BOLETIN DE MATEMATICAS. -36-
VOLUMEN IV. No. 2
Páginas 36 a 65

ALGUNAS IDEAS SOBRE LA MATEMATICA DEL PRIMER AÑO DE ENSENANZA MEDIA.

julia contreras de delgado
gilma de villamarin
naya esparragoz de gómez

INTRODUCCION

El presente trabajo tiene como objetivo principal mostras algunos aspectos del libro Hagamos Matemática primer ano de Educación Media.

En la búsquedá de la metodología apropiada se ha tenido en cuenta la experiencia de profesores autorizados. Por ejemplo: Jean Dieudonnè en su estudio sobre la Abstracción en Matemática y la evolución del Algebra dice:

«En esta enseñanza no deben introducirse dogmáticamente teorías abstractas, creo simplemente que a través de numerosos ejemplos elementales a nuestro alcance hay que esforzarse en deducir las nociones fundamentales, para habituar desde el principio a los alumnos a familiarizarse con las principales estructuras algebráicas, que ellos encuentran muy pronto pero que no se les enseña a reconocer».

Teniendo en cuenta además que las nociones de matemática moderna requieren necesariamente un vocabulario y simbolismo nuevos al cual hay que habituar al estudiante progresivamente, a la vez que hay que conducirlo metódicamente a sus descubrimientos, cada tema se inicia con ejemplos muy elementales tomados del ambiente familiar y luego en orden de dificultad ejercicios que permitan el ascenso a la abstracción de manera fácil y estimulante.

Específicamente, se quiere dar una visión de los pasos sucesivos para llegar a la abstracción de los números enteros y de la operación de adición entre ellos. El trabajo ha sido elaborado en láminas para ser proyectadas. Las conclusiones generales se pueden leer en cada lámina. Alguna explicación adicional a cada lámina se incluye:

LAMINA No.1

Producto Cartesiano entre Conjuntos.

Antonio y Luis quieren comprar un carro de los que están en la vitrina. Antonio puede escoger el carro rojo, o el carro negro, o el carro azul.

A su vez, Luis puede escoger tambien entre el negro, el rojo o el azul.

Antonio y Luis forman el conjunto N de los niños y los carros forman el conjunto C.

Las posibles parejas (niño, carro) están representadas en el esquema.

Al considerar las posibles parejas (niño, carro) se está efectuando el producto cartesiano entre los conjunto N y C, el cual se simboliza N x C.

En el conjunto N x C de parejas el primer elemento de cada pareja pertenece al conjunto N y el segundo elemento pertenece al conjunto C.

LAMINA No. 2

Relaciones en el Producto Cartesiano.

Se consideran los conjunto A y B de niños que juegan ping pong:

a es contendor de h

b es contendor de s

c es contendor de e y de u

Estas parejas forman el conjunto R que representa una relación entre los conjunto A y B.

.-.

En el esquema del producto A x B se puede observar que el conjunto R de parejas de la relación es una parte del producto A x B.

LAMINA No. 3

Relación Reflexiva.

En el conjunto E se forma la relación R de parejas tales que el primer elemento es divisor del segundo.

Se observa que en este conjunto aparecen las parejas (1, 1); (2, 2); (3, 3) que indican que todos los elementos del conjunto E están relacionados consigo mismo (1 es divisor de 1; 2 es divisor de 2; 3 es divisor de 3), se dice entonces que la relación R es reflexiva.

En el esquema de flechas correspondiente a esta relación, todo elemento relacionado consigo mismo está representado por una flecha que vuelve sobre sí misma.

La relación M definida en el conjunto C no es reflexiva, puesto que en el conjunto de parejas no está la pareja (a, a) y en el esquema de flechas falta la flecha que relaciona el elemento a consigo mismo.

LAMINA No. 4

Relación Simétrica.

En el conjunto E se ha definido la relación R formada por el conjunto de parejas (x, z) tales que $x + z$ es igual a z.

Se observa que si la pareja (0, 2) pertenece a R, la pareja (2, 0) también pertenece a R. Si la pareja (1, 1) pertenece a R, tambien (1, 1) pertenece a R. Si la pareja (1, 2) pertenece a R, tambien (2, 1) pertenece a R.

En el esquema de flechas correspondiente se observa que toda pareja de la relación está ligada por flechas opuestas. Se dice en este caso que la relación R es simétrica.

.-.

En el conjunto A se ha definido una relación T. En el conjunto de parejas se observa que la pareja (0, 2) pertenece a T pero la pareja (2, 0) no pertenece a T, se dice entonces que la relación no es simétrica. En el esquema de flechas correspondiente flata la flecha que ligaría a 2 con 0.

LAMINA No. 5

Relación Transitiva.

En el conjunto E se ha definido la relación R formada por el conjunto de parejas (x, z) tales que z es menor que x.

En el conjunto R de parejas se observa que: si la pareja (3, 2) pertenece a R y la pareja (2, 1) pertenece a R, entonces, la pareja (3, 1) también pertenece a R.

Lo mismo ocurre con las otras parejas de la relación.

En el esquema de flechas correspondiente a esta relación se observa que si una flecha liga a 3 con 2 otra flecha liga a 3 con 1, hay una tercera flecha que liga a 3 con 1.

En el conjunto A se ha definido la relación T. En el conjunto de parejas correspondiente a ésta relación se observa que están las parejas (a, b) y (b, c) pero falta la pareja (a, c); así mismo falta la pareja (c, a). En el esquema de flechas se observa que no hay tres elementos ligados entre sí.

La relación T definida en el conjunto A, no es transitiva.

LAMINA No. 6

Relación de Equivalencia.

En el conjunto A se ha definido la relación R.

En el conjunto de parejas se verifica que la relación es reflexiva, simétrica y transitiva.

Se observa la forma característica del esquema de flechas de esta relación de equivalencia.

.-.

Se consideran otros esquemas correspondientes a relaciones que no son de equivalencia, así:

I - La relación es simétrica y transitiva pero no reflexiva.

II - La relación es transitiva y reflexiva pero no simétrica.

III - La relación es simétrica y reflexiva pero no transitiva.

LAMINA No. 7

Partición de un Conjunto.

Un conjunto E de niños se va a clasificar según la estatura. Se obtienen tres partes o subconjuntos de E. En ellos se verifican las propiedades de la partición:

a) son conjuntos disyuntos,

b) ninguno es vacío,

c) al efectuar la unión entre ellos se obtiene nuevamente el conjunto E.

LAMINA No. 8

Concepto de Función o Aplicación.

Un conjunto N de niños que regresan a sus casas.

Se observa: cada niño llega a una única casa, puede haber dos niños que lleguen a la misma casa, y no a todas las casas llegan niños. Lo que no puede ocurrir es que un niño llegue a dos casas a la vez.

Se dice: Entre el conjunto N de los niños y el conjunto C de las casas se ha determinado una relación f tal que a cada niño le corresponde una única casa.

f es una aplicación o función del conjunto N al conjunto C y se nota:

$$f : N \longrightarrow C$$

.-.

LAMINA No. 10

Biyección.

Un conjunto B de niños y un conjunto S de sillas. Se observa que entre el conjunto B y el conjunto S ocurre una función f tal que a cada niño le corresponde una silla y a cada silla llega un único niño.

La función en este caso se llama biyección.

LAMINA No. 11

Concepto de Longitud.

Al deslizar el lápiz siguiendo el borde de la regla entre los puntos A y B se tiene el segmento A B .

Si al colocar las puntas del compás en los extremos del segmento a y luego sin abrirlo ni cerrarlo las puntas también coinciden con los puntos extremos del segmento b, se dice que los segmentos a y b son congruentes.

No ocurre lo mismo con los segmentos c y d; es decir, el segmento c no es congruente con el segmento d.

Se verifica que la relación de congruencia entre segmentos es una relación de equivalencia.

La congruencia, determina entonces, una partición en el conjunto S de los segmentos; las clases de equivalencia de esta partición se llaman longitudes.

La longitud del segmento a es el conjunto de segmentos x tales que x es congruente con a; (aquí se han dibujado algunos de los segmentos de la longitud a).

Así mismo, las longitudes f y d son clases de equivalencia de esta partición.

.-.

LAMINA No. 12

Definición de Rectas Paralelas.

Al deslizar el lápiz siguiendo el borde de la regla se tiene la representación de una recta.

Con ayuda de la regla y la escuadra se construyen las rectas h y s ambas perpendiculares a la recta que coincide con el borde de la regla. De las rectas h y s se dice que son paralelas.

$h // s$ significa $h = s$ o tambien $h \cap s = \emptyset$

Concepto de dirección.

La relación de paralelismo entre rectas es una relación de equivalencia y determina en el conjunto P de rectas del plano una partición.

Cada una de las clases de equivalencia de la partición se llama dirección.

La dirección de la recta a es el conjunto de rectas x tales que x es paralela a a (se han dibujado algunas).

Así mismo, las direcciones de f y d son clases de equivalencia de la partición.

LAMINA No. 13

Concepto de Orientación.

Se consideran las parejas de puntos del plano (a, b) y (c, d) que pertenecen a rectas de la misma dirección.

Si se parte del punto a hacia b y del punto c hacia d, se dice que las parejas de puntos (a, b) y (c, d) tienen la misma orientación.

Se observa: Para cada dirección hay solamente dos orientaciones.

.-.

LAMINA No. 14

Relación de Equivalencia.

Las parejas de puntos (a, b) y (c, d):

a) son puntos extremos de segmentos de la misma longitud,

b) pertenecen a rectas de la misma dirección,

c) tienen la misma orientación.

Se dice entonces, que (a, b) es equipotente con (c, d).

Las siguientes parejas de puntos no son equipotentes:

I - No pertenecen a la misma orientación.

II - No pertenecen a la misma longitud.

III - No pertenecen a la misma dirección.

LAMINA No. 15

Traslación.

Como la relación de equipotencia entre parejas de puntos del plano es una relación de equivalencia, determina una partición en el conjunto de parejas de puntos.

Las clases de equivalencia de esta partición se llaman traslaciones Así por ejemplo, la traslación $\vec{a}$ es el conjunto de parejas de puntos (x, y) tales que (x, y) es equipolente con (p, q).

La traslación como una función.

La traslación $\underline{\vec{a}}$, es una función que hace corresponder a cada punto del plano otro punto tal que forma con él una pareja equipolente con $\underline{\vec{a}}$.

LAMINA No: 16

Composición de Traslaciones.

Sean las traslaciones $\vec{a}$ y $\vec{b}$

.-.

La traslación $\vec{a}$ es tal que al punto p le hace corresponder el punto q y la traslación $\vec{b}$ es tal que al punto q le hace corresponder el punto r.

La traslación $\vec{c}$ que hace corresponder al punto p el punto r se llama la traslación compuesta o traslación suma de las traslaciones $\vec{a}$ y $\vec{b}$ $\quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

<u>Adición entre traslaciones de la misma dirección.</u>

Consideremos las traslaciones $\vec{s}$ y $\vec{f}$ que pertenecen a la misma dirección.

I - La traslación $\vec{h}$ es la compuesta de las traslaciones $\vec{s}$ y $\vec{f}$ ó sea $\vec{s} + \vec{f} = \vec{h}$

II - La traslación $\vec{e}$ sumado con la traslación $\vec{g}$ de la traslación $\vec{u}$ $\quad \vec{e} + \vec{g} = \vec{u}$

<u>La traslación idéntica i</u> es tal que hace corresponder a cada punto P del plano, el mismo punto P.

III - Al sumar la traslación $\vec{d}$ con la traslación idéntica i se obtiene la misma traslación $\vec{d}$

IV - Para toda traslación $\vec{t}$ existe la traslación opuesta (op (t)) tal que sumada con la traslación t da la traslación idéntica.

LAMINA No. 17

<u>El Conjunto Z^+ de los Números Enteros Positivos.</u>

Se considera la traslación $\vec{b}$ y se halla $\vec{b} + \vec{b}$

$$\vec{b} + \vec{b} = 2\,\vec{b}$$

La traslación $2\vec{b}$ conserva la orientación de la traslación $\vec{b}$ y tiene el doble de la longitud de ella.

Así mismo:

$$\vec{b} + \vec{b} + \vec{b} = 3\,\vec{b}$$

y también $\vec{b} + \vec{b} + \vec{b} + \vec{b} = 4\vec{b}$

y el mismo $\vec{b}$ es $1\vec{b}$.

LAMINA No. 18

<u>El Conjunto Z^- de los Números Enteros Negativos.</u>

Dada la traslación $\vec{a}$ se halla la traslación 2 (op) $\vec{a}$

$$\text{op}(\vec{a}) + \text{op}(\vec{a}) = 2\ \text{op}(\vec{a})$$

A la traslación 2 (op) $\vec{a}$ se le llama $\overline{2}\,\vec{a}$, es decir el número $\overline{2}$ es tal que transforma a $\vec{a}$ en el op ($\vec{a}$).

La traslación $\overline{2}\,\vec{a}$ tiene orientación distinta a la de $\vec{a}$ y el doble de la longitud de ella.

Así mismo:

$$3\ \text{op}(\vec{a}) = \overline{3}\,\vec{a}$$

$$4\ \text{op}(\vec{a}) = \overline{4}\,\vec{a}$$

$$1\ \text{op}(\vec{a}) = \overline{1}\,\vec{a}$$

Si $\vec{a}$ es una traslación $\overrightarrow{\overline{1}a}$, $\overrightarrow{\overline{2}a}$, $\overrightarrow{\overline{3}a}$, $\overrightarrow{\overline{4}a}$, son traslaciones con igual o mayor longitud que la de $\vec{a}$ y con orientación opuesta a la de $\vec{a}$.

El conjunto $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \ldots = Z^-$

constituye el conjunto de los números enteros negativos.

LAMINA No. 19

<u>La Recta Numérica.</u>

Dada la recta E, sobre ella un punto fijo O, y la traslación $\vec{a}$, so bre O se aplica la traslación idéntica $0\,\vec{a}$, las traslaciones $1\,\vec{a}$, $2\,\vec{a}$, $3\,\vec{a}$, etc. y tambien $\overline{1}\,\vec{a}$, $\overline{2}\,\vec{a}$, $\overline{3}\,\vec{a}$, etc. de tal manera que a los puntos extremos de ellas corresponden los números 0, 1, 2, 3, ... y también $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, ...

Cuando se escoge la traslación $\vec{a}$ se determinan dos orientaciones o sentidos; el sentido de la traslación $\vec{a}$ es el sentido positivo y el opuesto es el sentido negativo.

LAMINA No. 20

Adición en el Conjunto Z.

Dada la traslación a se efectúan adiciones que verifican la propiedad clausurativa.

LAMINA No. 21

Se verifican las propiedades Modulativa e Invertiva.

LAMINA No. 22

Se verifican las propiedades Asociativa y Cunmutativa.

LAMINA No. 23

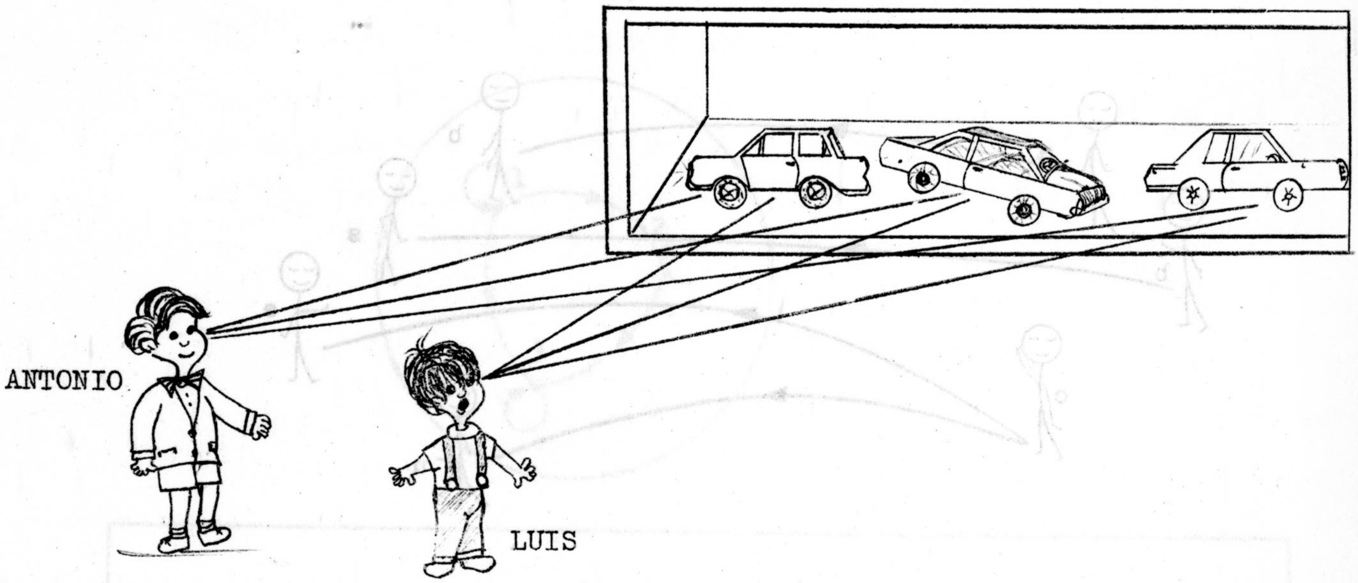
Se utilizan las propiedades estudiadas para resolver ecuaciones en el conjunto Z, de la forma $x + a = b$.

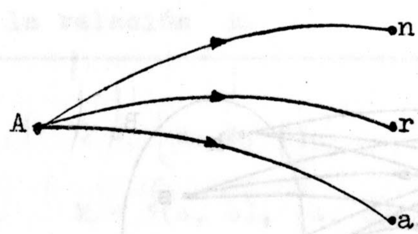
LAMINA No. 24

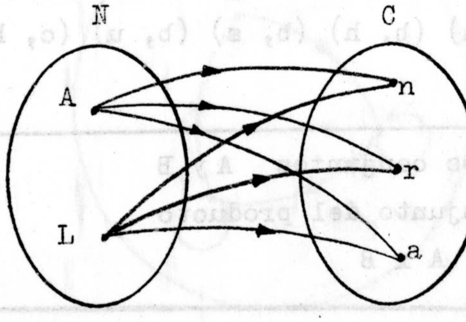
Solución general de la ecuación $x + s = b$

...-...

LAMINA No. 1



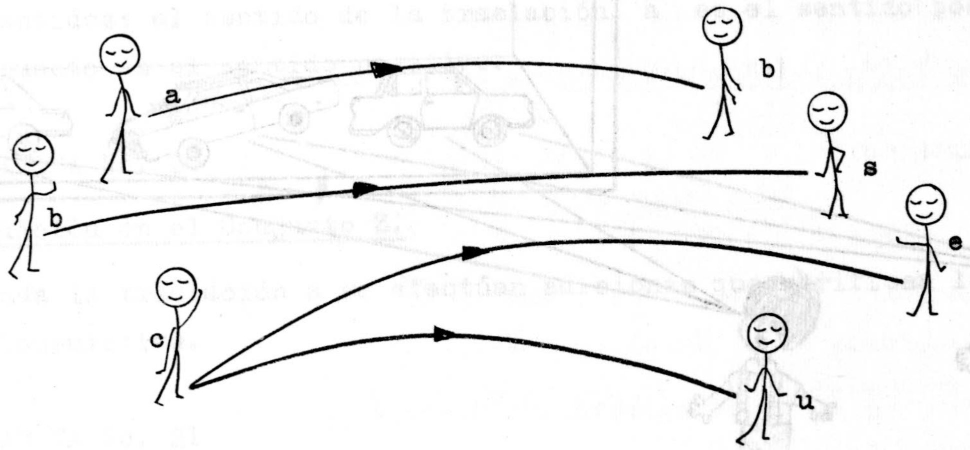




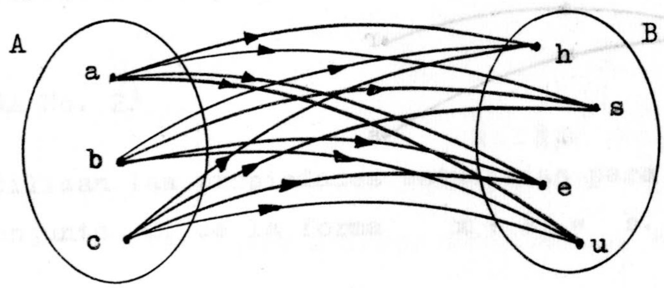
$$N \times C = \left\{ (A, n),\ (A, r),\ (A, a),\ (L, n),\ (L, r),\ (L, a) \right\}$$

LAMINA No. 2

$$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{h, s, e, u\}$$



$$R = \{(a, h), (b, s), (c, e), (c, u)\}$$



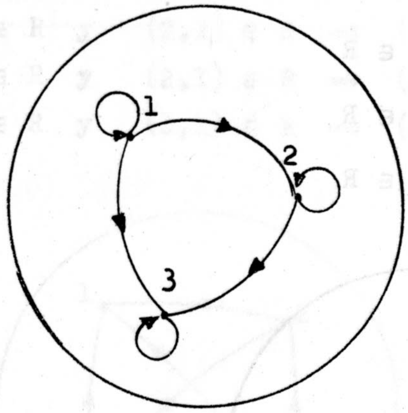
$$A \times B = \{(a, h)\ (a, s)\ (a, u)\ (b, h)\ (b, s)\ (b, u)\ (c, h)\ (c, s)(c, e)(c, u)\}$$

Una relación entre dos conjuntos A y B es una parte o subconjunto del producto cartesiano A x B

LAMINA No. 3

$$E = \{1, 2, 3\}$$

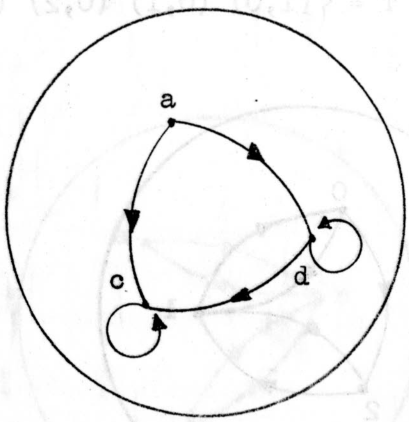
$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3,3)\}$$



Una relación R en un conjunto E, es reflexiva si para todo elemento x de E, la pareja (x, x) pertenece a la relación R.

$$C = \{a, b, c\}$$

$$M = \{(a, b), (a, c), (c, c), (b, b), (b, c)\}$$



LAMINA No. 4

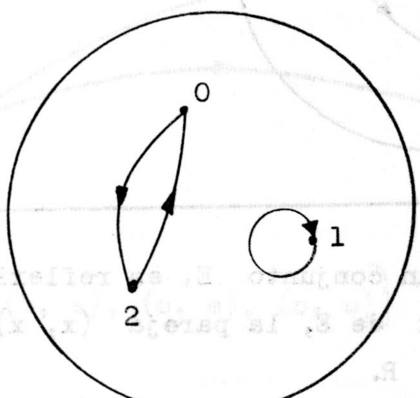
$$E = \{0, 1, 2\} \qquad R = \{(x, z) : x + z = 2\}$$

$$R = \{(0,2), (1, 1), (2,0)\}$$

Si $(0, 2) \in R \Rightarrow (2, 0) \in R$

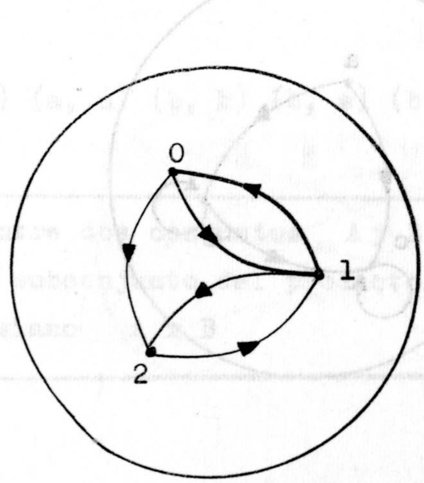
Si $(1, 1) \in R \Rightarrow (1, 1) \in R$

Si $(2, 0) \in R \Rightarrow (0, 2) \in R$



Una relación R en un conjunto E es simétrica, si cuando la la pareja (x, z) pertenece a R, la pareja (z, x) tambien pertenece a R

$$A = \{0, 1, 2\} \qquad T = \{(1,0)\ (0,1)\ (0,2)\ (2,1)\ (1,2)\}$$



LAMINA No. 5

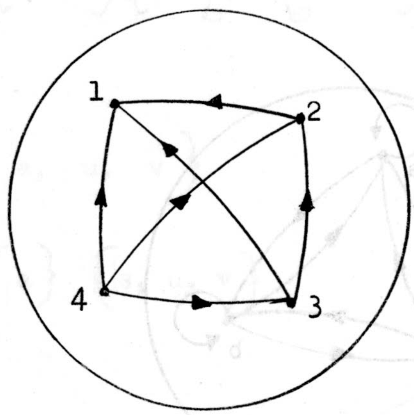
$E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad$ $R = \{(x, z) : z < x\}$

R = (2,1) (3,2) (3,1) (4,1) (4,2) (4,3)

Si $(3,2) \in R$ y $(2,1) \in R \Rightarrow (3,1) \in R$

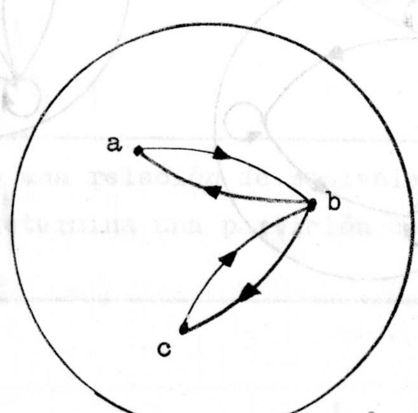
Si $(4,2) \in R$ y $(2,1) \in R \Rightarrow (4,1) \in R$

Si $(4,3) \in R$ y $(3,1) \in R \Rightarrow (4,1) \in R$



Una relación R en un conjunto E es transitivo, si cuando pas parejas (x, z) y (z, v) pertenecen a R, la pareja (x, v) tambien pertenece a R.

$A = \{a, b, c\}$ $\qquad$ $T = \{(a,b)\ (b,c)\ (c,b)\ (b,a)\}$

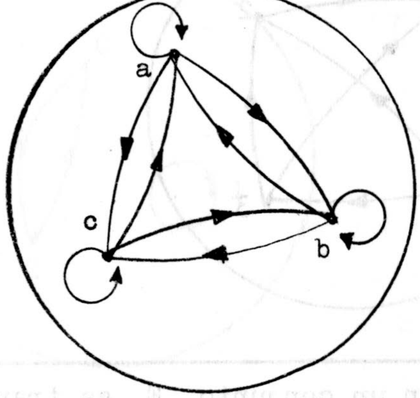


LAMINA No. 6

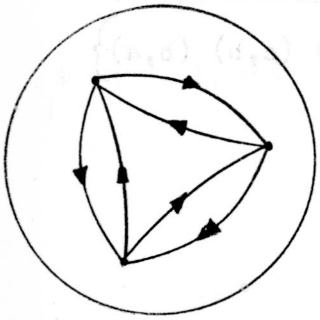
Una relación R definida en un conjunto E es Equivalente si es a la vez Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

A = a, b, c

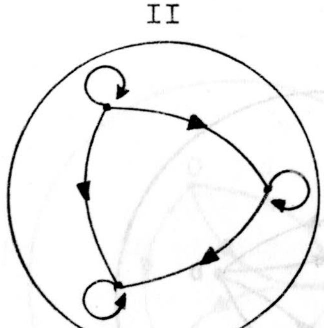
$$R = \{(a,a)\ (b,b)\ (c,c)\ (a,b)\ (b,c)\ (a,c)\ (b,a)\ (c,b)\ (c,a)\}$$



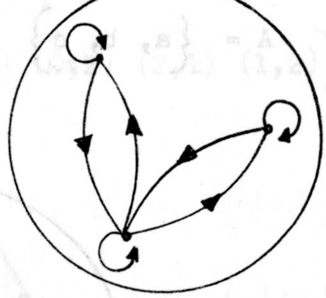
I



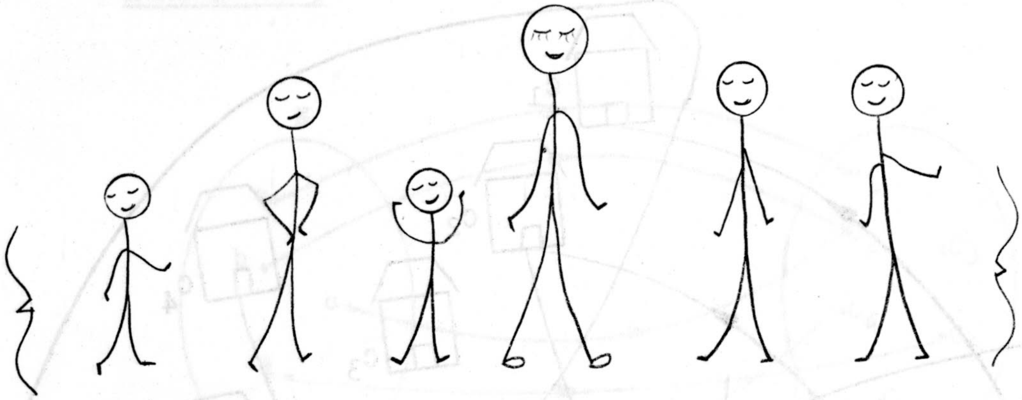
II



III

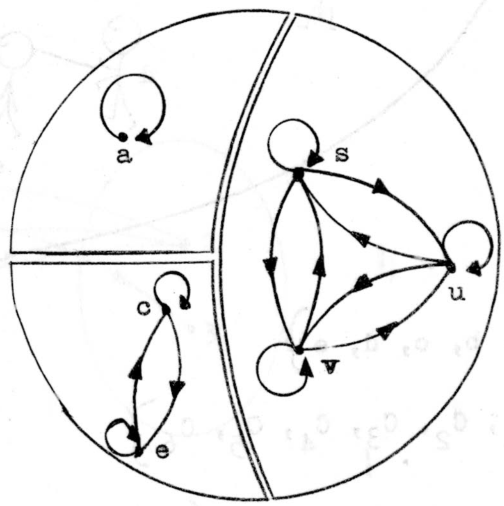


LAMINA No. 7



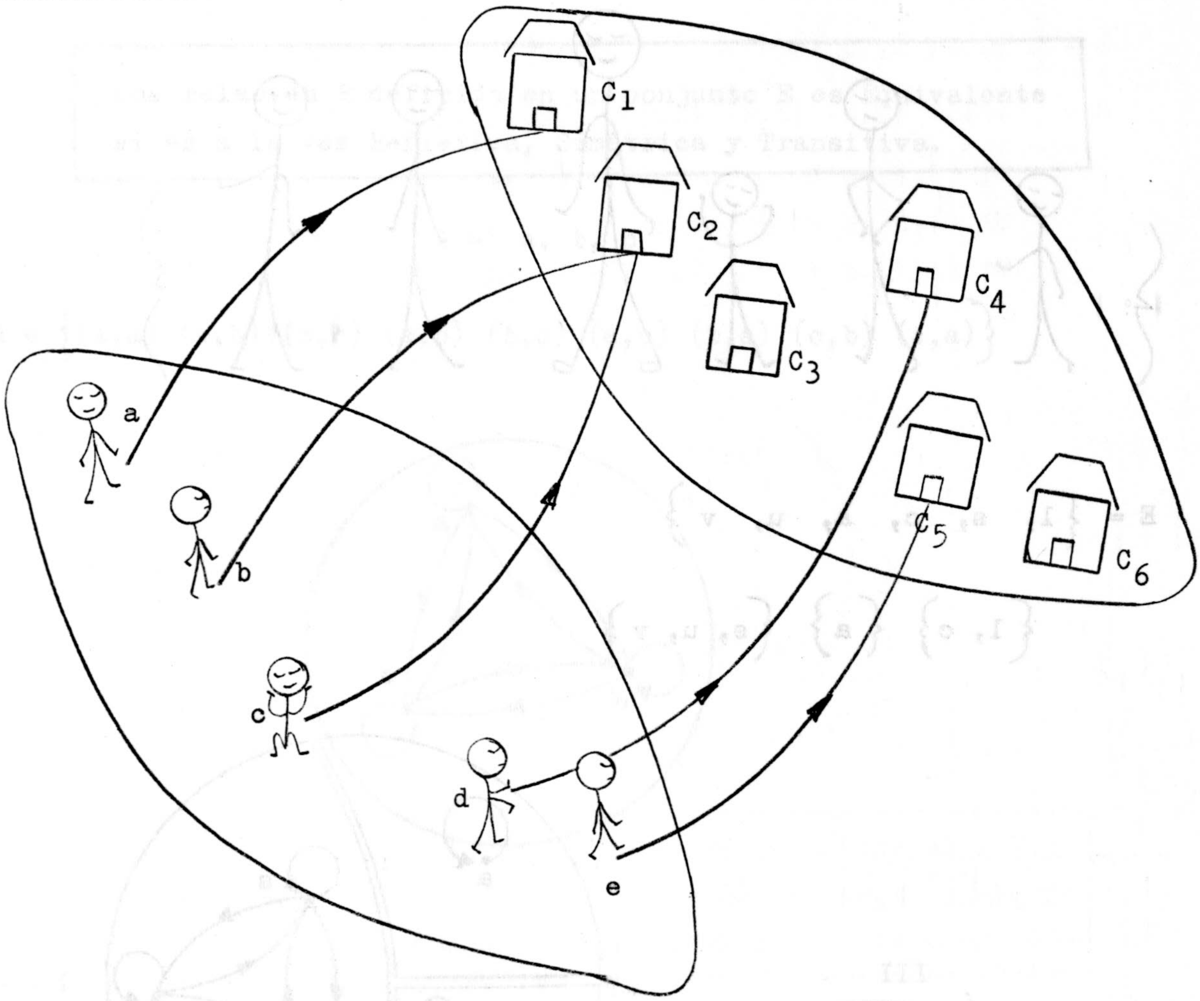
$E = \{l, s, c, a, u, v\}$

$\{l, c\}$ $\{a\}$ $\{s, u, v\}$



Si R es una relación de equivalencia en un conjunto E, entonces, R determina una partición del conjunto E.

LAMINA No. 8



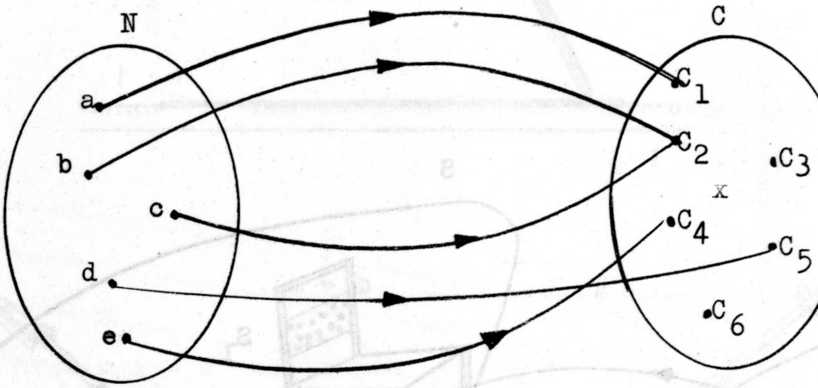
$$N = \{a, b, c, d, e\}$$

$$C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$$

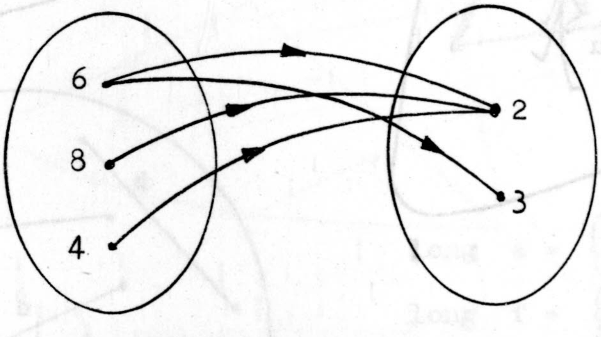
$$F : N \longrightarrow C$$

Una aplicación o función de un conjunto N en un conjunto C es una relación tal que a todo elemento de N le corresponde un único elemento de C .

LAMINA No. 9



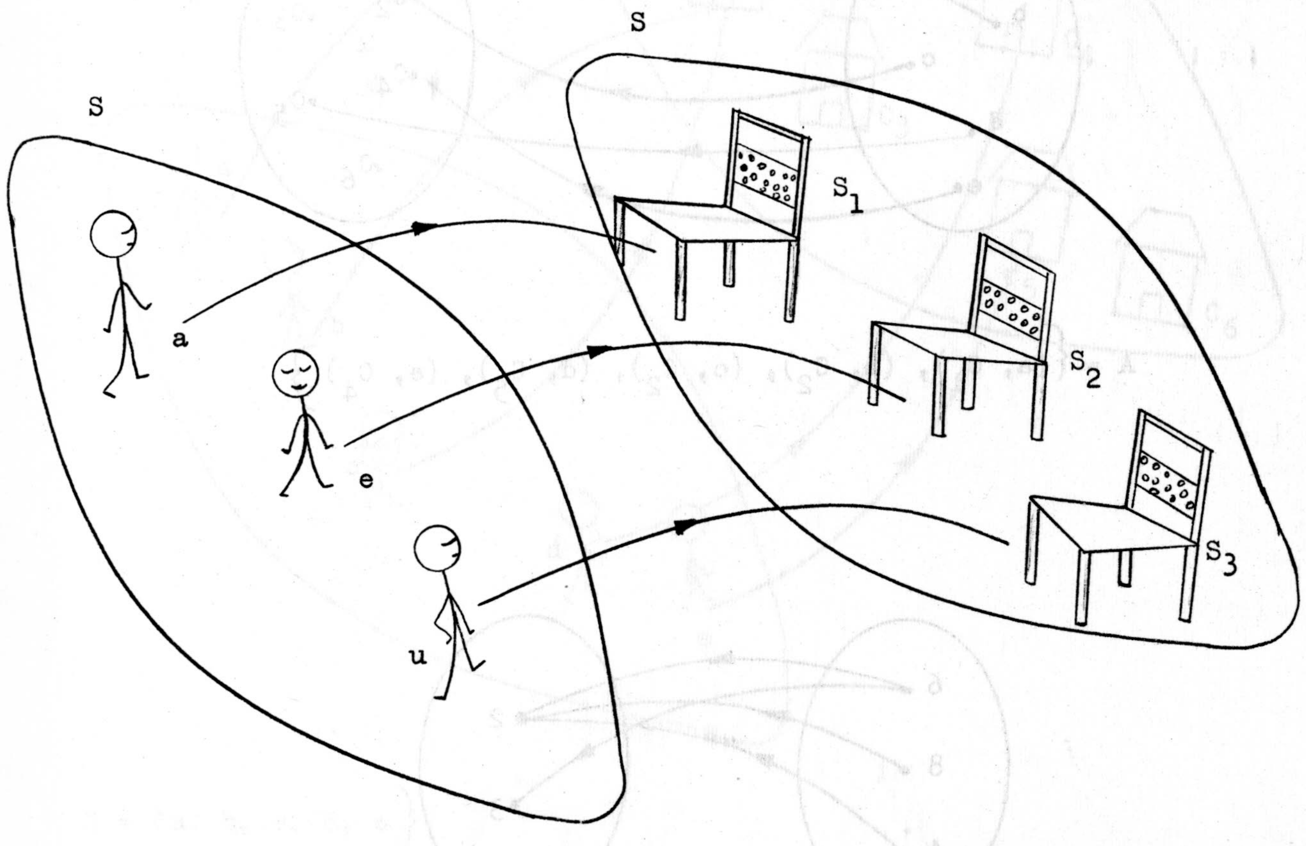
$$A = \{(a, C_1), (b, C_2), (c, C_2), (d, C_5), (e, C_4)\}$$



$$M = \{(6, 2), (6, 3), (4, 2), (8, 2)\}$$

.-.

LAMINA No. 10.



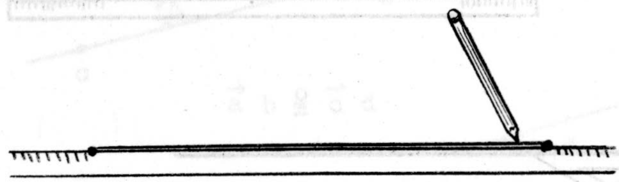
$B = \{a, e, u\}$

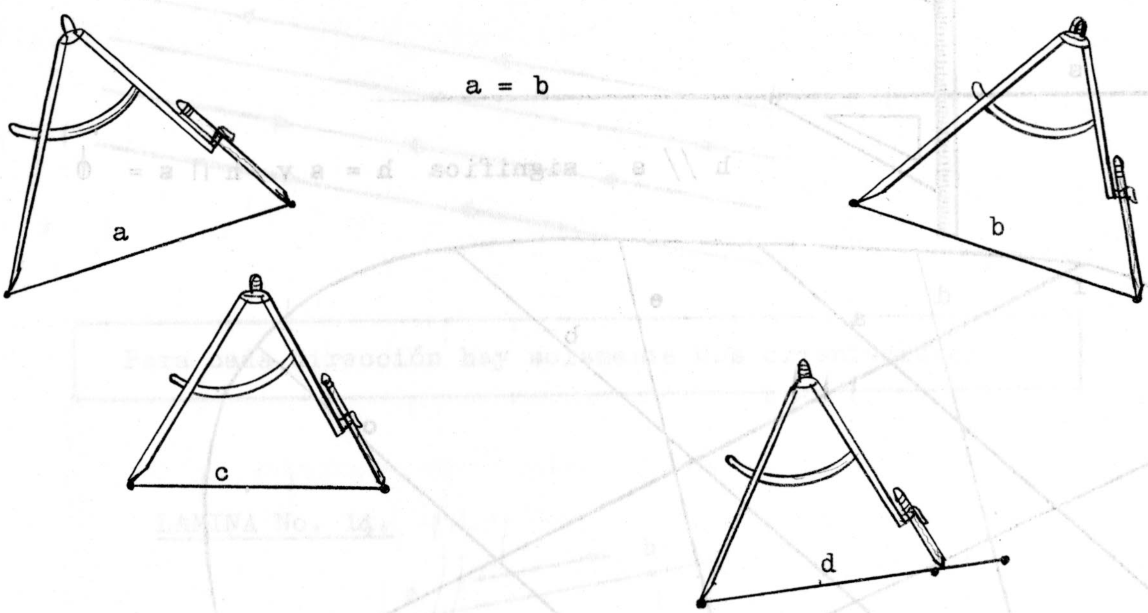
$S = \{S_1, S_2, S_3\}$

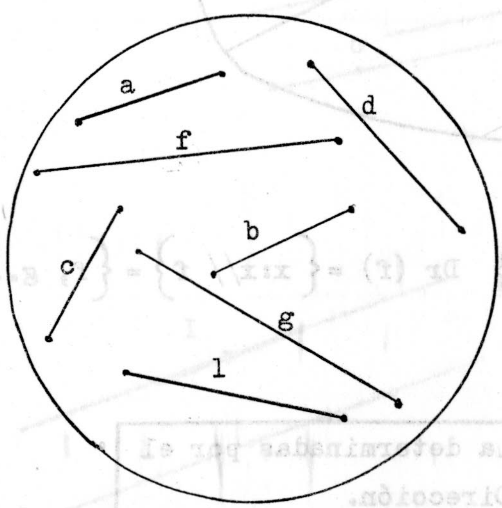
$f : B \longrightarrow S$

Una Biyección entre A y B es una aplicación tal que a cada elemento de A le corresponde un único elemento en B, y cada elemento de B es el correspondiente de un único elemento de A.

LAMINA No. 11







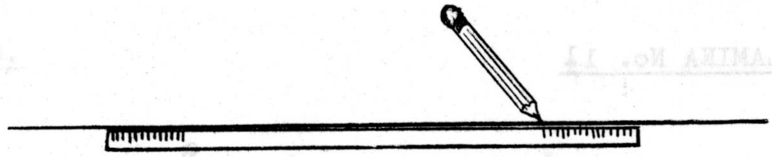
$$\text{long } a = \{x : x \equiv a\} = \{a, b, c \ldots\}$$

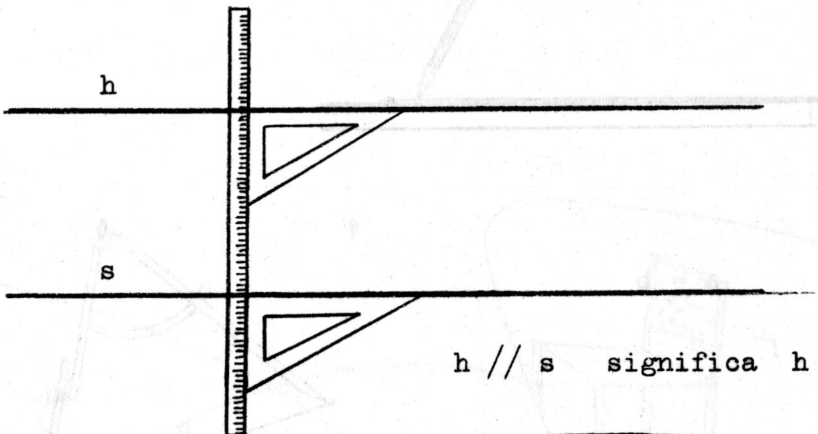
$$\text{long } f = \{x : x \equiv f\} = \{f, g, \ldots\}$$

$$\text{long } d = \{x : x \equiv d\} = \{d, c, \ldots\}$$

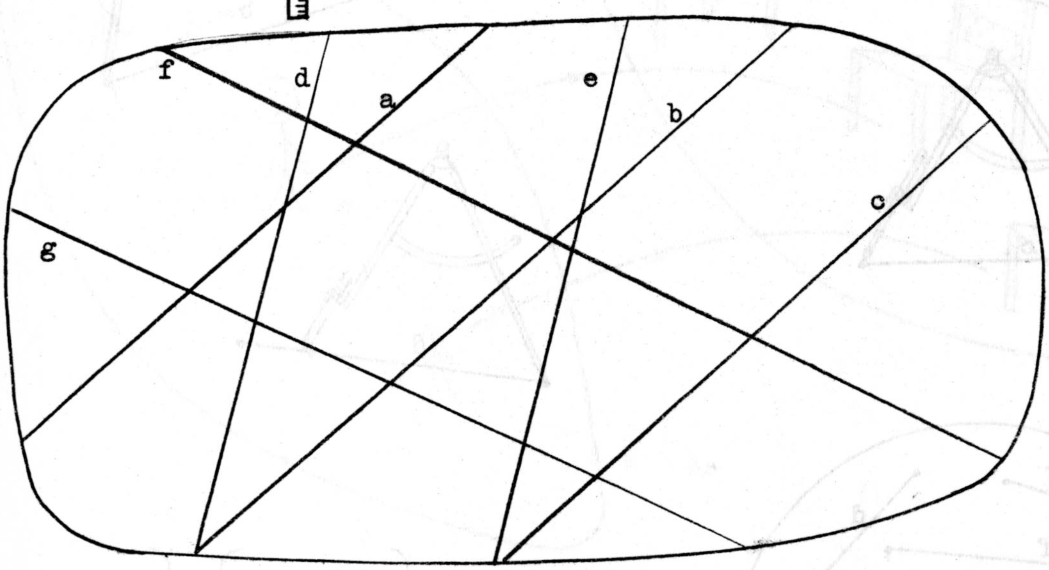
Cada una de las clases de equivalencia determinadas por la congruencia en los segmento se llama longitud.

LAMINA No. 12.





$h \parallel s$ significa $h = s \vee h \cap s = \phi$

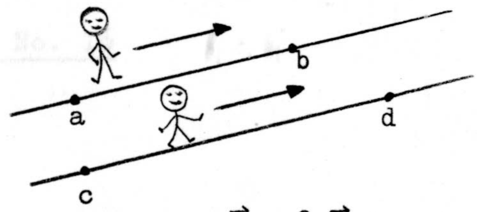


$\mathrm{Dr}\ (a) = \{x : x \parallel a\} = \{a, b, c, \ldots\}$ $\quad \mathrm{Dr}\ (f) = \{x : x \parallel f\} = \{f, g \ldots\}$

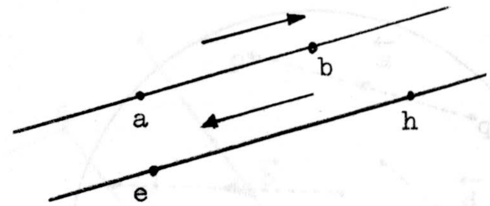
$\mathrm{Dr}\ (d) = \{x : x \parallel d\} = \{d, c, \ldots\}$

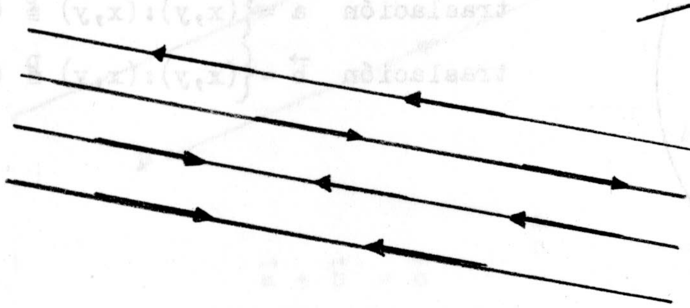
Cada una de las clases de equivalencia determinadas por el paralelismo en las Rectas se llama Dirección.

LAMINA No. 13.



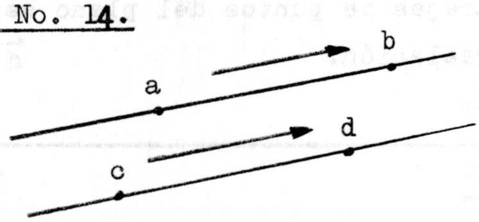
$\vec{a}\ b \overset{o}{\equiv} \vec{c}\ d$





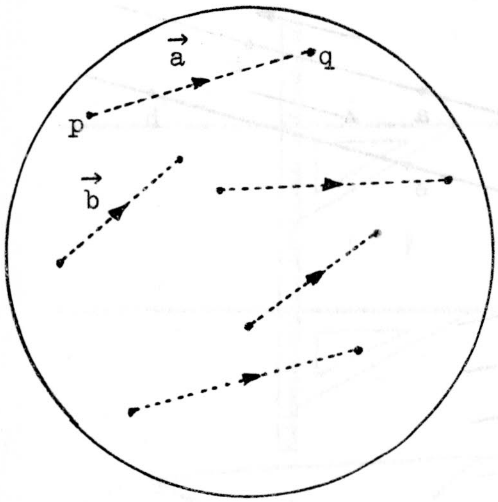
Para cada dirección hay solamente dos orientaciones.

LAMINA No. 14.



$$\left.\begin{array}{rcl} ab & \equiv & cd \\ ab & // & cd \\ (a,b) & \overset{o}{\equiv} & (c,d) \end{array}\right\} \Longrightarrow (a,\ b) \overset{p}{\equiv} (c,\ d)$$

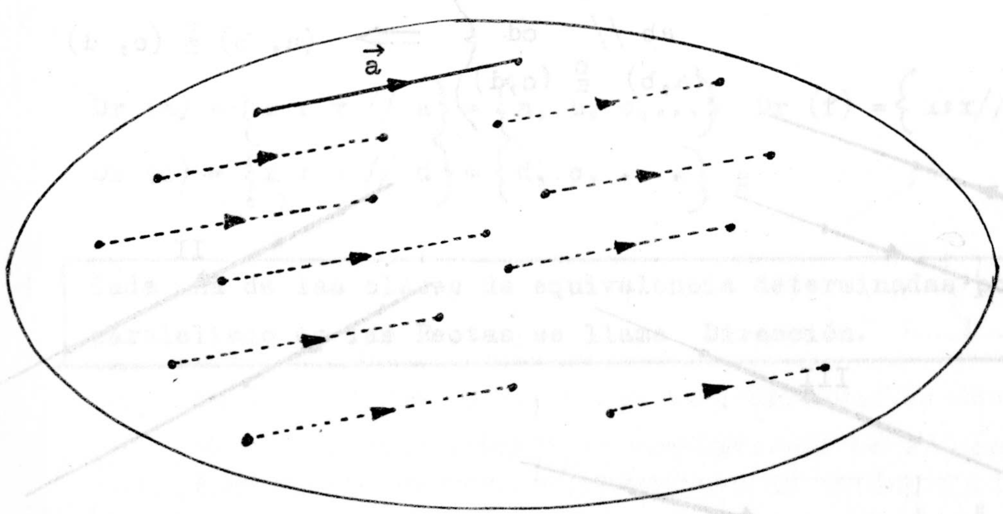
LAMINA No. 15.



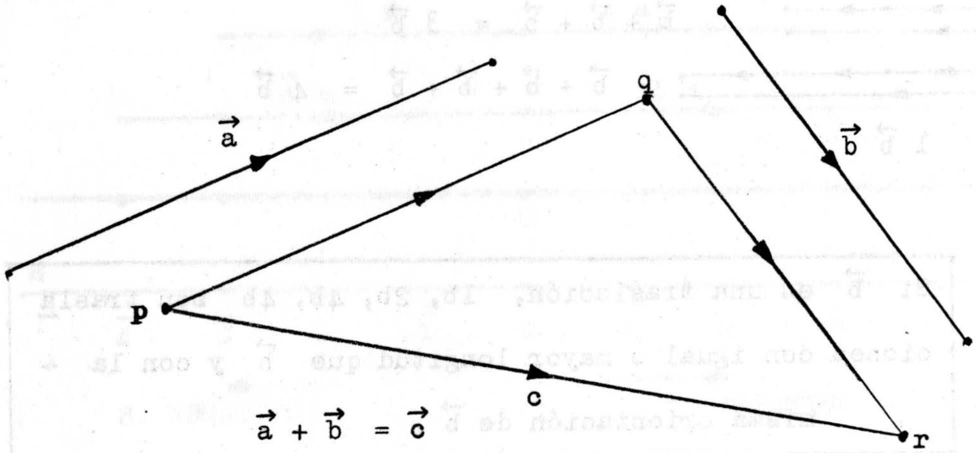
traslación $\vec{a} = \left\{(x,y):(x,y) \overset{p}{\equiv} (p,q)\right\}$

traslación $\vec{b} = \left\{(x,y):(x,y) \overset{p}{\equiv} (t,h)\right\}$

Cada una de las clases de equivalencia determinadas por la equipolencia en las parejas de puntos del plano se llama traslación.

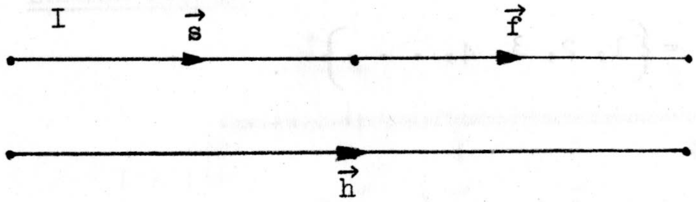


LAMINA No. 16



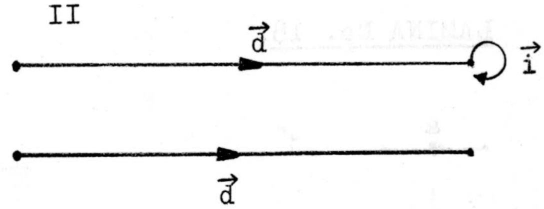
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

I



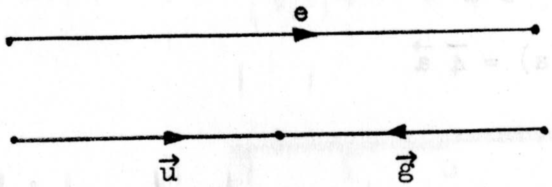
$\vec{s} + \vec{f} = \vec{h}$

II



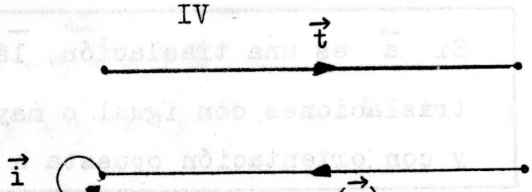
$\vec{d} + \vec{i} = \vec{d}$

III



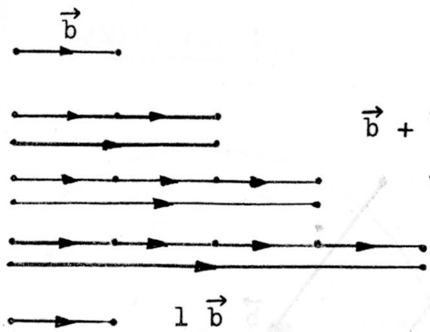
$\vec{e} + \vec{g} = \vec{u}$

IV



$\vec{t} + op(\vec{t}) = \vec{i}$

LAMINA No. 17.



$\vec{b} + \vec{b} = 2\,\vec{b}$

$\vec{b} + \vec{b} + \vec{b} = 3\,\vec{b}$

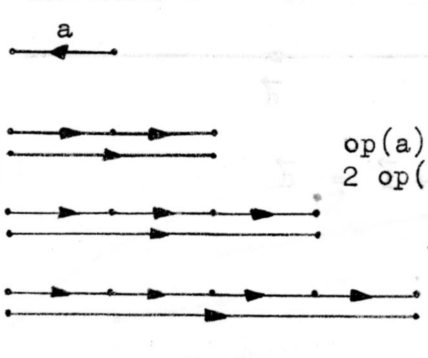
$\vec{b} + \vec{b} + \vec{b} + \vec{b} = 4\,\vec{b}$

$1\,\vec{b}$

Si $\vec{b}$ es una traslación, 1b, 2b, 4b, 4b son traslaciones con igual o mayor longitud que $\vec{b}$ y con la misma orientación de $\vec{b}$.

$$z^{+} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

LAMINA No. 18.



$op(a) + op(a) = 2\ op(a)$
$2\ op(a) = \bar{2}\,\vec{a}$.

$3\ op(a) = \bar{3}\,\vec{a}$

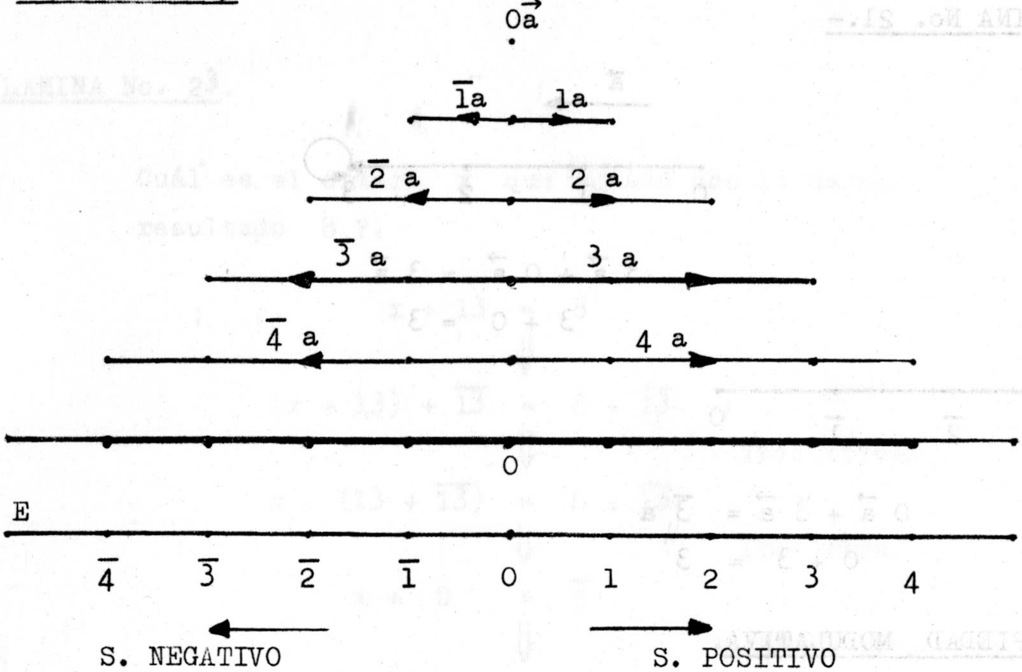
$4\ op(a) = \bar{4}\,\vec{a}$

$1\ op(a) = \bar{1}\,\vec{a}$

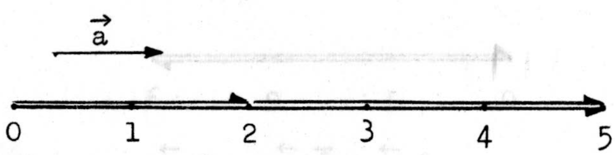
Si $\vec{a}$ es una traslación, $\bar{1}a$, $\bar{2}a$, $\bar{3}a$, $\bar{4}a$, son traslaciones con igual o mayor longitud que $\vec{a}$ y con orientación opuesta a la de $\vec{a}$.

$$z^{-} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \ldots\}$$

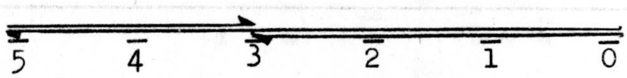
LAMINA No. 19.



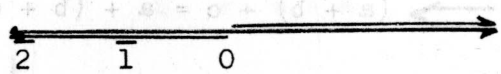
LAMINA No. 20



$$2\vec{a} + 3\vec{a} = 5\vec{a}$$
$$2 + 3 = 5$$



$$\overline{5}\,\vec{a} + 2\,\vec{a} = \overline{3}\,a$$
$$\overline{5} + 2 = \overline{3}$$

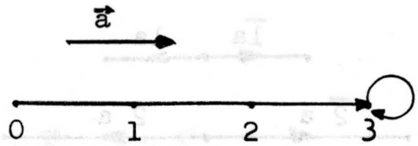


$$\overline{2}\,\vec{a} + 5\,\vec{a} = 3\,\vec{a}$$
$$\overline{2} + 5 = 3$$

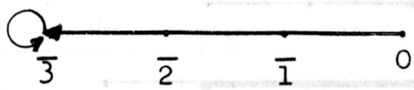
Propiedad Clausurativa.

$$a \in z \;,\wedge,\; b \in z \Rightarrow (a + b) \in z$$

LAMINA No. 21.-



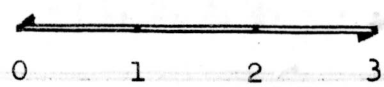
$$3\,\vec{a} + 0\,\vec{a} = 3\,\vec{a}$$
$$3 + 0 = 3$$



$$0\,\vec{a} + \overline{3}\,\vec{a} = \overline{3}\,a$$
$$0 + \overline{3} = \overline{3}$$

PROPIEDAD MODULATIVA.

$$a \in Z \Longrightarrow a + 0 = a = 0 + a$$



$$3\,\vec{a} + \overline{3}\,\vec{a} = 0\,\vec{a}$$
$$3 + \overline{3} = 0$$

PROPIEDAD INVERTIVA.

$$a \in z \Longrightarrow a + \overline{a} = 0 = \overline{a} + a$$

LAMINA No. 22.

PROPIEDAD ASOCIATIVA.

$$(\overline{12} + 8) + \overline{5} = \overline{12} + (8 + \overline{5})$$
$$\overline{4} + \overline{5} = \overline{12} + 3$$
$$\overline{9} = \overline{9}$$

$$a, b, c, \in z \Longrightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$$

PROPIEDAD CONMUTATIVA.

$$\overline{5} + 13 = 8$$
$$13 + \overline{5} = 8$$
$$\overline{5} + 13 = 13 + \overline{5}$$

$$a, b \in z \Longrightarrow a + b = b + a$$

LAMINA No. 23.

Cuál es el entero x que sumado con 13 da como resultado 8 ?.

$$
\begin{aligned}
x + 13 &= 8 \\
&\Downarrow \\
(x + 13) + \overline{13} &= 8 + \overline{13} \\
&\Downarrow \qquad \text{Asociativa.} \\
x + (13 + \overline{13}) &= 8 + \overline{13} \\
&\Downarrow \qquad \text{Invertiva.} \\
x + 0 &= \overline{5} \\
&\Downarrow \qquad \text{Modulativa.} \\
x &= \overline{5}
\end{aligned}
$$

LAMINA No. 24.

$$
\begin{aligned}
x + a &= b \\
&\Downarrow \\
(x + a) + \overline{a} &= b + \overline{a} \\
&\Downarrow \\
x + (a + \overline{a}) &= b + \overline{a} \\
&\Downarrow \\
x + 0 &= b + \overline{a} \\
&\Downarrow \\
x &= b + \overline{a}
\end{aligned}
$$

La solución de la ecuación $x + a = b$

es el entero $x = b + \overline{a}$.

-.-.-.-.-.-.-.-.-

Este trabajo fué presentado en el III Congreso Nacional de Matemáticas a Nivel Medio, realizado en Popayán. 1.969.