Boletín de Matemáticas
Vol. XVIII Nº 1,2,3, (1984) **APORTES**

INTEGRAL SEGUN RIEMANN PARA FUNCIONES NO-ESTANDAR

Yu Takeuchi - Ignacio Mantilla

§1. INTRODUCCION.

Sea $\mathcal{F}^*$ un ultrafiltro regular en $\mathbb{N}$; en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se establece una relación de equivalencia $\sim$ así:

$$(a_n)_n \sim (b_n)_n \qquad \text{si} \quad \{n \in \mathbb{N} / a_n = b_n\} \in \mathcal{F}^*.$$

El conjunto cociente $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim$ es el cuerpo de números no-estándar y sus elementos, las clases de equivalencia, son los números no-estándar. Denotemos por $[(a_n)_n]$ el número no-estándar representado por la sucesión $(a_n)_n$. Sabemos muy bien que $\mathbb{R}^*$ es un cuerpo ordenado que contiene a $\mathbb{R}$ como un subcuerpo propio, donde un ***número real*** a se identifica con la clase representada por la ***sucesión constante*** $(a,a,\ldots, a,\ldots)$, además $\mathbb{R}^*$ contiene números infinitesimales e infinitos.

Los conceptos utilizados en $\mathbb{R}$ tales como funciones, relaciones, intervalos, cotas, etc. son extendidos en forma natural al cuerpo $\mathbb{R}^*$, así por ejemplo, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una ***función real*** entonces se obtiene la función $f^*\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, llamada ***la extensión elemental*** (ó extensión natural) de f como sigue:

$$\tau = [(x_n)_n] \longrightarrow f^*(\tau) = [(f(x_n))_n].$$

Si $f(x) = a\cdot x+b$, $(a,b,x \in \mathbb{R})$, entonces su extensión natural f^* es también una función de primer grado, en efecto:

$$f^*\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$$

$$\tau \longmapsto f^*(\tau) = a\cdot\tau + b$$

Es evidente que no todas las funciones de $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}^*$ son obtenidas por extensión natural de funciones reales, más bien muy pocas funciones no-estándar son de esta forma. Por ejemplo, si

$$g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$$
$$\tau \mapsto g(\tau) = \alpha \cdot \tau + \beta \text{ con } \alpha, \beta \notin \mathbb{R},$$

entonces g es de primer grado en $\mathbb{R}^*$, pero *no es* la extensión natural de una función real, pues $g|_{\mathbb{R}}$ no es una función de valor real.

Nuestro propósito es el de estudiar el comportamiento de una amplia gama de funciones no-estándar de $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}^*$; sin embargo, en vista de que el cuerpo $\mathbb{R}^*$ no es completo ni separable las funciones generales de $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}^*$ a veces se comportan en forma extraña y son difíciles de tratar. Por esta razón, nos limitamos a estudiar solamente una cierta clase de funciones no-estándar llamada la clase G, que nos permite un mecanismo accesible para trabajar con ellas, siguiendo con la misma mentalidad del análisis real donde se estudian solamente "funciones medibles".

Dada una sucesión de funciones $(f_n)_n$ definida en $\mathbb{R}$. el *producto directo* (ó producto canónico) de estas funciones, Πf_n, es una función de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dada por:

$$\Pi f_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \to (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n), \ldots).$$

Considerando el cociente de Πf_n por la relación de equivalencia $\sim$ introducida por el ultrafiltro $\mathcal{F}^*$, se obtiene una función f de $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}^*$ como sigue:

$$f = \Pi f_n/\sim \; : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$$

$$\tau = [(x_n)_n] \mapsto f(\tau) = [(f_n(x_n))_n],$$

esta función f se llama "*la función generada* por (f_n)", y se denota por $f = \text{gen}\,(f_n)$(#), también decimos que las f_n, $n = 1,2,3,\ldots$ son las *funciones generadoras* de la función no-estándar f. La colección de todas las funciones generadas se denota por G. Evidentemente, la extensión natural $f^*(\tau)$ de una función real $f(t)$ pertenece a la clase G ya que $f^* = \text{gen}$ $(f, f, \ldots, f, \ldots)$.

Dada $f = \text{gen}\,(f_n)$, por medio de las funciones generadoras podemos definir la integral de $f(\tau)$ en un intervalo no-estándar $[\alpha, \beta]$ como sigue:

$$\int_\alpha^\beta f(\tau)d\tau = [(\int_{a_n}^{b_n} f_n(t)dt)_n].$$

Por ejemplo, sea

(#) Usando la terminología lógica, f es el *ultraproducto* de las funciones f_n.

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \text{ en } (0,\varepsilon) \\ 0 \text{ en otra parte} \end{cases}$$

donde $\varepsilon = [(\frac{1}{n})_n]$ es un infinitesimal positivo, entonces $\delta \in G$. En efecto, tenemos:

$$\delta = \text{gen } (\delta_n) \text{ con } \delta_n(t) = \begin{cases} n \text{ en } (0, \frac{1}{n}) \\ 0 \text{ en otra parte.} \end{cases}$$

Como $\int_{-1}^{1} \delta_n(t)dt = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\int_{-1}^{1} \delta(\tau)d\tau = [(1)] = 1.$$

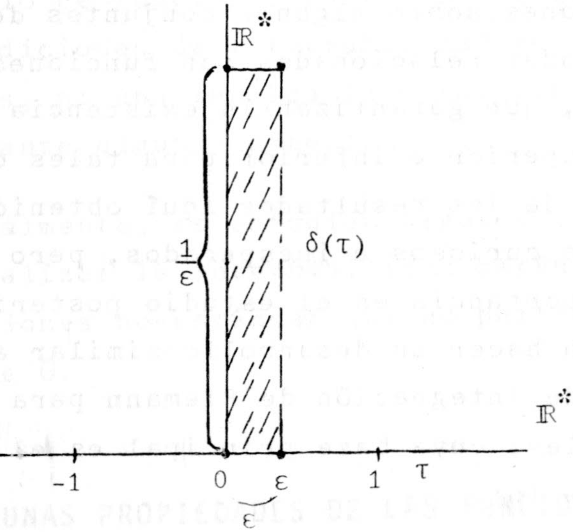

Figura 1

bservando la gráfica de la función $\delta(\tau)$ se ve inmediatamente que el área bajo la curva $\delta(\tau)$ es igual a 1 (el área del rectángulo de base ε y de altura $\frac{1}{\varepsilon}$); este valor coincide con la integral de la función $\delta(\tau)$ definida por medio de funciones generadoras. En el presente artículo se propone una definición de la integral de una función f de la clase G sin recurrir al uso de funciones generadoras, la cual nos permite dar una interpretación intuitiva de la integral como el área bajo la curva $f(\tau)$. El método a seguir es similar al usado para definir la integral de Riemann de una función real en un intervalo real: inicialmente se estudian condiciones sobre algunos conjuntos de números no-estándar relacionados con funciones de la clase G, que garantizan la existencia del extremo superior e inferior para tales conjuntos. Algunos de los resultados aquí obtenidos son bastante curiosos e inesperados, pero tienen gran importancia en el estudio posterior, pues permiten hacer un desarrollo similar al de la teoría de integración de Riemann para funciones reales, cuya base principal es el concepto de Sup e Inf.

Una vez solucionado en parte el problema de la no completez de $\mathbb{R}^*$, se procede a cumplir con el objetivo del artículo, cual es el de extender el concepto de la integral de Riemann para las funciones no-estándar de la clase G. En un principio se da la versión no-estándar de la condición de Riemann y se define la aproximación no-estándar de la integral de Riemann de una función de la clase G en un intervalo no-estándar. Después se estudian algunas propiedades de esta aproximación y se demuestra que si f es una función integrable (por medio de funciones generadoras) y satisface la condición de Riemann para funciones no-estándar, entonces la aproximación no-estándar de la integral *coincide con la integral* definida por medio de funciones generadoras, aunque las dos condiciones de integrabilidad no son equivalentes, ni una implica la otra, como se verá mediante algunos ejemplos.

Finalmente, es estudian algunos ejemplos para analizar la integrabilidad según Riemann de funciones no-estándar que no pertenecen a la clase G.

§2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE LA CLASE *G*.

DEFINICION 1. Dada una función $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, decimos que f es "*finitamente acotada*" en S ($\subseteq \mathbb{R}^*$) si existe una cota de *valor finito* para la función f en S.

Ejemplo 1. Sea

$$h(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{si} \quad \tau \not\approx 0 \quad (\#) \\ 0 & \text{si} \quad \tau \approx 0, \end{cases}$$

entonces $h(\tau)$ es acotada en $\mathbb{R}^*$, ya que cualquier número infinito positivo es una cota de $h(\tau)$. Pero como ningún número finito es cota de la función $h(\tau)$, entonces $h(\tau)$ no es finitamente acotada en $\mathbb{R}^*$.

Sea

$$g(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{si} \quad \tau \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \tau = 0. \end{cases}$$

Evidentemente $g(\tau)$ no es acotada en $\mathbb{R}^*$ (ni siquiera existe una cota de valor infinito de la función $g(\tau)$).

TEOREMA 1. Sea $f \in G$ una función de *valor finito* en $\mathbb{R}^*$, entonces $f(\tau)$ es *finitamente acotada* en $\mathbb{R}^*$.

(#) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, se dice que α está infinitamente próximo a β si $\alpha - \beta$ es un infinitesimal; esta relación se nota $\alpha \approx \beta$.

Demostración. Supongamos que $f = \text{gen}\ (f_n)$. Consideremos el siguiente conjunto:

$$A = \{n \in \mathbb{N} / f_n \text{ es acotada en } \mathbb{R}\} ;$$

vamos a demostrar, por reducción al absurdo, que $A \in \mathcal{F}^*$.

Supongamos que $A \notin \mathcal{F}^*$, entonces:

$$\mathbb{N}-A = \{n \in \mathbb{N} / f_n \text{ no es acotada en } \mathbb{R}\} \in \mathcal{F}^*.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}-A$ existe x_n tal que $|f_n(x_n)| > n$; se define: $x_n = 0$ si $n \in A$. Sea $\alpha = [(x_n)_n]$, entonces tenemos:

$$|f(\alpha)| = [(|f_n(x_n)|)_n] > [(n)_n],$$

o sea que $f(\alpha)$ es de *valor infinito* puesto que $[(n)_n]$ es un *número infinito*, esto contradice la hipótesis (*absurdo*!). Por lo tanto, se tiene que $A \in \mathcal{F}^*$.

Sea

$$M_n = \begin{cases} \sup\limits_{\mathbb{R}} |f_n(x)| & \text{si } n \in A \\ 1 & \text{si } n \notin A. \end{cases}$$

Evidentemente, el número $M = [(M_n)_n]$ es *una cota* de la función $f(\tau)$ en $\mathbb{R}^*$. Por la definición del extremo superior, existe $\tilde{x}_n$ tal que

$$|f_n(\tilde{x}_n)| > M_n - 1 \quad \text{(para todo } n \in \mathbb{N}\text{)}.$$

Si $\beta = [(\tilde{x}_n)_n] \in \mathbb{R}^*$, entonces:

$$|f(\beta)| = [(|f_n(\tilde{x}_n)|)_n] > [(M_n)_n] - 1 = M-1,$$

por lo tanto M es un *número finito* puesto que $f(\beta)$ es de *valor finito*. Esto es, $f(\tau)$ es *finitamente acotada* en $\mathbb{R}^*$.

COROLARIO. Sea $f \in G$; si $f(\tau)$ es de valor finito en el intervalo no-estándar (α,β) (ó, $[\alpha,\beta]$) entonces $f(\tau)$ es finitamente acotada en (α,β) (ó, $[\alpha,\beta]$ respectivamente).

Demostración. Considérese la función $g(\tau)$ definida por:

$$g(\tau) = \begin{cases} f(\tau) & \text{si} \quad \tau \in (\alpha,\beta) \\ 0 & \text{en otra parte.} \end{cases}$$

Como $g(\tau)$ es el producto de $f(\tau)$ y la función característica del intervalo (α,β), entonces $g(\tau) \in G$ y basta aplicar el Teorema 1.

Ejemplo 2. Sea $h(\tau)$ la función no-estándar dada en el Ejemplo 1. Evidentemente, $h(\tau)$ es de valor finito para todo $\tau \in \mathbb{R}^*$; como $h(\tau)$ no es finitamente acotada en $\mathbb{R}^*$, entonces se tiene que $h(\tau)$ no es una función de la clase G.

Como $\mathbb{R}^*$ no es completo, un conjunto en $\mathbb{R}^*$ rara vez posee extremo superior (la mínima cota superior), ó extremo inferior (la máxima cota inferior). Por ejemplo, un conjunto contablemente infinito en $\mathbb{R}^*$ tiene extremo superior (o inferior) sólo en el caso en que tenga máximo (o mínimo). Sorprendentemente tenemos el siguiente teorema que garantiza la existencia del extremo superior y del extremo inferior de conjuntos relacionados con funciones de la clase G.

TEOREMA 2. Sea $f \in G$ una función acotada (con cota *finita* ó *infinita*) en el intervalo no-estándar $[\alpha,\beta]$, entonces la imagen directa de $[\alpha,\beta]$ por f, $f([\alpha,\beta])$, tiene extremo superior y extremo inferior.

Demostración. Sea $\lambda = [(M_n)_n]$ una cota superior (finita ó infinita) de la función $f(\tau)$ en $[\alpha,\beta]$ donde $\alpha = [(a_n)_n]$, $\beta = [(b_n)_n]$, entonces:

$$A = \{n \in \mathbb{N} / f_n(x) \leqslant M_n \text{ para } a_n \leqslant x \leqslant b_n\} \in F^*$$

Sea

$$s_n = \begin{cases} \operatorname*{Sup}_{x\in[a_n,b_n]} f_n\, x & \text{si } n \in A \\ 1 & \text{si } n \notin A, \end{cases}$$

entonces, evidentemente el número no-estándar $\sigma = [(s_n)_n]$ es una cota superior de la función $f(\tau)$ en el intervalo no-estándar $[\alpha,\beta]$.

Si $\mu = [(N_n)_n] \in \mathbb{R}^*$ es una cota superior de la función $f(\tau)$ en $[\alpha,\beta]$, entonces

$B = \{n \in \mathbb{N} / f_n(x) \leqslant N_n$ para $a_n \leqslant x \leqslant b_n\} \in \mathcal{F}^*$,

luego

$$\{n \in \mathbb{N} / s_n \leqslant N_n\} \ (\supseteq A \cap B) \text{ pertenece a } \mathcal{F}^*.$$

Esto es,

$$\sigma \leqslant \mu ,$$

o sea que σ es la *mínima cota superior* de la función $f(\tau)$ en $[\alpha,\beta]$.

De la misma forma, $f([\alpha,\beta])$ tiene extremo inferior.

De la demostración del Teorema 2, se obtiene inmediatamente el siguiente corolario:

COROLARIO. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, acotada en el intervalo $[a,b]$, si $f^*(\tau)$ es la *extensión natural* de la función real $f(t)$, entonces:

$$\sup_{\tau\in[a,b]} f^*(\tau) = \sup_{t\in[a,b]} f(t), \quad \inf_{\tau\in[a,b]} f^*(\tau) = \inf_{t\in[a,b]} f(t) \tag{1}$$

Ejemplo 3. Sea $f \in G$ una función no-estándar de *valor infinitesimal* en el intervalo no-estándar $[\alpha,\beta]$, entonces:

$$\operatorname*{Sup}_{\tau\in[\alpha,\beta]} f(\tau) \approx 0, \qquad \operatorname*{Inf}_{\tau\in[\alpha,\beta]} f(\tau) \approx 0. \qquad (2)$$

En efecto: Dado $c > 0$ real cualquiera, tenemos:

$$-c < f(\tau) < c \quad \text{para todo} \quad \tau \in [\alpha,\beta]$$

luego:

$$-c \leqslant \operatorname*{Inf}_{[\alpha,\beta]} f(\tau) \leqslant \operatorname*{Sup}_{[\alpha,\beta]} f(\tau) \leqslant c\ ,$$

por lo tanto se obtiene (2).

Ejemplo 4. Sea $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ dada por:

$$f(\tfrac{1}{k}) = \frac{1}{k} \quad \text{si} \quad k \in \mathbb{N},$$

$$f(\tau) = 1 \quad \text{si} \quad \tau \notin \{\tfrac{1}{k} \ / \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Tenemos que $f([0,1]) = \{\frac{1}{k}/k \in \mathbb{N}\}$; este conjunto no posee extremo inferior, por lo tanto la función $f(\tau)$ no pertenece a la clase G.

§3. APROXIMACION NO-ESTANDAR DE LA INTEGRAL DE RIEMANN.

Sea $[\alpha,\beta]$ un intervalo no-estándar; una partición $\mathcal{P}$ de $[\alpha,\beta]$ es una subdivisión del intervalo en un *número finito* de subintervalos; así, la partición $\mathcal{P}$ está determinada por sus puntos de subdivisión. Por esta razón, se acostumbra a denotar por $\mathcal{P}$ a estos puntos, ordenándolos en forma ascendente y agregándoles α y β como puntos inicial y final:

$$\mathcal{P} = \{\alpha = \tau^{(0)},\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(k)},\ldots,\tau^{(r-1)},\ \tau^{(r)} = \beta\} \quad (3)$$

$$\alpha = \tau^{(0)} = [(a_n)_n],\ \ \beta = \tau^{(r)} = [(b_n)_n],\ \ \tau^{(k)} = [(x_n^{(k)})_n]$$

$(k = 0,1,\ldots,r)$,

como $\tau^{(k)} < \tau^{(k+1)}$ para todo k, entonces se tiene:

$$\{n \in \mathbb{N} / x_n^{(k)} < x_n^{(k+1)} \text{ para todo } k\} = \bigcap_{k=0}^{r-1} \{n \in \mathbb{N} / x_n^{(k)} < x_n^{(k+1)}\} \in \mathcal{F}^*.$$

Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$x_n^{(k)} < x_n^{(k+1)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
y para todo $k = 0, 1, \ldots, r-1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \{a_n = x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots, x_n^{(r-1)}, x_n^{(r)} = b_n\} \tag{4}$$

es una *partición* del *intervalo real* $[a_n, b_n]$ en r subintervalos; entonces podemos decir que la partición $\mathcal{P}$ está generada por (P_n). En este caso escribiremos:

$$\mathcal{P} = (P_n)_n. \tag{5}$$

Recíprocamente, si P_n es una partición del intervalo real $[a_n, b_n]$ en r subintervalos (r *independiente* de n), entonces $(P_n)_n$ genera una partición del intervalo no-estándar $[\alpha, \beta]$.

Si $\tilde{\mathcal{P}}$ es una partición del intervalo $[\alpha, \beta]$ con más puntos de subdivisión que la partición $\mathcal{P}$, entonces decimos que $\tilde{\mathcal{P}}$ es "*más fina que*" $\mathcal{P}$ y se denota por:

$$\tilde{\mathcal{P}} \supset \mathcal{P}.$$

Dadas dos particiones $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ del intervalo $[\alpha, \beta]$, $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ es la partición obtenida por *la reunión de todos los puntos* de subdivisión de $\mathcal{P}_1$ y de $\mathcal{P}_2$; evidentemente $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ es más fina que $\mathcal{P}_1$, y más fina que $\mathcal{P}_2$.

Sean f = gen (f_n) una función no-estándar acotada (con cota finita ó infinita) en $[\alpha,\beta]$, $\mathcal{P}$ una partición de $[\alpha,\beta]$ como en (3), entonces podemos definir la suma superior $U(\mathcal{P},f)$ y la suma inferior $L(\mathcal{P},f)$ como sigue:

$$U(\mathcal{P},f) = \sum_{k=1}^{r} M_k(f)\cdot(\tau^{(k)} - \tau^{(k-1)}),$$

$$L(\mathcal{P},f) = \sum_{k=1}^{r} m_k(f)\cdot(\tau^{(k)} - \tau^{(k-1)}),$$

donde

$$M_k(f) = \underset{[\tau^{(k-1)},\tau^{(k)}]}{\mathrm{Sup}} f(\tau), \quad m_k(f) = \underset{[\tau^{(k-1)},\tau^{(k)}]}{\mathrm{Inf}} f(\tau)$$

Teniendo en cuenta que

$$M_k(f) = [(\underset{[x_n^{(k-1)},x_n^{(k)}]}{\mathrm{Sup}} f_n(t))_n]$$

$$m_k(f) = [(\underset{[x_n^{(k-1)},x_n^{(k)}]}{\mathrm{Inf}} f_n(t))_n]$$

$$\tau^{(k)} - \tau^{(k-1)} = [(x_n^{(k)} - x_n^{(k-1)})_n] \quad (k=1,2,..,r)$$

para $\mathcal{P} = (P_n)$, f = gen (f_n) se obtiene:

$$U(\mathbb{P},f) = [(U(P_n,f_n))_n], \quad L(\mathbb{P},f) = [(L(P_n,f_n))_n] \tag{6}$$

donde $U(P_n,f_n)$ y $L(P_n,f_n)$ son la suma superior y la suma inferior de Riemann de la función real $f_n(t)$ correspondientes a la partición P_n del intervalo real $[a_n,b_n]$ respectivamente.

Tenemos inmediatamente las siguientes propiedades acerca de $U(\mathbb{P},f)$ y $L(\mathbb{P},f)$, similares al caso de las sumas superior e inferior de una función real.

(i) $U(\mathbb{P},f) \geqslant L(\mathbb{P},f)$.

(ii) Si $\tilde{\mathbb{P}} \supset \mathbb{P}$ entonces:

$$U(\mathbb{P},f) \geqslant U(\tilde{\mathbb{P}},f), \quad L(\mathbb{P},f) \leqslant L(\tilde{\mathbb{P}},f).$$

(iii) $U(\mathbb{P}_1,f) \geqslant L(\mathbb{P}_2,f)$ para $\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_2$ particiones cualesquiera.

TEOREMA 3. Sea f = gen (f_n) acotada en el intervalor no-estándar $[\alpha,\beta]$, con $\alpha = [(a_n)_n]$, $\beta = [(b_n)_n]$, entonces tenemos:

$$L(\mathbb{P},f) \leqslant q \leqslant p \leqslant U(\mathbb{P},f) \text{ para toda partición } \mathbb{P}, \tag{7}$$

donde

$$q = [(\underline{\int_{a_n}^{b_n}} f_n(t)dt)_n], \quad p = [(\overline{\int_{a_n}^{b_n}} f_n(t)dt)_n]. \tag{8}$$

Demostración. Si $\mathbb{P} = (P_n)_n$, se obtiene:

$$L(P_n, f_n) \leqslant \underline{\int_{a_n}^{b_n}} f_n(t)dt \leqslant \overline{\int_{a_n}^{b_n}} f_n(t)dt \leqslant U(P_n, f_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De (6) y (8):

$$L(\mathbb{P}, f) \leqslant q \leqslant p \leqslant U(\mathbb{P}, f).$$

COROLARIO 1. Sea $f \in G$ acotada en el intervalo no-estándar $[\alpha, \beta]$, entonces existe $\nu \in \mathbb{R}^*$ tal que

$$L(\mathbb{P}, f) \leqslant \nu \leqslant U(\mathbb{P}, f) \text{ para toda partición } \mathbb{P}. \qquad (9)$$

Demostración. Basta escoger $\nu \in [q, p]$.

COROLARIO 2. Sea $f \in G$ acotada en $[\alpha, \beta]$; supongamos que $f(\tau)$ es *integrable*, o sea:

$$\{n \in \mathbb{N} / f_n(t) \text{ es integrable según Riemann}\} \in F^*,$$

entonces:

$$L(\mathbb{P}, f) \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)d\tau \leqslant U(\mathbb{P}, f) \text{ para toda partición } \mathbb{P}. \qquad (10)$$

DEFINICION 2. Sea $f \in G$ acotada en el intervalo no-estándar $[\alpha, \beta]$; decimos que $f(\tau)$ es *integrable según Riemann* (abreviadamente integrable-R) si dado $c > 0$ *real* existe una partición

$\mathcal{P}$ de $[\alpha,\beta]$ tal que

$$U(\mathcal{P},f) - L(\mathcal{P},f) < c. \tag{11}$$

TEOREMA 4. $f \in G$ es integrable-R en $[\alpha,\beta]$ si y sólo si el número $\nu \in \mathbb{R}^*$ en el Corolario 1 del Teorema 3 es único salvo términos infinitesimales adicionales.

Demostración. Supongamos que f es integrable-R. Si $\nu, \tilde{\nu} \in \mathbb{R}^*$ satisfacen la desigualdad (9), entonces se tiene:

$$|\nu-\tilde{\nu}| \leq U(\mathcal{P},f) - L(\mathcal{P},f) \text{ para toda partición } \mathcal{P}.$$

Por lo tanto, de (11) tenemos que:

$$|\nu-\tilde{\nu}| < c \quad \text{para cualquier} \quad c > 0 \ \textit{real},$$

o sea

$$\nu - \tilde{\nu} \approx 0.$$

Recíprocamente, supongamos que f no es integrable-R, entonces existe $c_o > 0$ real tal que

$$U(\mathcal{P},f) - L(\mathcal{P},f) > c_o \quad \text{para toda partición } \mathcal{P}. \tag{12}$$

Sea $\nu \in \mathbb{R}^*$ un número que satisface la desigualdad (9), entonces vamos a demostrar, por reducción al absurdo, que $\nu + c_o/2$ ó $\nu - c_o/2$ satisface también la desigualdad (9). Supongamos que ni $\nu + c_o/2$ ni $\nu - c_o/2$ satisfacen la desigualdad (9), entonces existen particiones $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ tales que

$$U(\mathcal{P}_1, f) < \nu + c_o/2$$

$$\nu - c_o/2 < L(\mathcal{P}_2, f).$$

Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ entonces se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\nu - \frac{c_o}{2} < L(\mathcal{P}_2, f) \leq L(\mathcal{P}, f) \leq U(\mathcal{P}, f) \leq U(\mathcal{P}_1, f) < \nu + \frac{c_o}{2}$$

o sea:

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < (\nu + \frac{c_o}{2}) - (\nu - \frac{c_o}{2}) = c_o,$$

esto contradice a (12) (*absurdo!*). Por lo tanto, ó $\nu + c_o/2$ ó $\nu - c_o/2$ satisface la desigualdad (9), además:

$$\nu \not\approx \nu + \frac{c_o}{2}, \quad \nu \not\approx \nu - \frac{c_o}{2}.$$

Esto contradice la unicidad (salvo infinitesimales adicionales) de ν.

Si $f(\tau)$ es integrable-R en $[\alpha, \beta]$, el único (salvo términos infinitesimales adicionales) $\nu \in \mathbb{R}^*$ que satisface la desigualdad (9) en el Corolario 1 del Teorema 3 se llama "*una aproximación no-estándar* de la integral-R de la función $f(\tau)$ en $[\alpha, \beta]$", y se denota por:

$$\nu = \text{aprox} \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)d\tau.$$

Ejemplo 5. Sea

$$f(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon^2} & \text{en} \quad (0,\varepsilon) \\ 0 & \text{en otra parte.} \end{cases}$$ (ε = un infinitesimal positivo),

consideremos la siguiente partición $\mathcal{P}$ del intervalo no-estándar $[-1,1]$:

$$\mathcal{P} = \{-1,\ 0,\ \eta,\ \varepsilon-\eta,\ \varepsilon,\ 1\}$$

donde η es un infinitesimal positivo menor que $\varepsilon/2$, entonces:

$$U(\mathcal{P},f) = \eta\frac{1}{\varepsilon^2} + (\varepsilon-2\eta)\frac{1}{\varepsilon^2} + \eta\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$L(\mathcal{P},f) = (\varepsilon-2\eta)\frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{2\eta}{\varepsilon^2}.$$

Si escogemos η tal que $\eta/_{\varepsilon^2} \approx 0$, entonces:

$$U(\mathcal{P},f) - L(\mathcal{P},f) = \frac{2\eta}{\varepsilon^2} \approx 0,$$

por lo tanto f es integrable-R en $[-1,\ 1]$, y además

$$\frac{1}{\varepsilon} = \text{aprox} \int_{-1}^{1} f(\tau)d\tau.$$

Nótese que *existen*

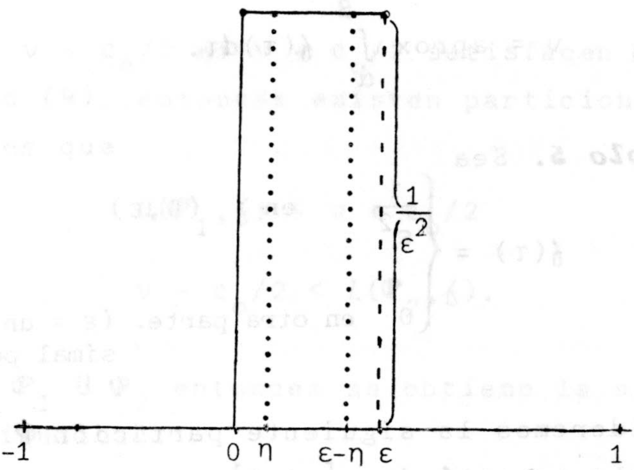

Figura 2

$$\operatorname*{Inf}_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f), \qquad \operatorname*{Sup}_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f)$$

y son iguales a $\frac{1}{\varepsilon}$, o sea que la aproximación no-estándar de la integral-R es *única* en el sentido estricto.

Ejemplo 6. Sea $f \in G$ de valor *infinitesimal* en un intervalo finito $[\alpha,\beta]$, entonces $f(\tau)$ es integrable-R, y

$$\text{aprox} \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)d\tau \approx 0.$$

Demostración. Por el Ejemplo 3 tenemos:

$$U(\mathcal{P}, f) \approx 0, \quad L(\mathcal{P}, f) \approx 0$$

para toda partición $\mathcal{P}$ de $[\alpha,\beta]$, luego

$$U(\mathcal{P},f) - L(\mathcal{P},f) \approx 0.$$

De esto se deduce lo enunciado.

Ejemplo 7. Sea $f \in G$ de valor finito en un intervalo de *longitud infinitesimal* $[\alpha\ \beta]$; entonces $f(\tau)$ es integrable-R en $[\alpha,\beta]$, y

$$\text{aprox} \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)d\tau \approx 0.$$

Demostración. Como $f(\tau)$ es finitamente acotada en $[\alpha,\beta]$ (ver el Teorema 1), entonces $\operatorname{Sup}_{[\alpha,\beta]} f(\tau)$ e $\operatorname{Inf}_{[\alpha,\beta]} f(\tau)$ son de valor finito, luego:

$$U(\mathcal{P},f) \approx 0, \quad L(\mathcal{P},f) \approx 0$$

para toda partición $\mathcal{P}$ de $[\alpha,\beta]$, puesto que $\beta-\alpha \approx 0$. De esto sigue lo enunciado.

Sea $f \in G$ acotada en $[\alpha,\beta]$, supongamos que $U(\mathcal{P}_o,f) - L(\mathcal{P}_o,f)$ es de *valor finito* para alguna partición $\mathcal{P}_o$ del intervalo $[\alpha,\beta]$; si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ está entre $L(\mathcal{P}_o,f)$ y $U(\mathcal{P}_o,f)$ entonces se tiene que

$$U(\mathcal{P},f) - \lambda\ , \quad L(\mathcal{P},f) - \lambda$$

son de *valor finito* para toda partición $\mathcal{P}$ más fina que $\mathcal{P}_o$. Como

$$U(\mathcal{P},f) - L(\mathcal{P},f) = (U(\mathcal{P},f)-\lambda) - (L(\mathcal{P},f)-\lambda),$$

se obtiene el siguiente teorema:

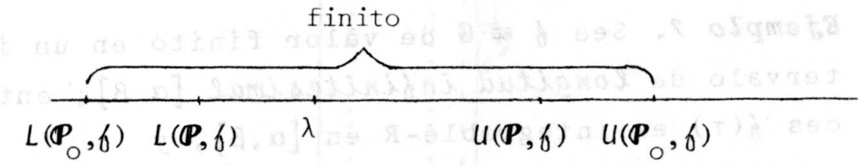

Figura 3

TEOREMA 5. $f \in G$ es integrable-R si y sólo si

$$\operatorname*{Inf}_{\mathcal{P}}\{\mathrm{Est}\,(U(\mathcal{P},f)-\lambda)\} = \operatorname*{Sup}_{\mathcal{P}}\{\mathrm{Est}(L(\mathcal{P},f)-\lambda)\}.^{(\#)} \qquad (13)$$

Además:

$$\text{aprox} \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)d\tau \approx \lambda + \operatorname*{Inf}_{\mathcal{P}}\{\mathrm{Est}\,(L(P,f)-\lambda)\}. \qquad (14)$$

§4. PROPIEDADES DE LA INTEGRABILIDAD SEGUN RIEMANN.

Como se ha introducido el concepto de la integrabilidad-R en forma similar al caso de funciones reales, entonces tenemos las mismas propiedades ampliamente conocidas en el cálculo

---

(#) Si $\tau \in \mathbb{R}^*$ es *finito*, el *único número real* x tal que $\tau \approx x$ se llama "la parte estándar de τ", y se denota $x = \mathrm{Est}\,\tau$.

de integración, entre ellas, por ejemplo:

(i) Si $f(\tau)$, $g(\tau)$ son integrables-R en $[\alpha,\beta]$ entonces $f(\tau) + g(\tau)$ también es integrable-R en $[\alpha,\beta]$, y

$$\text{aprox} \int_\alpha^\beta f(\tau)d\tau + \text{aprox} \int_\alpha^\beta g(\tau)d\tau = \text{aprox} \int_\alpha^\beta (f(\tau)+g(\tau))d\tau.$$

(ii) Si $f(\tau)$ es integrable-R en $[\alpha,\beta]$, y si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ es *finito*, entonces $\lambda\cdot f(\tau)$ también es integrable-R y

$$\text{aprox} \int_\alpha^\beta \lambda f(\tau)d\tau = \lambda \text{aprox} \int_\alpha^\beta f(\tau)d\tau.$$

(iii) Si $f(\tau)$ es integrable-R en $[\alpha,\beta]$ y si $[\lambda,\mu] \subset [\alpha,\beta]$ entonces $f(\tau)$ es integrable-R en $[\lambda,\mu]$. Además se tiene:

$$\text{aprox} \int_\alpha^\lambda f(\tau)d\tau + \text{aprox} \int_\lambda^\beta f(\tau)d\tau = \text{aprox} \int_\alpha^\beta f(\tau)d\tau.$$

Recíprocamente, si $f(\tau)$ es integrable-R en $[\alpha,\lambda]$, y en $[\lambda,\beta]$ entonces $f(\tau)$ es integrable-R en $[\alpha,\beta]$.

(iv) Si $f(\tau)$ es de *valor finito* e integrable-R en $[\alpha,\beta]$ entonces f^2 es integrable-R en $[\alpha,\beta]$.

Ejemplo 8. Sean $f, g \in G$. Si f es integrable-R en un *intervalo finito* $[\alpha,\beta]$, y $f(\tau) \simeq g(\tau)$

para todo $\tau \in [\alpha,\beta]$ entonces g es integrable-R en $[\alpha,\beta]$ y además:

$$\text{aprox} \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)d\tau \approx \text{aprox} \int_{\alpha}^{\beta} g(\tau)d\tau.$$

Demostración. $g(\tau) = f(\tau) + (g(\tau) - f(\tau))$. Como $g(\tau) - f(\tau) \approx 0$ para todo $\tau \in [\alpha,\beta]$, entonces $g(\tau) - f(\tau)$ es integrable-R en $[\alpha,\beta]$. (Ejemplo 6). Por la propiedad (i) se tiene que g es integrable-R en $[\alpha,\beta]$.

TEOREMA 6. Sea $f \in G$ una función integrable (por medio de generadoras). Si f es integrable-R entonces tenemos:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)d\tau = \text{aprox} \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)d\tau.$$

Demostración. Del Corolario 2 del Teorema 3:

$$L(\mathcal{P},f) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)d\tau \leq U(\mathcal{P},f)$$

para toda partición $\mathcal{P}$ de $[\alpha,\beta]$. Por el Teorema 4 se obtiene lo enunciado.

La integrabilidad-R de una función no-estándar $f \in G$ no implica que f sea integrable (por medio de generadoras), veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9. Sea

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ es irracional} \\ 0 & \text{si } t \text{ es racional,} \end{cases}$$

definimos $f = \text{gen}\ (f_n)$ por:

$$f_n(t) = \frac{1}{n}\cdot g(t).$$

Tenemos:

$$f(\tau) \approx 0 \text{ para todo } \tau \in \mathbb{R}^*,$$

por lo tanto $f(\tau)$ es integrable-R en cualquier intervalo finito $[\alpha,\beta]$ (Ejemplo 6). Sin embargo, f no es integrable por medio de generadoras, puesto que

$$\{n \in \mathbb{N} / f_n \text{ no es integrable según Riemann}\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}^*$$

La integrabilidad (por medio de funciones generadoras) de una función no-estándar $f \in G$ no implica que f sea integrable-R, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10. Sea $f(\tau) = \text{sen}\ \lambda\tau$,

donde $\lambda = [(n)_n]$. Como $f = \text{gen}\ (\text{sen}\ nt)_n$, entonces f es integrable (por medio de funciones generadoras).

Sea $[\alpha,\beta]$ un intervalo de *longitud no in-*

finitesimal y consideremos una partición:

$$\mathcal{P} = \{\alpha = \tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(k)}, \ldots, \tau^{(r-1)}, \tau^{(r)} = \beta\}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\tau^{(k)} - \tau^{(k-1)} \not\approx 0$ puesto que, al ser $f(\tau)$ una función finitamente acotada, los subintervalos de longitud infinitesimal no afectan la integrabilidad-R de f. Entonces existe un intervalo real $(c-h,\ c+h) \subset [\tau^{(k-1)}, \tau^{(k)}]$.

Sea $\varepsilon = [(\frac{\pi}{2n})_n]$, entonces $\varepsilon \approx 0$, luego:

$$c,\ c+\varepsilon,\ c+2\varepsilon,\ c-\varepsilon \in [\tau^{(k-1)},\ \tau^{(k)}]$$

Tenemos:

$$f(c) = \text{sen}\ \lambda c,$$
$$f(c+\varepsilon) = \cos \lambda c,$$
$$f(c-\varepsilon) = -\cos \lambda c,$$
$$f(c+2\varepsilon) = -\text{sen}\ \lambda c.$$

Como $(\text{sen}\ \lambda c)^2 + (\cos \lambda c)^2 = 1$, entonces: $|\text{sen}\ \lambda c| + |\cos \lambda c| \geqslant 1$. Tenemos que $f(c) \geqslant 0$, ó, $f(c+2\varepsilon) \geqslant 0$. Para mayor sencillez supongamos que $f(c) = \text{sen}\ \lambda c \geqslant 0$; **(i)** si $\cos \lambda c > 0$ entonces

$$f(c) - f(c-\varepsilon) = \text{sen}\ \lambda c + \cos \lambda c \geqslant 1,$$

(ii) Si $\cos \lambda c < 0$ entonces:

$$f(c) - f(c+\varepsilon) = \operatorname{sen} \lambda c + |\cos \lambda c| \geqslant 1.$$

Por lo tanto:

$$\underset{[\tau^{(k-1)}, \tau^{(k)}]}{\mathrm{Sup}} f(\tau) - \underset{[\tau^{(k-1)}, \tau^{(k)}]}{\mathrm{Inf}} f(\tau) \geqslant 1$$

esto implica que

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) \geqslant (\beta - \alpha) \text{ para toda partición } \mathcal{P},$$

o sea que $f(\tau)$ no es integrable-R en $[\alpha, \beta]$.

TEOREMA 7. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función *real* integrable según Riemann en el *intervalo real* $[a,b]$; entonces la extensión natural de f, f^*, es integrable-R en el *intervalo no-estándar* $[a,b]$, y $\int_a^b f(t)\,dt$ es una aproximación no-estándar de la integral-R de la función no-estándar $f^*(\tau)$.

Demostración. Como $f(t)$ es integrable según Riemann en el intervalo real $[a,b]$, dado $c > 0$ *real* existe una partición P del intervalo real $[a,b]$ tal que $U(P,f) - L(P,f) < c$. Consideremos la partición $\mathcal{P} = (P, P, \ldots, P, \ldots)$ del intervalor no-estándar $[a,b]$, entonces:

$$U(\mathcal{P}, f^*) = U(P, f), \quad L(\mathcal{P}, f^*) \quad L(P, f)$$

puesto que $f^* = \operatorname{gen}(f, f, \ldots, f, \ldots)$. Por lo tanto:

$$U(\mathcal{P}, f^*) - L(\mathcal{P}- f^*) < c,$$

o sea que f^* es integrable-R en el intervalo no-estándar $[a,b]$. Del teorema 6 se tiene que $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f^*(\tau)d\tau$ es una aproximación no-estándar de la integral-R de la función $f^*(\tau)$ en el intervalo no-estándar $[a,b]$.

TEOREMA 8. Sea $f \in G$ *continua*(#) y de valor finito en $\mathbb{R}^*$, entonces $f(\tau)$ es integrable-R en cualquier intervalo finito $[\alpha,\beta]$. Sea $\hat{f}$ la función real definida por $\hat{f}(t)$ = Est $f(t)$, entonces:

$$\int_a^b \hat{f}(t)dt \approx \text{aprox} \int_\alpha^\beta f(\tau)d\tau \tag{15}$$

donde a = Est α, b = Est β.

Demostración. Sabemos que $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *continua* en $\mathbb{R}$ (ver [2]), luego $\hat{f}$ es *integrable según Riemann* en el intervalo real $[a,b]$. Si $\hat{f}^*(\tau)$ es la extensión natural de $\hat{f}$, entonces por el Teorema 7 se tiene que $\hat{f}^*(\tau)$ es integrable-R en el intervalo no-estándar $[a,b]$, y:

$$\int_a^b \hat{f}(t)dt = \text{aprox} \int_a^b \hat{f}^*(\tau)d\tau. \tag{16}$$

(#) Decimos que f es continua si $f(\tau) \approx f(\tau')$ cuando $\tau \approx \tau'$. En [3] se cita esta propiedad como "la *microcontinuidad* de f".

Como $f(\tau) \approx \hat{f}^*(\tau)$ para todo $\tau \in \mathbb{R}^*$, entonces por el Ejemplo 8 tenemos que $f(\tau)$ es integrable-R en $[a,b]$, y:

$$\text{aprox} \int_a^b f(\tau)d\tau \approx \text{aprox} \int_a^b \hat{f}^*(\tau)d\tau. \qquad (17)$$

Por otra parte, el intervalo $[\alpha,a]$ (ó $[a,\alpha]$ si $\alpha > a$) es de *longitud infinitesimal*, luego $f(\tau)$ es integrable-R en $[\alpha,a]$ (Ejemplo 7), y

$$\text{aprox} \int_\alpha^a f(\tau)d\tau \approx 0. \qquad (18)$$

De la misma manera, $f(\tau)$ es integrable-R en $[b,\beta]$, y:

$$\text{aprox} \int_b^\beta f(\tau)d\tau \approx 0. \qquad (19)$$

Por lo tanto, $f(\tau)$ es integrable-R en $[\alpha,\beta]$; de (16), (17), (18) y (19) se obtiene la fórmula (15).

§5. COMENTARIOS ACERCA DE LA INTEGRABILIDAD-R PARA FUNCIONES NO-GENERADAS.

En el tratamiento anterior para introducir el concepto de aproximación no-estándar de la integral-R de funciones no-estándar, *no aparecen* las funciones generadoras, razón [illegible] cual se puede sospechar que el mismo mêtodo podría ser aplicable para dar un concepto de la integral-R para las funciones que estên fuera de la clase G. Sin embargo, parece que esta posibilidad es bastante remota según lo que podemos observar en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 11. Sea

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \tau \approx 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad \tau \not\approx 0. \end{cases}$$

Sabemos que $f(\tau) \notin G$ (ver [2]). Se observa que el área bajo la curva $f(\tau)$ es igual al área del rectángulo de altura 1, y de base "*menor* que cualquier real positivo", por lo tanto podemos imaginar que la integral de $f(\tau)$ en $[-1,1]$ es *un infinitesimal*.

Sea $\mathcal{P} = \{-1,-c,-\varepsilon,\varepsilon,c,1\}$ una partición del intervalo no-estándar $[-1,1]$ donde ε es un infinitesimal positivo, y $c \not\approx 0$ con $0 < c < 1$ entonces tenemos:

$$U(\mathcal{P},f) = 2c \not\approx 0, \quad L(\mathcal{P},f) = 2\varepsilon \approx 0.$$

En general, $U(\mathcal{P},f)$ es *no infinitesimal*, y $L(\mathcal{P},f)$ es un *infinitesimal*, para cualquier partición $\mathcal{P}$; como no existe un número no-estándar que separe los infinitesimales y los no infinitesimales, entonces no existe $\nu \in \mathbb{R}^*$ que satisfaga la condición (9), esto es, no existe una aproximación no-estándar de la integral-R de la función $f(\tau)$ según la definición dada en §3.

Sin embargo, como $U(\mathcal{P}, f)$ y $L(\mathcal{P}, f)$ son de *valor finito*, y:

$$\operatorname*{Inf}_{\mathcal{P}}\{\text{Est } U(\mathcal{P}, f)\} = 0 = \operatorname*{Sup}_{\mathcal{P}}\{\text{Est } L(\mathcal{P}, f)\},$$

entonces podríamos decir que el valor aproximado de la integral $\int_{-1}^{1} f(\tau)d\tau$ sería igual a cero.

EJEMPLO 12. Sea

$$f(\tau) = \begin{cases} (\tfrac{1}{2})^n \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{si } \tau \in (\dfrac{1}{n} - \varepsilon, \dfrac{1}{n}) \text{ para } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{en otra parte.} \end{cases}$$

Por el Teorema 2 se demuestra fácilmente que $f(\tau) \notin G$. Se observa que bajo la curva $f(\tau)$ aparecen los rectángulos de altura $(\tfrac{1}{2})^n \frac{1}{\varepsilon}$ y de base ε ($n = 1,2,3,\ldots$), entonces el área bajo la curva $f(\tau)$ debería ser:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^n \frac{1}{\varepsilon}\, \varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^n = 1.$$

Sea $\mathcal{P} = \{0 = \tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(k)}, \ldots, \tau^{(r-1)}, \tau^{(r)} = 1\}$ una partición del intervalo no-estándar $[0,1]$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\tau^{(1)} \not\simeq 0$. Sea n el menor número natural tal que $\frac{1}{n} \in [0,\tau^{(1)}]$, entonces tenemos:

$$\operatorname*{Sup}_{[0,\tau^{(1)}]} f(\tau)(\tau^{(1)}-\tau^{(0)}) = (\tfrac{1}{2})^n \frac{1}{\varepsilon}(\tau^{(1)}) = \text{un infinito},$$

por lo tanto:

$$U(\mathcal{P}, f) \quad \text{es un infinito.}$$

En cambio, se observa que:

$$L(\mathcal{P}, f) < \sum_{k=1}^{n-1} (\tfrac{1}{2})^k < 1.$$

Por lo tanto se tiene que:

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) \text{ es un infinito,}$$

o sea que $f(\tau)$ no es integrable-R en $[0,1]$.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Takeuchi, Y., "Funciones no-estándar y Teoría de Distribuciones", Revista Col. de Matemáticas, Vol.XVIII, Nºs 3-4, 1983.

[2] Takeuchi, Y., *Teoría de Funciones No-están-*

dar, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1983.

[3] Davis, Martha, *Applied Nonstandard Analysis*, John Wiley, 1977.

[4] Apostol, T.M., *Mathematical Analysis*, Addison Wesley, Reading, 1963.

* *

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional
BOGOTA, D.E. Colombia.