaciones no transitivas. En un mismo conjunto se puede definir una relación transitiva y una relación no transitiva: los alumnos deben encontrar ejemplos. Como es -

suficiente conocer el grafo para concluir si una relación es transitiva o nó, consideremos los diferentes grafos. Pero cómo reconocer si una relación no es transitiva?. Será de la siguiente manera: si se puede encontrar dos flechas sucesivas Salida-Etapa y Etapa-Llegada sin que exista una tercera (o una sobre el elemento en sí) que permita ir directamente de la salida al punto de llegada o sea que si tenemos en el grafo:

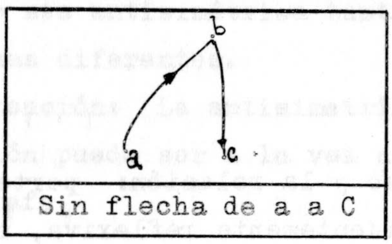


Fig. 12

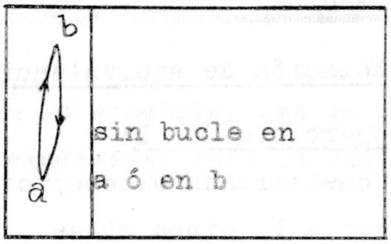


Fig. 13

Se podrá entonces proponer un grafo; estudiar si la relación correspondiente es transitiva, sino comó modificar el grafo para obtener una relación transitiva?. Es conveniente insistir sobre el criterio para reconocer si una relación no es transitiva.

Lección 4a.

Propiedades de una relación.

C). Simetría: Se vuelve a dibujar en el tablero los grafos del 1o. y 2o. ejercicios de la Lección 1a. Compare los dos grafos: qué diferencias existen?.

Los alumnos van a responder: hay uno en que hay una flecha sobre el elemento en sí y en el otro no hay. Es ésta la única diferencia?. En el segundo grafo, entre dos puntos diferentes no hay nunca más de una flecha mientras que en el primero entre dos puntos diferentes no hay ninguna o hay dos flechas, o sea, que si existe una flecha que va del punto A al punto B, existe obligatoriamente una que va de B a A: una relación tal es simétrica. De ahí la definición: Una relación es simétrica si, entre dos puntos diferentes no existe una flecha simple.

Para que una relación no sea simétrica, basta con que existan dos puntos diferentes unidos por una sola flecha. Se estudiará la simetría de las relaciones de las cuales ya trazamos los grafos. Hacer encontrar a los alumnos ejemplos de relaciones simétricas y de relaciones no simétricas. Hacer dibujar por un alumno el grafo de una relación no simétrica; cómo completar ese grafo para obtener una relación simétrica?; poniendo el menor número de flechas posibles.

Lección 5a.

Relación de equivalencia.

Ejercicio No. 1:

Consideremos el conjunto de alumnos del Liceo y la relación: pertenecer a la misma clase . Esta relación es evidentemente reflexiva, simétrica y transitiva. Se conviene entonces de decir que es una relación de equivalencia. Cuáles son los alumnos que están en relación con Pedro Sánchez? Evidentemente todos los alumnos de la clase. Cuando una relación es una relación de equivalencia (es decir si es reflexiva, simétrica y transitiva) se llamará clase de á (que se escribe $\acute{\dot{a}}$) el conjunto de los elementos que están en relación con á (se puede decir tambien equivalentes a á). Se harán entonces las siguientes aclaraciones:

1). Si $\acute{\dot{a}}$ está en relación con $\acute{b}$ entonces $\acute{\dot{a}} = \acute{\dot{b}}$
2). Si $\acute{b}$ pertenece a $\acute{\dot{a}}$ entonces $\acute{\dot{a}} = \acute{b}$
3). Dos clases diferentes tienen una intersección vacía (Un alumno no pertenece a dos clases diferentes).
4). Una clase puede estar representada por no importa cual de sus elementos: si Pedro Sánchez y Juan López están en la misma clase, la "clase de Pedro Sánchez" y la "clase de Juan López" representan un mismo conjunto.
5). Una relación de equivalencia permite clasificar los elementos de un conjunto E por los subconjuntos separados (las clases), de los cuales la reunión es el conjunto E.

Ejercicio No. 2:

Se vuelven a coger los grafos ya trazados: corresponden ellos a relaciones de equivalencia? Si es así, se rodean las clases, cuántas clases hay?.

Lección 6a.

Propiedades de una relación.

D). Antisimetría. En la cuarta lección se aclarará que, en uno de los grafos, había en todas partes flechas dobles, se decía que la relación correspondiente era simétrica. En el otro grafo, al contrario no había sino flechas simples es decir: entre dos puntos diferentes no hay sino una flecha. Una relación tal es antisimétrica. Para que una relación no sea antisimétrica basta conque existan dos puntos unidos por dos flechas diferentes.

Atención: La antisimetría no es la negación de la simetría; una relación puede ser a la vez no simétrica y no antisimétrica, como la del grafo

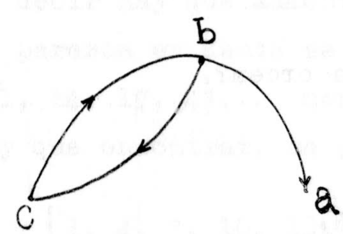


Fig. 14

Se estudiará la antisimetría de las relaciones de las que ya se trazó el grafo. Se preguntarán ejemplos de relaciones que no son antisimétricas.

Lección 7a.

Relación de orden.

Ejercicio No.1.

Se consideran 5 alumnos de estaturas diferentes y en este conjunto, la relación. "es al menos igual de alto que". Se aclara que esta relación permite clasificar según un orden los elementos de este conjunto si convenimos de poner a antes b si a es al menos igual de alto que b. Cúales son las propiedades de esta relación? Es reflexiva, transtitiva y antisimétrica. Se allamará relación de orden toda relación que tenga estas tres propiedades a la vez.

Ejercicio No. 2.

Se cogen de nuevo los grafos ya trazados; corresponden a ellos a relaciones de orden? Se hará notar lo siguiente:

a). Consideremos la relación "es inferior o igual a" en el conjunto (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10): es una relación de orden; si se cogen 2 elementos cualesquiera del conjunto, se puede siempre ir de uno al otro siguiendo las flechas del grafo (es una relación de orden total).

b). Consideremos la relación "divide a" en el mismo conjunto; es una relación de orden pero esta vez no existe un camino uniendo 3 a 5 siguiendo las flechas del grafo (es una relación de orden parcial).

Ejercicio No. 3.

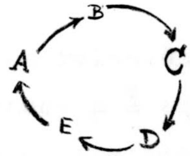
Es la inclusión una relación de orden?.

Lección 8a.

Relaciones de equivalencia en N.

Ejercicio No. 1.

Se toma un conjunto de cinco alumnos que se colocan en circulo.



El maestro empieza a contar 1 mostrando a B, 2 mostrando a C, 3 mostrando a D, etc. 5 en A, 6 en B, etc...; y hace las siguientes preguntas: A quién va a corresponder el 8?, el 2?, el 13?, el 7?, el 17?, el 22?, el 27?, el 37?, el 107?.

Los alumnos van a terminar por encontrar rapidamente puesto que se dan cuenta que cuando un número se termina por 2 o por 7 éste corresponde a C. Dicho de otra forma, encontraron las clases de equivalencia; falta hacer aparecer la relación a la cual pertenecen estas clases.

Se podrá convenir con los alumnos que se llame clase de B todos los números que corresponden a B, de la misma forma para C y para los otros.

Se pregunta entonces a cuál clase pertenecen 32? 41? 53?.

Ejercicio No. 2.

Se toman 3 alumnos A, B, C, el alumno cuenta 1 mostrando a B, 2 para C, 3 para A, 4 para B, etc. y hace las siguientes preguntas:

a). A quién corresponden 2? 7? 12? 17?. Estas preguntas tienen por fin el de llevar a los alumnos a pensar que la ley que ellos habían establecido antes: para reconocer a qué clase pertenece un número, basta con mirar el número con el cual termina , no es válida.

b). A quién corresponden 7? 10? 13? 16? 46?. **Esto para llevar** a los alumnos a pensar que para encontrar la misma persona hay que contar de 3 en 3, es decir hay que aumentar de un múltiplo de 3; en el caso en que ésto no parezca evidente se puede volver a coger una serie parecida: 5, 8, 11, 14, 17, 47... con el fin de guiar a los alumnos hacia la ley que hay que encontrar, se podrán buscar los elementos de la clase de B.

$$B = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots\}$$

y preguntar cuál propiedad común tienen estos números. En el caso en el cual esto no sea suficiente se pedirá que busquen los restos de las divisiones de estos números por 3. Siendo el resto 1, se podrá llamar por 1 la clase de B.

Tiénen los elementos de la clase de C una propiedad parecida?. Cómo se podrá llamar la clase de C? y la clase de A? Cuántos restos posibles existen en la división Euclidiana por 3? Cuántas clases hay? Qué relación existe entre dos elementos de la misma clase? La relación es: tienen el mismo resto en la división por 3 .

Ejercicio No. 3.

Se toman los 5 alumnos del ejercicio No. 1, se pregunta a B de enumerar los primeros elementos de su clase. Cuál es la relación que hay entre estos elementos? Es posible encontrar una relación parecida a aquella encontrada en el ejercicio No. 2? Evidentemente esta vez la relación es: tener el mismo resto en la división por 5 . Cuántos son los restos posibles? El mismo número que el número de clases.

.-.

Es conveniente insistir sobre el hecho que en los dos casos es el mismo conjunto N que se considera pero que se trata de dos relaciones diferentes que son parecidas.

Ejercicio No. 4.

Se considera ahora el conjunto N y en este conjunto la relación tener el mismo resto en la división Euclidiana por 7 . Cuántas clases de equivalencias existen? Dar algunos elementos de la clase de 36. Es que existe un elemento que pertenezca a la vez a la clase de 1 y a la clase de 2? Verificar que la relación considerada es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir una relación de equivalencia.

Ejercicio No. 5.

Se considera ahora el conjunto N y en este conjunto la relación tener el mismo resto en la división Euclidiana por 2 . Cómo llamamos comunmente la clase de 0? . La clase de 1?.

.-.

CAPITULO III

DE LOS CONJUNTOS A LA NOCION DE NUMERO.

Lección 1a. y 2a.

Biyección entre dos conjuntos:

Juego No. 1: Se considera un grupo de 5 alumnos por ejemplo. Antes, sobre 5 hojas diferentes, se escribirá el nombre de cada uno de estos alumnos. Tenemos entonces dos conjuntos: el conjunto E de los 5 alumnos y el conjunto F de los nombres. Se pide que cada alumno vaya y busque la hoja que le corresponde; cuál es la relación que existe entre un elemento de E y uno de F? es: "se llama", se puede entonces esquematizar la situación de la forma siguiente:

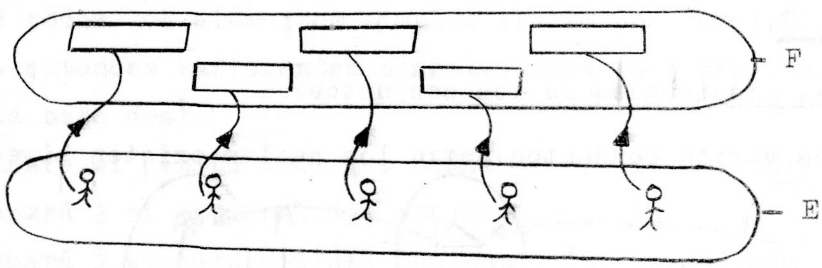


Fig. 15

Se hace una flecha cada vez que se pueda escribir "se llama."

Se notará que:

1o.) de cada elemento de E sale una flecha y una sola.

2o.) a cada elemento de F llega una flecha y una sola.

Cada vez que una relación entre dos conjuntos admita como representación un esquema con estas dos propiedades se dirá que es una biyección.

Juego No. 2: Sobre las mesas-tablero cada alumno coloca de un lado el conjunto E de los bloques lógicos azules y del otro el conjunto F de los bloques lógicos amarillos. Se considera la relación de E a F definida por: "tiene una y una sola diferencia". Cada alumno dibuja todas las flechas posibles, despúes de lo cual constata que el grafo tiene las propiedades mencionadas anteriormente.

Juego No. 3: Entontrar ejemplos de biyecciones. Tener cuidado de hacer notar: conjunto de salida, conjunto de llegada y la relación.

Juego No. 4: Se considera E = (0, 1, 2, 4) y F = (0, 1, 3) y la relación «... es el posterior de ...». Hacer el grafo. Es una biyección? Porqué?.

Juego No. 5: Se considera E = (Bogotá, Cali, Berlin, París, New York) y F = (Alemania, Colombia, Francia, U.S.A., China) y la relación «... se encuentra en ...». Hacer el grafo. Es una biyección? Porqué?.

Juego No.6: Se considera E = (Colombia, Italia) y F = (Atlántico, Pacífico) y la relación «... tiene costas en el ...». Hacer el grafo. - Es una biyección? Porqué?.

Juego No. 7: Encontrar ejemplos de relaciones que no sean biyecciones.

Lección No. 3.

Los números, propiedades de los conjuntos.

Consideremos varios conjuntos entre los cuales existen biyecciones.

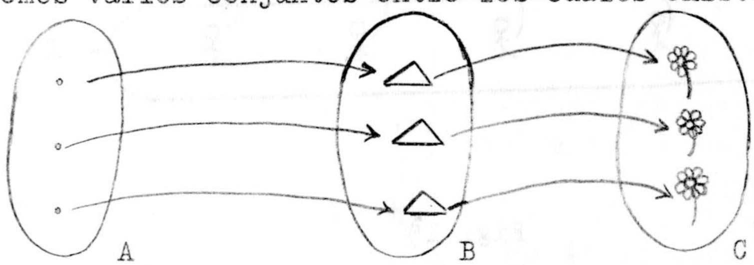


Fig. 16

Se dirá entonces que los conjuntos son equipotentes. Cuáles son las propiedades de la relación «... es equipotente a ...».

Es reflexiva: Cualquiera que sea el conjunto E considerado, existe una biyección entre E y E; la aplicación idéntica (que a un elemento X hace corresponder el mismo elemento X).

Es simétrica: Si existe una biyección de E a F es posible establecer una de F a E (sería la aplicación recíproca por ejemplo). Se ilustra esta situación.

.-.

Es transitiva: Se muestra sobre un ejemplo que:

-si existe una biyección de A a B

y

-si existe una biyección de B a C

entonces existe una biyección de A a C.

Entonces la relación « ... es equipotente a ... » es una relación de equivalencia. Una clase de equivalencia es el conjunto de los conjuntos que son equipotentes; se dirá que tienen el mismo cardinal (se dirá el mismo número si se puede establecer una biyección entre el conjunto y un subconjunto de N, conjunto de los enteros naturales). Se plantea entonces el problema de la representación de este cardinal.

Se llamará 0 el cardinal del conjunto vacío.

Se llamará 1 el cardinal del conjunto $\{0\}$

(Entonces todos los elementos simples tienen por cardinal 1). Se tendrá desde entonces suficientes símbolos para escribir todos los números (en la base dos).

Prácticamente el hábito hace que nosotros utilicemos otro símbolos.

Se llamará 2 el cardinal del conjunto $\{0, 1\}$

Se llamará 3 el cardinal del conjunto $\{0, 1, 2\}$ etc.

Es evidente que, si no se establece ninguna convención de escritura, habría tantos símbolos como clases de equivalencia, es decir una infinidad. De esto resulta la necesidad de poner al punto un sistema de numeración.

Lecciones No. 4 y siguientes.

La numeración. Todas las bases.

Presentación del método que yo inventé y que es utilizado con éxito desde las clases de kinder del Liceo Francés Louis Pasteur de Bogotá.

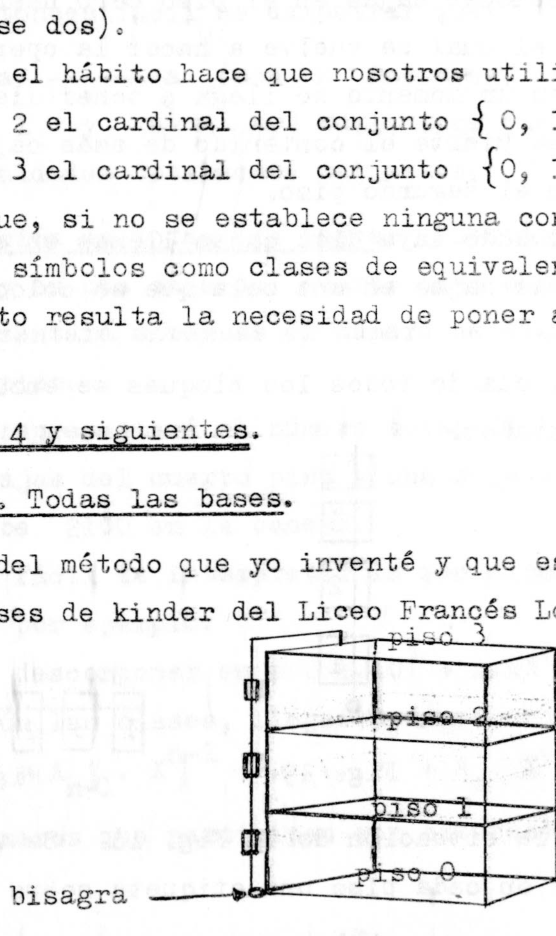


Fig. 17

El contador (en toda base) se presenta como un estante al cual está fi ja una tabla que gira alrededor de una bisagra (Fig. 17)
Nos proponemos encontrar la propiedad numérica de un conjunto de bloques (contar los bloques) en las diferentes bases.
Para esto disponemos del contador en toda base y de unas cajas transparentes de plástico.

a). <u>En la base 10</u>: Se toma un bloque que se pone en una caja en el piso cero.

(Se verá después que, para definir las potencias, es preferible usar la terminología francesa y llamar primer piso a lo que en Colombia se designa con segundo piso).
Se hace la misma operación hasta que en el piso cero haya diez cajas, entonces se pone el contenido de estas diez cajas en una sola caja en el primer piso.
Se vuelve a empezar a colocar cajas en el piso cero hasta que haya de nuevo diez, momento en el cual se vuelve a hacer la operación anterior.
Se continúa así. Si, en un momento se llega a tener diez cajas en el primer piso, entonces se vierte el contenido de esas cajas en una sola caja que se colocará en el segundo piso.
De una forma general, cuando haya diez cajas llenas en el piso n, se vertirá el contenido de esas cajas en una sola que se colocará en el piso n + 1.
Se detendrá el proceso, cuando todos los bloques se encuentren en cajas que se hallan en el contador.

1

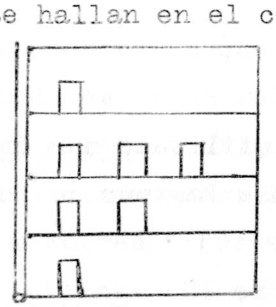


Fig. 18

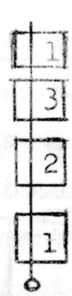


Fig. 19

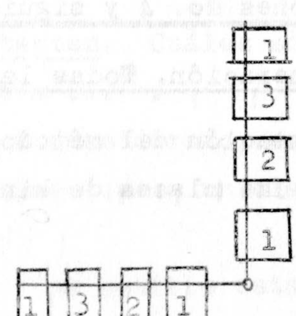


Fig. 20

Supongamos que tenemos la situación de la Fig. 18. Se va a poner sobre la tabla que gira y en cada piso una etiqueta sobre la cual está escrito el número de cajas que hay en el piso: en el ejemplo anterior se obtendrá la situacion de la Fig. 19. Para obtener, siguiendo la escritura convencional, el número de elementos del conjunto, bastará con hacer girar la tabla (Fig.20) y obtendremos entonces 1321 .

b). En la base 3: Se utiliza el mismo contador; se pone un bloque en una caja que se coloca en el piso cero, y se sigue colocando cajas hasta que haya 3 cajas. Entonces se vierte el contenido de estas 3 cajas en una sola que se coloca en el primer piso.

Se sigue exactamente el mismo método que el seguido para la base diez, pero aquí, cuando haya tres cajas llenas en el piso n, se vertirá el contenido de las tres cajas en una sola que se colocará en el piso n+1.

c). Las Potencias: Se podrá dar la definición general siguiente: a^n es el número de elementos que hay en una caja del piso n en la base a .

La ventaja de esta definición es que el alumno esta habituado a ver y construir conjuntos que tienen por propiedad numérica que "son una potencia". Será entonces fácil de demostrar que:

$a^n = a.a.a. ------ a$ (con n factores)

En fin $a^o = 1$ y $a^1 = a$, cualquiera que sea el a considerado, parecerán igualdades totalmente naturales.

d). La numeración de todas las bases: Puesto que 3^4 representa el número que hay en una caja del cuarto piso cuando se cuenta en la base 3

2×3^4 representará entonces el número de elementos que hay en dos cajas en el cuarto piso.

$2 \times 3^4 + 3^3$ representará el número total de bloques que hay en la reunión de dos cajas del cuarto piso y una caja del tercer piso. Este número se escribe 2100 en la base 3.

Será entonces fácil de interpretar lo que significa un número escrito en la base 10 por ejemplo:

1324 se puede descomponer en : $1.10^3 + 3.10^2 + 2.10^1 + 4.10^o$.

Se podrá, según las clases, llegar a expresiones de este tipo:

$$A_n . X^n + A_{n-1} . X^{n-1} + ... + A_o . X^o$$

(Todos los números que participan son enteros).

-.-

C A P I T U L O   I V

EL CONCEPTO DE GRUPO.

Rotaciones alrededor de un eje.

Juego No.1: En el patio se traza un rectángulo que tenga 2 m de largo por 1,60 m de ancho.

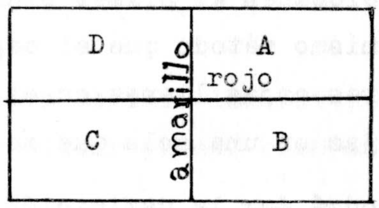


Fig. 21

Este rectángulo esta dividido en cuatro pequenos rectángulos por una recta roja y por una recta amarilla. El profesor se coloca en el punto de intersección O de estas dos rectas. En cada rectángulo se coloca un alumno. El profesor pone en el suelo en el punto O una hoja de cartón que es un esquema de la situación inicial: El rectángulo con los ejes de color colocados en las mismas direcciones que los mismos que los del suelo y, en cada rectángulito, las iniciales de los alumnos que nosotros llamamos A, B, C, D, (Fig.21) además sobre el reverso figuran también los ejes y las iniciales.

El profesor dice: Yo roto rojo, entonces los alumnos deben saltar por sobre el eje rojo. Para verificar que los alumnos no se han equivocado, el profesor voltea la hoja de carton alrededor del eje rojo y la coloca de nuevo en el piso verificando. Enseguida se efectúan diversas rotaciones.

Cuando parezca que todos han comprendido se divide la clase en grupos de cinco (un alumno reemplazará al profesor en su punto).

Juego No. 2: Se vuelve a tomar las mismas posiciones que para el 1er. juego pero esta vez el que conduce el juego anuncia varias rotaciones sucesivas. Se trata entonces de ir con el menor número de rotaciones a la posición final. El que dirige el juego dirá por ejemplo:

Amarillo-amarillo, cuál es el resultado de estos dos movimientos? Todo pasa como si no se hubiera hecho nada. Se dirá que el producto de estas dos rotaciones es la rotación nula que se notará por T_o.

Que pasará si se efectúa rojo-rojo?

Se anuncia enseguida rojo-amarillo; se vuelve a tomar la posición inicial y se anuncia amarillo-rojo. Se puede notar que obtenemos la misma posición final si hacemos amarillo-rojo o rojo-amarillo; conclusión: el orden no importa.

Se vuelve a tomar la posición inicial y se anuncia:

Amarillo-rojo-rojo-amarillo

Rojo-rojo-rojo-rojo-amarillo

Amarillo-amarillo-rojo-rojo-amarillo

Conclusión?. Si hay un número par de rotaciones rojas no cuentan. Pasa lo mismo con las amarillas? Se anuncia en seguida un número de rotaciones cada vez mas grandes; hay que encontrar como ir de la posisión inicial a la posición final haciendo el número menor de rotaciones.

<u>Juego No. 3</u>: Se da una posición inicial y una posición final; encontrar varias maneras de ir a la posición final desde la posición inicial.

<u>Juego No. 4</u>: Se podrá volver a tomar en clase los ejercicios anteriores de la siguiente manera; cada alumno dispone de una hoja de papel transparente sobre la cual se ha trazado el eje rojo y el eje amarillo y atribuído un número a cada uno de los rectángulos (Fig.22)

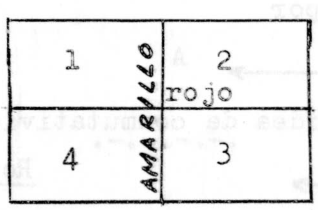
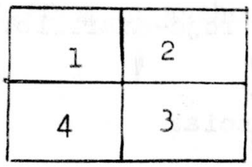


Fig.22

La posición inicial será la de la Fig.22 y la llamaremos A.

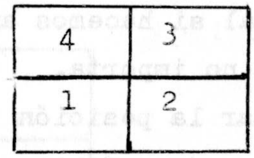
Se traza con tiza un cuadrado que encierre la posición inicial de la hoja sobre la mesa. El alumno tiene el derecho de levantar la hoja, hacerla rotar alrededor de la recta roja o de la recta amarilla y de ponerla enseguida sobre la mesa en el cuadrado que fue trazado con -tiza.

Cúales son todas las posiciones que puede ocupar la hoja?.



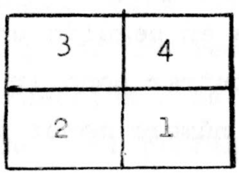
Posición A

Fig.23



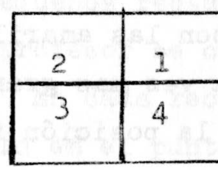
Posición B

Fig.24



Posición C

Fig.25



Posición D

Fig.26

Se puede entonces poner los problemas similares siguientes:

1). Qué se va a obtener si se efectúa una rotación **roja empezando** por la posición C? lo que se esquematiza por

$$C \xrightarrow[\theta]{\text{Rot roja}} ?$$

2). Qué rotación permite pasar de la posición D a la posición A? lo que se esquematiza por

$$D \xrightarrow{?} A$$

3). Se puede encontrar la idea de conmutatividad:

$$A \xrightarrow[\theta]{\text{Rot amarilla}} \qquad \xrightarrow[\theta]{\text{Rot rojo}}$$

$$A \xrightarrow[\theta]{\text{Rot rojo}} \qquad \xrightarrow[\theta]{\text{Rot amarilla}}$$

Conclusión?

$$B \xrightarrow[\theta]{\text{Rot amarilla}} \qquad \xrightarrow[\theta]{\text{Rot rojo}}$$

$$B \xrightarrow[\theta]{\text{Rot rojo}} \qquad \xrightarrow[\theta]{\text{Rot amarilla}}$$

Conclusión?

Misma operación empezando por las posiciones C, D, Conclusión general?. El producto de dos rotaciones es independiente del orden en el cual se efectuan.

4). T^o es una rotación que no cambia nada. Se da, por ejemplo una rotación amarilla, es que existe una rotación que permita volver a la posición inicial; es decir si existe una rotación tal que el producto de dos rotaciones sea T^o ?.

Se encuentra así la idea de elemento simétrico.

5). En una serie de rotaciones se consideran varias rotaciones sucesivas. Estas rotaciones sucesivas son equivalentes a una o dos rotaciones. Qué pasará si se reemplazan varias o todas las rotaciones sucesivas por una o dos rotaciones equivalentes?

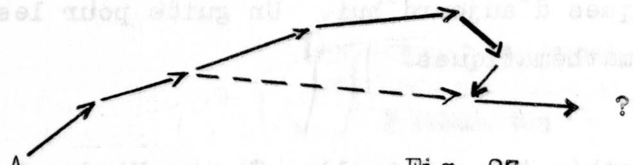


Fig. 27

Se obtiene el mismo resultado reemplazando varias rotaciones sucesivas por una o dos rotaciones equivalentes.

.-.-.-.-.

B I B L I O G R A F I A

A. Revuz, Mathématique moderne, Mathématique vivante, O.C.D.L. 65 rue Claude Bernard, París.

Z. P. Dienes, La mathématique moderne dans l'enseignement primaire, O.C.D.L., París.

Les premiers pas en mathématique, O.C.D.L. París.

Papy, Mathématique moderne.

Irving Adler, Initiation à la mathématique d'aujourd'hui O.C.D.L., París.

Nicole Picard, A la Conquête du nombre, C.P., CE_1, CE_2 publie par O.C.D.L.

O.C.D.E., Mathématiques nouvelles, 2 rue Andre Pascal, París 16eme.

Un programe moderne de mathématiques pour l'eseignement secundaire.

Les mathématiques d'aujourd'hui. Un guide pour les maitres.

Historie des mathématiques.

Liceo Francés

Louis Pasteur, Bogotá, Mathématique actuelle, Tercer Kinder I.

Mathématique actuelle, Tercer Kinder I, libro del Profesor.

Mathématique actuelle, Quinto elemental I.

o-o