*Boletín de Matemáticas*
*Vol. XVIII, Nº 1,2,3, (1984)*

***APUNTES DE SEMINARIO***

# LA TEORIA SEMANTICA DE LA VERDAD DE TARSKI Y LA TEORIA DE MODELOS (*)

*Claudia M. Polanía S.*

## INTRODUCCION.

El concepto de verdad en matemáticas ha variado a través de su historia. Hasta el siglo pasado las verdades en matemáticas eran consideradas absolutas, como modelo de trabajo para la obtención de verdades se tenía a los "Elementos" de Euclides: a partir de unas pocas verdades consideradas evidentes por sí mismas (postulados y nociones comunes), se deducían las demás verdades (proposiciones o teoremas). La intuición y el razonamiento han jugado un papel fundamental en el trabajo matemático pero los trabajos de Lobachevski, Bolyai y Gauss que condujeron a las geometrías n euclidianas obligaron a los matemáticos y en general a la comunidad científica a cuestionar seriamente el papel de la intuición en matemáticas.

La geometría euclidiana, que se tenía como una excelente y única teoría sobre el espacio en que nos movemos, quedaba tambaleante al mostrarse la posibilidad de otras geometrías igualmente coherentes. Una cierta proposición resultaba verdadera según una cierta teoría y falsa según otra; las verdades en matemáticas habían dejado de ser absolutas para relativizarse a la teoría escogida. Así que era importante responder a la pregunta: *¿Qué es verdad en matemáticas?*

La lógica aristotélica sobre la que se basa la geometría euclidiana no podía ser cuestionada; la mala jugada debía venir por parte de la intuición. Como consecuencia de esta situación, la geometría es cuestionada como fundamento de la matemática. Los ojos de los matemáticos del siglo XIX se vuelven hacia la aritmética; los trabajos de Weierstrass, Cauchy, Dedekind y otros conducen a la llamada aritmetización del análisis. Simultáneamente con los intentos de dar un sólido cimiento al cálculo diferencial e integral de Newton y

Leibniz, Boole, Pierce, Schroeder, trataban de algebraizar la lógica, dando nacimiento a la lógica matemática.

Hacia finales del siglo pasado aparece la teoría de conjuntos de Cantor quien trataba de solucionar algunos problemas del análisis sobre series infinitas, y los trabajos de Frege en lógica dan un salto definitivo en el desarrollo de ésta. El reinado de la aritmética como fundamento de la matemática llega a su fin y comienza la era de la lógica y la teoría de conjuntos. Desafortunadamente se encuentran paradojas en la teoría de Cantor, lo que hizo necesario una revisión muy profunda de los fundamentos de las matemáticas. La crisis de los fundamentos había comenzado con la aparición de las geometrías no euclidianas, solo sería superada con el programa de Hilbert de axiomatización de la matemática, donde la intuición no debía jugar ningún papel importante. Russell y Whitehead axiomatizaron la lógica; Zermelo, Fraenkel, von Neumann, Gödel, axiomatizaron la teoría de conjuntos, evitando las paradojas y exigiendo el máximo rigor en las deducciones.

Para llevar a cabo la propuesta de Hilbert era necesario separar la forma del contenido de las teorías y demostrar que éstas eran consistentes [1] y completas [2].

Hilbert crea una nueva ciencia, la metamatemática, que se encargará de estudiar las teorías como un todo. Deberá dar los métodos para demostrar que una teoría axiomatizada es consistente, completa, decidible, etc.

Muchos fueron los seguidores de Hilbert y muchos los trabajos encaminados a axiomatizar toda la matemática. Hilbert mismo axiomatiza la geometría en su célebre tratado sobre los fundamentos de la geometría [3].

El programa formalista parecía tener completo éxito cuando en 1931 Gödel con sus famosos teoremas de incompletitud demuestra que ninguna teoría formal de la aritmética, puede contener todas las verdades de ella. Así Gödel prueba que el conjunto de fórmulas verdaderas de la aritmética es distinto del conjunto de fórmulas deducibles de la teoría formal correspondiente. El concepto de verdad resulta diferente del de *deducibilidad*. Siendo posible definir rigurosamente cuándo una proposición es deducible de un cierto conjunto de premisas, es lógico preguntarse: ¿Es posible definir rigurosamente cuándo una proposición es verdadera en matemáticas?

La parte central de éste trabajo consiste en exponer la teoría semántica de la verdad de Tarski, que pretende dar una respuesta afirmativa a tal pregunta.

## EL CONCEPTO DE LA VERDAD DE TARSKI.

En 1944 aparece publicado el artículo: "The Semantic Conception of Truth" [4] donde Tarski expone su teoría sobre la verdad; esbozos de ésta teoría ya se encuentran en un artículo de 1930 publicado en polaco y traducido al alemán en 1933, titulado "La noción de verdad en los lenguajes formales" [5].

Nosotros aquí nos limitaremos a exponer las ideas contenidas en el artículo de 1944.

Para tener una definición de verdad satisfactoria, Tarski impone dos condiciones: Corrección Formal y Adecuación Material. Explicaremos en que consiste cada una de ellas.

### *Corrección Formal.*

Los lenguajes naturales son ambigüos, una palabra, una frase, puede cambiar de significado según el contexto en el que se encuentre; un lenguaje nos permite no solo hablar de cosas sino de expresiones de sí mismo. Observemos estas tres proposiciones del castellano:

$p$: Bogotá es la capital de Colombia
$q$: Bogotá tiene seis letras
$r$: Bogotá es la capital de Colombia es veradera.

$p$ es una proposición que se refiere a una ciudad colombiana, $q$ se refiere a la palabra Bogotá y $r$ se refiere a la proposición $p$. Así como los objetos tienen nombre, también podemos nombrar palabras o proposiciones cuando lo necesitemos y lo hacemos colocando la expresión entre comillas, para que sea completamente explícito que nos referimos a una palabra como en $q$ o a proposiciones como en $r$; por esto $p$, $q$, $r$ quedan de la siguiente manera:

$p$: Bogotá es la capital de Colombia
$q$: "Bogotá" tiene seis letras
$r$: "Bogotá es la capital de Colombia" es verdadera.

Consideremos además estos otros ejemplos:

$s$: No ponga atención a esta frase
$t$: Esta frase es falsa.

Nótese que ambas proposiciones se refieren a sí mismas y son paradójicas. En el caso de $s$, cuando hemos terminado de leer la frase estamos haciendo justo lo contrario a lo que se ordena; y en el caso de *t*, que es una de las formas más sencillas de la paradoja del mentiroso, vemos que si *t* es falsa, entonces *t* es verdadera, y si *t* es verdadera, pues lo que afirma es que es falsa, círculo vicioso del que no es posible salir en lenguajes que tienen las siguientes dos características:

**1.** El lenguaje contiene además de sus expresiones, los medios de referirse a ellas y predicados semánticos como verdadero y falso.

**2.** Las leyes de la lógica usual valen.

A un lenguaje que goza de la propiedad 1., Tarski lo llama *semánticamente cerrado*.

La *corrección formal* de un lenguaje consiste en que no debe ser semánticamente cerrado. Para ésto es necesario tener dos lenguajes, un lenguaje-objeto a cuyas proposiciones se pueden asignar el predicado verdadero (o el predicado falso) y un metalenguaje en el cual podemos hablar del lenguaje-objeto. El *lenguaje-objeto* debe ser exactamente expecificado, deben darse leyes de formación de las expresiones significativas. El *metalenguaje* debe ser lo suficientemente rico para contener al lenguaje-objeto y poder referirse a él y a sus partes constituyentes.

*Adecuación Material:* Tarski quiere que su definición haga justicia a las intuiciones vinculadas con la concepción aristotélica de la verdad, la cual se resume en las siguientes palabras:

> "Decir de lo que es, que es, y de lo que no es, que no es, es verdadero, mientras que decir de lo que es, que no es, o de lo que no es, que es, es falso".

Para ello Tarski propone el siguiente esquema:

($T$): $X$ es verdadera, si y sólo si, $p$

donde $p$ es una proposición cualquiera del lenguaje objeto, $X$ es el nombre de $p$ que se denota "$p$" y ($T$) es una expresión del metalenguaje. Un ejemplo dado por el mismo Tarski es el siguiente: "La nieve es blanca" es verdadera, si y sólo si, la nieve es blanca. Aquí, naturalmente, $p$ es la nieve es blanca y $X$ es el nombre de $p$, que como ya hemos dicho se nota "$p$".

Una definición de verdad será *materialmente adecuada* si de ella se siguen todas las instancias del esquema ($T$).

Dadas las condiciones exigidas en un lenguaje $\mathcal{L}$, se tiene la siguiente definición:

*DEFINICION 1.* Una proposición es *verdadera* en un lenguaje $\mathcal{L}$ si y sólo si es satisfecha por todos los objetos y *falsa* en caso contrario.

En esta definición el concepto de verdad es reducido a otro concepto semántico, el de *satisfacción*; concepto bastante trajinado por la comunidad matemática, tanto o más que el de verdad. Si se consigue dar una definición rigurosa de satisfacción se tendrá igualmente una de verdad. Así que procederemos con un caso concreto:

## SATISFACCION Y VERDAD EN UN LENGUAJE DE PRIMER ORDEN $\mathcal{L}$.

Un lenguaje formal de primer orden está constituído por:

**1. Símbolos.**

a) Símbolos lógicos:

- Conectivos proposicionales $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Cuantificadores $\forall$, $\exists$
- Variables individuales $x_1, x_2, \ldots$
- Signos de puntuación ( , )

b) Símbolos no lógicos:

- Constantes individuales $a_1, a_2, \ldots$
- Letras de Función $f_i^n$. $i, n \in \mathbb{N}$
- Letras de Predicado $A_i^n$, $i, n \in \mathbb{N}$

El subíndice distingue entre dos letras de función (de predicado) del mismo tipo, y el superíndice indica la a-ridad de la función (el predicado) que el símbolo representa.

El conjunto de símbolos es el alfabeto de nuestro lenguaje, con ellos vamos a definir términos (análogos a las palabras de un lenguaje natural) y fórmulas (análogas a proposiciones de un lenguaje natural).

**2. *Términos.***

a) Las constantes y las variables son términos.

b) Si $f_i^n$ es un símbolo de función n-aria $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos, entonces $f_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es un término.

c) Una expresión es un término si y sólo si puede ser obtenido por medio de las cláusulas a) y b).

**3. *Fórmulas.***

a) **Fórmulas atómicas**: Si $A_i^n$ es una letra de predicado n-aria y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos, entonces $A_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica. Estas son las fórmulas mas sencillas que se pueden construír, las demás son complejas y así la definición general de fórmula bien formada es la siguiente:

b) Son **fórmulas bien formadas** (f.b.f.):

1- Todas las fórmulas atómicas.

2- Si $A$ y $B$ son f.b.f., entonces $(\neg A)$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $(\forall x_i)A$, $(\exists x_i)A$, son f.b.f.

3- Una expresión es f.b.f. si y sólo si puede ser obtenida en base únicamente de las cláusulas 1- y 2-.

La mayoría de las teorías algebraicas como las teorías de grupos, anillos, cuerpos, etc., son sistemas formales de primer orden; ello significa que sus axiomas y teoremas pueden expresarse en un lenguaje de primer orden y que se fundamentan en el cálculo de predicados clásico. Explicitamos mejor que es un sistema formal de primer orden:

Un *sistema formal de primer orden* $\mathbf{S}$, consta de dos partes:

1. La *Parte Sintáctica* que a su vez está constituida por:

a) Un lenguaje formal de primer orden $\mathcal{L}$.

b) Axiomas: - Lógicos. -Propios de la teoría.

c) Reglas de inferencia.

Diremos que $A$ es un teorema de $\mathbf{S}$ si es una fórmula deducible de los axiomas y se nota $\vdash_{\mathbf{S}} A$.

La parte sintáctica corresponde a la gramática de un lenguaje natural.

2. La *Parte Semántica* está constituída por $\mathcal{L}$, junto con una interpretación de $\mathcal{L}$.

Una *interpretación* $I$ de un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden es una 4-upla

$$I = \langle \mathcal{D}, \{f_i^{nI}\}_{i,n\in\mathbb{N}}, \{A_i^{nI}\}_{i,n\in\mathbb{N}}, \{d_i\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle$$

donde **i)** $\mathcal{D}$ es un conjunto no vacío llamado dominio de interpretación.

**ii)** A cada letra de función n-aria $f_i^n$ corresponde una función $f_i^{nI}: \mathcal{D}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{D}$.

**iii)** A cada letra de predicado n-aria $A_i^n$ corresponde un precidado n-ario $A_i^{nI} \subseteq \mathcal{D}^n$.

**iv)** A cada constante $a_i$ corresponde un elemento $d_i$ de $\mathcal{D}$.

Veamos como ejemplo que la teoría de grupos es un sistema formal de primer orden:

1. *Parte Sintáctica.*

a) $\mathcal{L}$ = {símbolos lógicos, $a_1, f_1^2, A_1^2$}

b) Axiomas lógicos [6]: Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ son f.b.f. entonces:

1- $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$

2- $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$

3- $(\neg\mathcal{B} \to \neg\mathcal{A}) \to ((\neg\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to \mathcal{B})$

4- $(\forall x_i)\mathcal{A}(x_i) \to \mathcal{A}(t)$; (nótese que $t$ puede ser idén ticamente $x$)

5- $(\forall x_i)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to (\forall x_i)\mathcal{B})$

c) Axiomas propios:

1- Ley Asociativa

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^2(x_2, x_3)), f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)).$$

2- Ley Modulativa

$$(\forall x_1)A_1^2(f_1^2(a_1, x_1), x_1)$$

3- Ley Invertiva

$$(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1)$$

d) Reglas de Inferencia:

1- Modus Ponens: $\mathcal{B}$ se deduce de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

2- Generalización: $(\forall x_i)\,\mathcal{A}$ se deduce de $\mathcal{A}$.

## 2. *Parte Semántica*

a) Consideremos la interpretación:

$$I = \langle \mathbb{Z}, 0, +, = \rangle$$

donde $D = \mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros

$a_1^I = 0$

$f_1^{2I} = +$ la suma ordinaria entre enteros.

$A_1^{2I}$ es la igualdad entre enteros.

b) Axiomas propios.

1- $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1+(x_2+x_3) = (x_1+x_2)+x_3)$

2- $(\forall x_1)(x_1+0 = x_1)$

3- $(\forall x_1)(\exists x_2)(x_1+x_2 = 0)$.

Podemos dar diferentes interpretaciones a la sintaxis dada en 1-, por ejemplo:

2'- $I' = \langle \mathbb{Q}, 1, \cdot, = \rangle$

donde 1 es la interpretación de la constante $a_1$, $\cdot$ es la interpretación de $f_1^2$ y = es la interpretación de $A_1^2$.

2"- $I'' = \langle M(\mathbb{R})_{2\times 2}, id_{2\times 2}, +, = \rangle$

donde $M(\mathbb{R})_{2\times 2}$ es el conjunto de las matrices $2\times 2$ sobre los reales, $id_{2\times 2}$ es la matriz idéntica $2\times 2$, + es la suma entre matrices, $e$ = es la igualdad entre matrices.

Definido lo que es un sistema formal de primer orden, con lo cual estamos cumpliendo con el primer requisito necesario para tener una definición formalmente correcta de *verdad*, entramos a definir rigurosamente la noción de *satisfacción*.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formal de primer orden, $I$ una interpretación (con dominio $D$) de $\mathcal{L}$, sea $\Sigma$ el conjunto de todas las sucesiones numerables de elementos de $D$. Para $S \in \Sigma$, $S = (b_1,$

$b_2, \ldots)$ definimos la función

$S^*$: {términos de $\mathcal{L}$} $\rightarrow \mathcal{D}$ recursivamente:

$S^*(a_i) = a_i^I$

$S^*(x_i) = b_i$

$S^*(f_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = (f_i^n)^I(S^*(t_1), S^*(t_2), \ldots, S^*(t_n)).$

**DEFINICION 2.** Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, $I$ una interpretación de $\mathcal{L}$, $\Sigma$ como se describió anteriormente y $S \in \Sigma$.

**1)** Si $\mathcal{A}$ es una fórmula atómica $A_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, entonces $S$ satisface $\mathcal{A}$, si y sólo si, $(S^*(t_1), S^*(t_2), \ldots, S^*(t_n)) \in (A_i^n)^I$.

**2)** Si $\mathcal{A}$ es una f.b.f., $S$ satisface $(\neg\mathcal{A})$, si y sólo si $S$ no satisface $\mathcal{A}$.

**3)** Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ son f.b.f., $S$ satisface $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, si y sólo si $S$ satisface $\mathcal{A}$ o $S$ satisface $\mathcal{B}$.

**4)** Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ son f.b.f., $S$ satisface $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, si y sólo si $S$ satisface $\mathcal{A}$ y $S$ satisface $\mathcal{B}$.

**5)** $S$ satisface $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$, si y sólo si $S$ no satisface $\mathcal{A}$ ó $S$ satisface $\mathcal{B}$.

**6)** $S$ satisface $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$, si y sólo si $S$ satisface $\mathcal{A}$ toda vez que $S$ satisface $\mathcal{B}$ y viceversa.

**7)** $S$ satisface $(\forall x_i)\mathcal{A}$, ($x$ una variable), si y sólo si toda sucesión $S'$ que difiera de $S$ en a lo más la i-ésima componente, satisface $\mathbb{A}$.

**8)** $S$ satisface $(\exists x_i)\mathbb{A}$, si y sólo si, alguna sucesión $S'$ que difiera de $S$ en a lo más la i-ésima componente satisface a $\mathbb{A}$.

Tarski escoge la noción de satisfacción para la definición de verdad, ya que es una noción más general y se puede aplicar a fórmulas con variables libres, mientras que la verdad es solo aplicable a *sentencias* o fórmulas cerradas (sin variables libres).

Con el ejemplo ya introducido de la teoría de grupos esperamos aclarar las definiciones dadas.

Consideremos la fórmula

$$\mathbb{A}: (\forall x_1)(\exists x_2)(A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1)) \qquad (1)$$

y tomemos $S = (1,2,3\ldots)$ una sucesión en $\mathbb{Z}$; según la definición: $S$ satisface $\mathbb{A}$, si y sólo si toda sucesión $S' = (b,2,3,\ldots)$ que difiere de $S$ en a lo más la primera componente satisface $\mathbb{B}$ donde

$$\mathbb{B}: (\exists x_2)(A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1)) \qquad (2)$$

ahora bien, $S'$ satisface $\mathbb{B}$, si y sólo si alguna sucesión $S'' = (b,c,3,\ldots)$ que difiere de $S'$

en a lo más la segunda componente satisface

$$\mathcal{C}: A_1^2(f_1^2(x_1,x_2),a_1)) \qquad (3)$$

que es una fórmula atómica; luego $S''$ satisface a (3) si y sólo si

$$((S'')^*(f_1^2(x_1,x_2),(S'')^*(a_1)) \in A_1^{2I}$$

es decir, si y sólo si $(b+c,0) \in =$, ó como es más común escribir, si $b+c = 0$; basta tomar $c = -b$, con lo cual $S'' = (b,-b,3,\ldots)$ satisface a (3) y así $S'$ satisface (2). Como $b$, es un elemento cualquiera de $\mathcal{D}$ podemos afirmar entonces que $S$ satisface (1).

Observemos que (1) es cerrada y que si consideramos $S = (a_1,a_2,a_3,\ldots)$ una sucesión arbitraria y aplicamos el mismo método tendremos que $S$ satisface $\mathcal{A}$.

Dada la noción de satisfacción podemos aplicar la definición de verdad a un sistema formal de primer orden.

***DEFINICION 3.*** Una fórmula $\mathcal{A}$ es *verdadera* para una interpretación $I$, si y sólo si toda sucesión en $\Sigma$ satisface $\mathcal{A}$. Y lo notamos $\models_I \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ es *falsa* para $I$, si y sólo si, ninguna sucesión de $\Sigma$ satisface $\mathcal{A}$.

Esta definición está dada solo para fórmulas cerradas. Carecería de sentido hablar de verdad en fórmulas abiertas tales como $x+3=0$, pues algunas sucesiones como $(-3,3,1,3,5,\ldots)$ satisfacen la fórmula, mientras que otras como $(1,3,2,4,6,\ldots)$ no la satisfacen.

El ejemplo dado ha sido construído de tal manera que se cumpla la segunda condición exigida por Tarski de adecuación material, es evidente que en esta definición se siguen todas las instancias del esquema $(T)$.

La verdad de una sentencia $A$, depende de la interpretación que se le dé, de esta manera, la misma fórmula puede ser verdadera en unos casos y falsa en otros. En el caso de que una sentencia sea verdadera para una interpretación $I$, $\models_I A$, se dice que $I$ es un *modelo* de $A$. Si tenemos, no una sola sentencia, sino un conjunto $\Gamma$ de sentencias, todas las cuales son verdaderas para $I$, decimos que $I$ es un modelo de $\Gamma$. Por ejemplo $<\mathbb{Z},0,+,=>$ y $<\mathbb{Q},1,-,=>$ son modelos de los axiomas de la teoría de grupos.

**TEORIA DE MODELOS.**

La teoría de modelos es una nueva rama de la lógica matemática que estudia las relaciones entre los lenguajes y sus interpretaciones o modelos, es decir, estudia las relaciones entre las partes sintáctica y semántica de una teoría, relaciones que se establecen por medio de una definición de verdad a la Tarski como hemos visto.

Esta nueva rama se consolida como tal apenas en la década de los 40 con los trabajos de Gödel, Henkin, Robinson y Tarski, naturalmente.

Enunciamos cuatro teoremas importantes de la teoría de modelos con los cuales esperamos ilustrar en buena forma el tipo de teoremas que se prueban en ella.

*1. Teorema de Completitud de Gödel para las teorías de primer orden (1930).*

*Sea $K$ una teoría de primer orden, una fórmula $A$ de $K$ es lógicamente válida, si y sólo si es un teorema de $K$.*

Se dice que una fórmula $A$ es lógicamente válida si es verdadera para *cualquier* interpretación, y se nota $\models A$.

Recordemos que una fórmula es un teorema de $K$ si es deducible de los axiomas de $K$, y se nota $\vdash_K A$. Así que el teorema anterior se puede expresar más fácilmente como sigue:

$\models A$ , si y sólo si $\vdash_{K} A$

La validez de una sentencia es una propiedad semántica y la teoremicidad de ella es una propiedad completamente sintáctica. Es claro pues, que el teorema de Gödel relaciona fuertemente la semántica y la sintaxis de una teoría: una condición necesaria y suficiente para que una fórmula sea un teorema es que sea válida.

2. *Teorema de completitud para teorías de primer orden* (Henkin 1944)

*Una teoría es consistente si y sólo si tiene modelo.*

La demostración de Gödel del Teorema 1 es bastante compleja, Henkin en 1944 dió una demostración más simple y por consiguiente más conocida en este teorema usando el concepto de modelo.

La consistencia (como ya se vió en [2]) es una noción sintáctica, y la noción de modelo, totalmente semántica.

3. *Teorema de Löwenheim-Skolem* (1915)

*Si una sentencia tiene un modelo infinito, tiene un modelo numerable.*

Este famoso teorema es considerado el pri mer teorema de la teoría de modelos.

La importancia del teorema radica en que en la demostración se puede apreciar una técnica para construír un modelo a partir de otro.

Objetivo central de la teoría de modelos es justamente la construcción de modelos, para ello se desarrollan diferentes técnicas.

4. *Teorema de compacidad de Gödel* (1930) *y Malcev* (1936).

*Sea $\Sigma$ un conjunto de sentencias (de una teoría de primer orden); si todo subconjunto finito de $\Sigma$ tiene modelo, $\Sigma$ tiene modelo.*

De este teorema, junto con el Teorema 1 resulta como consecuencia inmediata que un conjunto de sentencias $\Sigma$ es consistente si toda parte finita de $\Sigma$ lo es, resultado que aplicamos con la mayor frecuencia, pero usando la contrarrecíproca: una teoría es inconsistente si una parte finita de ella lo es.

Obsérvese que para demostrar el teorema de compacidad, lo que hay que hacer es construir un modelo en el cual cualquier sentencia de $\Sigma$ sea verdadera.

Actualmente la teoría de modelos ha sido aplicada con resultados bastante significativos en áreas como la teoría de conjuntos, el álgebra y el análisis. Estas son, entre otras, algunas de sus prometedoras perspectivas para el futuro.

*

**NOTAS.**

[1] Una teoría $K$ es consistente si dada una fórmula $A$ de $K$ no se puede tener a la vez $\vdash_K A$ y $\vdash_K \neg A$.

[2] Una teoría $K$ es completa si $\vdash_K A$ ó $\vdash_K \neg A$ para toda fórmula $A$ de $K$.

[3] Basado en las conferencias que dicta durante el invierno 1898-1899 en la Universidad de Göttingen, Hilbert publica su libro en junio de 1899, titulado "Grundlangen der Geometrie".

[4] Traducido al español en "Antología Semántica" de Mario Bunge. Editorial Nueva Visión (1960).

[5] Nota 1 de la página 111 del artículo de la nota 4. Bibliografía Tarski (2) del mismo artículo.

[6] Los axiomas presentados son los utilizados por E. Mendelson en su libro "Introduction to Mathematical Logic" D. van Nostrand. 2a. Ed. 1979.

## BIBLIOGRAFIA

- Tarski, A., "La concepción semántica de la verdad". Artículo publicado en "Antología Semántica" de Mario Bunge. Editorial Nueva Visión (1960). Traducción del artículo "The Semantic Conception of Truth" publicado en Philosophy and Phenomenological Research, 4, 1944, p.341.
- Haack, S., "Filosofía de las Lógicas". Ed. Cátedra. 1978.
- Bourbaki, N., "Elementos de Historia de las Matemáticas". Alianza Editorial, 1969.
- Chang, C., Keisler, H.J., "Model Theory". North Holland. 2a. ed. 1975.
- Mendelson, E., "Introduction to Mathematical Logic". D. van Nostrand. 2a. ed. 1979.

* *

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
BOGOTA. D.E.

(*) Las presentes notas han sido el resultado de lecturas realizadas en un seminario dirigido por la profesora Clara Helena Sánchez.

*