EL CONCEPTO DE MODELO EN LA LOGICA MATEMATICA

por

Xavier CAICEDO FERRER

I INTRODUCCION

A partir de la aparición de la obra de Bertrand Russell y Alfred N. Whitehead, "Principia Mathematica", a comienzos del siglo. Y más aún, después de iniciada la obra monumental de Bourbaki, que busca hacer una síntesis de las matemáticas partiendo de bases puramente axiomáticas, se ha vuelto casi un lugar común la afirmación de que las matemáticas son reducibles a pura lógica. La razón que permite justificar esta afirmación es precisamente el método axiomático. Una teoría matemática se puede considerar como un sistema de axiomas que afirman propiedades y relaciones de cierto universo de individuos u "objetos". Los teoremas, es decir las "verdades de la teoría", se derivan a partir de los axiomas usando las leyes de inferencia que proporciona la lógica. El ejemplo clásico de una teoría axiomática es la Geometría Euclidiana. Una teoría axiomática sería también la Teoría de los números reales. *En esta teoría los individuos son llamados por convención "números reales" y los axiomas son aquellos que rigen la adición y la multiplicación, tanto como los que rigen la relación de orden, exigiéndole que sea compatible con las operaciones y que cumpla ciertas propiedades de completitud. Puesto que las operaciones se pueden considerar como relaciones ternarias es claro que los axiomas hablan de pro-*

piedades y relaciones entre los individuos. Podríamos pensar también en teorías más generales como la **Teoría de grupos,** *o en desarrollos axiomáticos más modernos como el proporcionado por Kolmogorov a la* **Teoría de probabilidad.**

¿Significan las consideraciones anteriores que el trabajo matemático se reduce a deducir teoremas a partir de los axiomas de una teoría? Examinemos esto un poco más a fondo. Si el trabajo matemático se redujera a la pura deducción de teoremas a partir de unos axiomas dados, las matemáticas simplemente no existirían. No existirían por la sencilla razón de que no habría axiomas de donde deducir los tales teoremas. Los sistemas de axiomas tambien forman parte de la creación matemática. La manera clásica de entender los axiomas como "verdades evidentes en sí mismas, que por lo tanto no necesitan demostración" está completamente equivocada desde el punto de vista de la lógica moderna. Los axiomas no se descubren porque sean "evidentes en sí mismos". El aislar un sistema axiomático para la teoría de los números reales requirió siglos, y los esfuerzos de muchos hombres geniales. La grandeza de la obra de Euclides depende tal vez más del descubrimiento de sus postulados geométricos, que de la deducción de los teoremas .

Es un hecho, además, que el proceso histórico del desarrollo de las matemáticas sigue un camino contrario al que podríamos llamar proceso deductivo; que se caracteriza por el método axiomático. No fue a partir de los axiomas del álgebra real o de la teoría de campos (cuerpos) que el hombre llegó a descubrir las propiedades de los números. Al contrario, se partió de unos números muy concretos, muy ligados a la intuición sensible; y por medio de sucesivas abstracciones se llegaron a descubrir las estructuras más generales de las cuales esos "números" eran una manifestación concreta .

¿Qué son las matemáticas entonces? ¿La deducción de teoremas a partir de un conjunto de axiomas prefijados, o la labor de milenios que ha llevado a abstraer y aislar como básicos esos axiomas? Ambas componentes son esenciales al desarrollo matemático. El proceso deductivo de las matemáticas es como un ir de los esquemas abstractos a resultados más concretos; y el hallar estos

resultados, el descubrir los caminos para demostrar resultados o teoremas ya intuidos como ciertos parece ser la labor a la que se da más importancia dentro de las matemáticas. En cambio, históricamente las matemáticas se han desarrollado al revés, a partir de entes intuitivamente muy concretos (aunque vagamente definidos desde un punto de vista riguroso) a la abstracción de sus propiedades y relaciones.

Podemos preguntarnos ahora ¿La comprensión y el aprendizaje de las matemáticas no siguen un camino similar al del desarrollo histórico de las matemáticas? Parece incuestionable que es así: en la comprensión de las matemáticas se comienza en **intuición** *y se termina en* **abstracción**. *Los objetos matemáticos, los números reales por ejemplo, deben haber sido interpretados inicialmente por la imaginación como objetos tangibles, tal vez longitudes geométricas en el mundo físico, antes de que tenga sentido una teoría abstracta de los números reales. Y los axiomas de una teoría, como el axioma sobre paralelas de la Geometría de Euclides, sólo adquiere "sentido" cuando lo consideramos como la expresión formalizada de ciertas exigencias intuitivas de nuestra sensibilidad. En pocas palabras, para la eficaz comprensión matemática la imaginación necesita saber* **de qué está hablando**.

A primera vista, el método axiomático niega la posibilidad de saber de que está hablando. Una teoría axiomática supone un universo de individuos, que son algo así como los actores de la teoría; pero **estos individuos son completamente indeterminados**. *La teoría o sus axiomas sólo habla de las relaciones entre los individuos, de ciertas propiedades que deben poseer; pero estas no determinan a esos objetos. La teoría no habla de* **qué son esos individuos**. *Un ejemplo aclarará las anteriores afirmaciones que pueden parecer un poco extrañas. Los axiomas de una teoría son como las reglas del juego de ajedrez, estas reglas establecen interrelaciones entre las piezas, regulan sus movimientos, etc.; pero estas reglas no dicen* **cómo deben ser las piezas**. *Tanto que se podría jugar ajedrez con tapas de botella convenientemente identificadas, sin que ello alterara en absoluto la esencia del juego. Un "caballo", por ejemplo, es un "individuo " de la teoría, que se define por sus posibilidades de movi-*

miento en el tablero y por sus posibilidades de "comer" o "ser comido" por otras piezas; y no se define por su forma ni por el material de que está hecho. En principio pues, **un "caballo" podría ser cualquier cosa.** *Lo mismo pasa con una teoría axiomática. La teoría axiomática de los números reales, que ya hemos traido como ejemplo, habla simplemente de* **las condiciones que debe cumplir cierto universo de individuos** *para que sus objetos merezcan ser llamados números reales. Es más, la teoría no dice nada sobre si en realidad existen individuos con esas propiedades. Y en el caso de que existan ni siquiera asegura que esos individuos sea únicos; es decir, queda abierta la posibilidad de que haya* **muchos sistemas de individuos** *con las propiedades especificadas por los axiomas de los números reales. Así como hay muchos tableros y muchísimas piezas, tan buenos los unos como los otros para jugar el ajedrez. De ser así, hablar de* **el conjunto de los números reales** *en singular sería algo cuestionable, pues no habría* **un** *universo al cual le conviniera el apelativo, sino muchos.*

Es cierto que esta característica del método axiomático, de dejar indeterminados los individuos, es probablemente la que ha dado a las matemáticas su actual potencia, liberándola de la sujeción al pensamiento intuitivo, que puede llegar a ser un obstáculo a la creación, y permitiéndole construir teorías como las de las geometrías no euclidianas, las cuales parecen a primera vista imposibles de realizarse en un universo de individuos. También es verdad que en ciertas teorías como la de los **números reales,** *una vez que se desarrollan sus teoremas principales y se comienzan a manipular las propiedades algebraicas y de orden, pierde importancia el hecho de que los individuos estén indeterminados; pues lo que importa son sus propiedades, sus relaciones, el desenvolvimiento interminable de la teoría. Después de mucho analizar y descubrir nuevas propiedades, se adquiere familiaridad con los fantasmales "individuos" de la teoría; estos se cargan de sentido y se vuelve natural el llamarlos* **números reales,** *aunque en realidad podrían ser mesas o sillas, como decía Hilbert de los "individuos" de su teoría axiomática de la geometría.*

Sin embargo, existe el peligro de que un sistema axiomático de individuos indeterminados se convierta en una especie de discurso vacío, sin contenido.

En otras palabras, no bastan los axiomas de los números reales para comprender claramente qué son los números reales; necesitamos identificar aquellos individuos de cuyas propiedades se habla con **objetos determinados,** *es una necesidad de la imaginación.*

Decía que a primera vista el método axiomático no tenía en cuenta esta posibilidad de determinar los individuos de una teoría. Pero esto no es así. La **lógica matemática** *tiene en cuenta este otro aspecto de las teorías axiomáticas. Se le puede dar sentido, pues, dentro de la lógica matemática, a la exigencia de determinar los individuos sobre los cuales habla una teoría. En términos lógicos, el problema consiste en "interpretar" esa teoría, o en dar un modelo para la teoría. Un modelo es un sistema de objetos y relaciones concretos que satisfacen una teoría axiomática dada.*

La interpretación lógica de las matemáticas no se reduce, pues, al hecho de la deducción, usando reglas de inferencia, sino que considera la construcción de modelos para esas teorías. Veremos cómo el concepto de modelo tiene una importancia mucho más profunda que la de la simple satisfacción imaginativa (aunque no debe despreciarse en absoluto esta consecuencia sobre todo si se está interesado en los problemas de la comprensión de las matemáticas).

II LA NOCION DE MODELO

En la enseñanza elemental de las matemáticas se usan continuamente modelos en el sentido general que acabamos de descubrir. Un ejemplo muy simple sería el uso de los dedos de las manos como modelo para las propiedades ordinales de los números naturales. Otro sería el uso de pedazos de tortas o fracciones de naranja para explicar el concepto de número racional.

Sin embargo, el modelo clásico tanto para los números racionales como para los reales, sigue siendo el físico-geométrico que los asocia con longitudes *o con magnitudes físicas en general. La efectividad de estos modelos se basa en sus cualidades puramente sensibles; los individuos y las relaciones de la teoría se han tomado del mundo empírico. Sabemos como los griegos dieron prioridad al modelo geométrico; las propiedades de sus números fueron intuidas y demostradas muchas veces en el modelo geométrico. Sabemos también los dolores de cabeza que este modelo les proporcionó, cuando aparecieron los números* **irracionales;** *números que saltaban a la vista en la diagonal de un cuadrado, por ejemplo; pero que no cumplían los requisitos teóricos de ser "razón", proporción.*

Debemos anotar que este concepto de modelo para una teoría matemática difiere completamente del concepto de modelo usado en ciencias como la Física. En Física se llama modelo a una **teoría,** *generalmente expresable en términos matemáticos, que explica los hechos de la realidad empírica. Desde un punto de vista lógico,* **los hechos empíricos serían el modelo** *para esa teoría; y la teoría no sería modelo de nada. Se invierten completamente los términos. Pongamos por caso la geometría cuatri-dimensional de la Relatividad. Desde un punto de vista físico, esta constituiría un modelo para los fenómenos del mundo real. Lógicamente, sin embargo, la geometría de cuatro dimensiones sería una* **teoría matemática** *para la cual ciertos fenómenos espacio-temporales podrían servir de modelo. En lógica, no se puede hablar de modelo independiente de una teoría axiomática de la cual el modelo sea una interpretación.*

Aclarado esto, tratemos de precisar más el concepto de modelo. Los ejemplos anteriormente citados adolecen de una falla. Las naranjas, o los dedos de la mano, o los puntos de una regla graduada pertenecen al mundo sensible, no son objetos matemáticos. Y aunque a un nivel elemental pueden contribuir a la comprensión de las teorías matemáticas, a un nivel más avanzado pueden convertirse en obstaculo; ya que la teoría se vuelve dependiente de la intuición sensible, haciendo que se tomen como hechos de la teoría hechos que solo corresponden al modelo empírico (o viceversa). Los números racionales no son cascos de naranja y los números reales no son puntos marcados en una regla.

¿Cómo definir, pues, el concepto de modelo, de manera que sea un concepto verdaderamente matemático? ¿Cómo evitar los modelos empíricos que suelen llevar a confusiones filosóficas? Vamos a tratar de contestar esta pregunta. El problema consiste en qué clase de objetos vamos a aceptar como "individuos", qué clase de relaciones y propiedades concretas vamos a utilizar como interpretación o modelo de las teorías axiomáticas. La respuesta es sencilla

Los modelos van a ser tomados de la Teoría de Conjuntos. *Los individuos van a ser objetos de la Teoría de Conjuntos. Las relaciones van a ser relaciones de la Teoría de Conjuntos.*

Esto que acabamos de decir es precisamente el sentido de la afirmación que se hace continuamente de que **la Teoría de Conjuntos sirve de fundamento a las matemáticas.** *Ella es la fuente de los modelos para las teorías axiomáticas, o por lo menos para las teorías que constituyen las disciplinas matemáticas corrientes. Proporciona los "objetos" matemáticos.*

Un Ejemplo de la Geometría

Vamos a examinar dos de los axiomas de la Geometría Euclidiana; es decir, hablaremos de una teoría más **general** *que la Euclidiana. Los axiomas son:*

A1   *Por cada par de* **puntos pasa** *una y solo una* **recta.**

A2   *Por un* **punto exterior** *a una* **recta** *pasa una y solo una* **paralela** *a esa* **recta.**

La teoría está constituida por :

(1) Un universo indeterminado de individuos llamados **puntos** *y* **rectas** *(es decir el universo está dividido en dos clases).*

(2) Una relación entre rectas y puntos llamada : **pasar** *(una recta)* **por** *(un punto).*

(3) Una relación de ser **exterior** *(un punto a una recta), que se puede considerar como la negación de la relación* **pasar.**

(4) Una relación entre rectas llamada: **ser paralela** *(una recta)* **a** *(otra recta).*

Si utilizamos las variables: x, y, etc., para designar los "puntos", y las variables : L, L', etc. para referirnos a las "rectas", y si además bautizamos las relaciones en la forma siguiente :

"L **pasa por** *x" se simboliza :* $L \wp x$

"L' **es paralela a** *L" se simboliza :* $L' \mathcal{S} L$

podemos expresar los axiomas de una forma mucho más concisa :

A1 Si $x \neq y$*, entonces existe una y sólo una* **L** *tal que* $L \wp x$*, y* $L \wp y$.

A2 Si $L \not\wp x$*, entonces existe una y sólo una* **L'** *tal que* $L' \wp x$*, y* $L' \mathcal{S} L$.

La teoría ha quedado completamente axiomatizada. El significado inicial de los individuos y de las relaciones ya no aparece. No era sino el significado de uno de los modelos asociados a esta teoría: **el plano geométrico;** *pero la teoría en sí no depende de esta interpretación. En su forma pura, la teoría consta de un par de axiomas sobre individuos y también sobre relaciones sin identidad, sin determinación. Las variables x, y, L, L' etc. están ahora en libertad de ser interpretadas de muchas maneras. Lo mismo podemos decir de las relaciones.*

¿Cuál sería un modelo para esta teoría, tomado de la Teoría de Conjuntos? Sería, por ejemplo, el que damos a continuación :

Universo *: Los puntos serán a, b, c, d, cuatro elementos arbitrarios. Las rectas serán ciertos conjuntos con a, b, c, ó d como elementos. En resumen, el universo es el conjunto :*

$$U = \{ a, b, c, d, \{ a, b\} , \{a, c\} , \{a, d\} , \{b, c\}, \{b, d\} , \{c, d\} \}$$

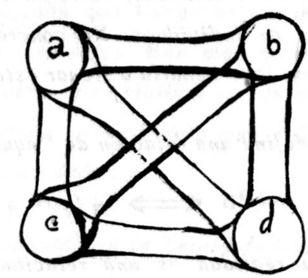
Relaciones *: Las relaciones se interpretan así :*

(1) $L \wp x$ *quiere decir* $x \in L$

(2) $L' \mathcal{S} L$ quiere decir $L' \cap L = \phi$

De esta manera, los dos axiomas de la teoría se convertirían en dos afirmaciones completamente ciertas en el universo de individuos tomado. Por ejemplo : $a \neq b$, y **existe uno y solo un ente del universo**, *el conjunto $\{a, b\}$, tal que $a \in \{a, b\}$ y $b \in \{a, b\}$; es decir : $\{a, b\}$ "pasa" por* **a** *y por* **b**, *y es* **la única** *"recta" del universo con esa propiedad. Igualmente para el resto de parejas. Tenemos, por otra parte, que* **a no pertenece** *a la "recta" $\{b, c\}$ y la* **única** *"paralela" a $\{b, c\}$ que "pasa" por* **a** *es $\{a, d\}$.*

La "Geometría" así obtenida se ilustra en el diagrama adjunto. Cabe anotar que este modelo no es único, pues el universo : $U = \{a, b, \{a, b\}\}$, con la misma interpretación para las relaciones, satisface los axiomas de una manera trivial.



III MODELOS PARA LOS SISTEMAS NEMERICOS

A) Los números naturales

A la pregunta ¿Qué son los números naturales?, se puede contestar con una teoría axiomática como la constituida por los axiomas de Peano. No son, sin embargo, estos axiomas la única forma de hacer una teoría de los números naturales. Se puede dar un conjunto de axiomas que insistan más en las propiedades algebraicas que en las de orden (como lo hacen los axiomas de Peano). Estos axiomas se podrían resumir así :

(1) Hay una operación (adición) que es conmutativa, asociativa y posee identidad, el **0**, *(+).*

(2) *Hay otra operación (multiplicación) con las mismas características, y con un elemento identidad, el* 1, $(.)$

(3) *La multiplicación es distributiva con respecto a la adición.*

(4) *Si* $n \neq m$, *entonces* $n+1 \neq m+1$.

(5) **No existe** k *tal que* $k+1 = 0$.

(6) **El principio de inducción.**

Se puede comprobar que estos axiomas son completamente equivalentes a los de Peano, si se toma como sucesor de **n**, *en el sentido de Peano, a* $n+1$.

Pero estos axiomas, como cualesquiera otros, hablan de un universo indeterminado de individuos. No concretan el universo de los números naturales. Un modelo que vendría a llenar este vacío podría ser el de Cantor :

Se define una relación de "equipotencia" entre conjuntos :

$$A \sim B \iff \exists f : A \to B, \text{ tal que } f \text{ es biyectiva}$$

esta, en realidad es una relación de equivalencia y por lo tanto engendra **clases de equivalencia.** *Los individuos que necesitamos para nuestra teoría van a ser precisamente esas* **clases de equivalencia.**

Un número natural será **una clase de conjuntos** *todos equipotentes entre sí; es decir, un número natural será un ente de la forma :*

$$[A] = \{ S \mid S \sim A \} \quad \text{donde } A \text{ es cualquier conjunto finito}$$

Más concretamente tenemos :

$$0 = \{\phi\}; \quad 1 = [\{0\}]; \quad 2 = [\{0, 1\}]; \quad 3 = [\{0, 1, 2\}]; \quad etc.$$

Queda, entonces el problema de interpretar las operaciones. Esto se hace de la siguiente forma :

Si $n = [A]$ *y* $m = [B]$

$$n + m = [A] + [B] = [A \cup B] \quad (A \text{ y } B \text{ deben tomarse disyuntos})$$

$$n \cdot m = [A] \cdot [B] = [A \times B]$$

Todos los axiomas pueden ser comprobados para estas dos operaciones. Aunque en este sistema axiomático el orden de los números naturales se puede definir a partir de la adición, es interesante anotar que se puede interpretar **directamente** *la relación de orden :*

Si $n = [A]$ *y* $m = [B]$ *, entonces* $n \leqslant m$*, (o lo que es lo mismo :* $[A] \leqslant [B]$*) significa simplemente que existe una función* **inyectiva** *del conjunto* A *en el conjunto* B *.*

El valor de este modelo para comprender lo que es un número natural es indiscutible. Clásicamente, el número es **aquello que tienen en común** *distintas colecciones con la misma cantidad de elementos. Ese* **algo en común** *se revela en la relación de equipotencia; y se viene a cristalizar en las clases de equivalencia. El número se ha convertido ahora en un objeto muy definido: la clase de todos los conjuntos equipotentes a uno dado .*

¿Es este un modelo verdaderamente sustentado en la Teoría de Conjuntos? ¿Son los individuos de este modelo **conjuntos o elementos** *de un conjunto? Parece que no hay porqué dudarlo. Pero realmente no es así. La construcción anterior se basa en la idea de "la clase de todos los conjuntos" y bien sabemos que la clase de todos los conjuntos* **no es ella misma un conjunto.** *Pues de serlo, llevaría a contradicciones con respecto a su cardinal. Lo mismo sucede con el concepto de la clase de todos los conjuntos equipotentes a uno dado. Los individuos de este modelo no son objetos de la Teoría de Conjuntos. Por eso falla, porque no cumple las exigencias dadas inicialmente. (1) .*

¿Se podrá dar un modelo que cumpla los requisitos? ¿que sea puramente conjuntista? Un modelo tal sería el correspondiente al desarrollo riguroso de la teoría de ordinales (Von Neumann) en el cual un ordinal es un conjunto de características muy precisas; y se define un cardinal como el mínimo ordinal correspondiente a un conjunto. Como a los conjuntos finitos corresponde un solo ordinal, **el cardinal y el ordinal se identifican.** *Los cardinales finitos sirven de individuos para la teoría de los números naturales. Estos son :*

$$
\begin{aligned}
0 &= \phi \\
1 &= \{0\} = 0 \cup \{0\} = \{\phi\} \\
2 &= \{0, 1\} = 1 \cup \{1\} = \{\phi, \{\phi\}\} \\
3 &= \{0, 1, 2\} = 2 \cup \{2\} = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi\}\}\}
\end{aligned}
$$

Esto quiere decir que los individuos se construyen por medio de la definición recursiva :

$$0 = \phi$$

$$\text{sucesor}(n) = n^* = n \cup \{n\}$$

Las operaciones deben definirse también de manera recursica :

$$m + 0 = m \qquad m . 0 = 0$$

$$m^* + n = (m + n)^* \qquad m^* . n = m . n + n$$

La relación de orden, en cambio, adquiere en este modelo un significado sorprendente :

$$n < m \quad \text{significa} \quad n \in m$$

El orden de los números naturales se ha identificado con la relación básica de la Teoría de Conjuntos, la pertenencia .

Obsérvese que si consideramos el orden débil, este se convierte en inclusión:

$$n \leqslant m \quad \text{significa que} \quad n \subset m$$

(1) Debe advertirse que el modelo "cantoriano" de los números naturales puede volverse válido si en lugar de trabajar con clases extraidas del universo de "todos los conjuntos", las extraemos de un universo de conjuntos más restringido como el siguiente :

$$U = \mathcal{P}(H) \quad \text{donde} \quad H = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\{\{\phi\}\}\}, \dots\}$$

*Es decir, la relación de equipotencias se define entre los subconjuntos **finitos** de **H**. Las clases de equivalencia van a ser, esta vez, verdaderos conjuntos.*

*B) Suponiendo que ya tenemos un modelo para los números naturales, lo cual nos da derecho a hablar **del** conjunto de los números naturales, porque ahora sí* *se trata de un **conjunto** completamente determinado y único; podemos pasar a la construccion de un modelo para la **teoría** de los números enteros.*

*Es un hecho que la introducción de los números enteros a nivel intuitivo choca con fuertes obstáculos, pues los modelos basados en contar objetos físicos o en medir magnitudes físico-geométricas fallan cuando se quieren aplicar a los números enteros. En este sentido, tenían razón los antiguos cuando rechazaban "la existencia" de los negativos; de la misma manera que el estudiante de matemáticas elementales rechazaba los negativos porque "cosas que son **menos que nada** no pueden existir". La vieja idea de interpretar las magnitudes negativas como distancias **hacia atrás** en un sistema de referencia, o como deudas de dinero, no son lo suficientemente convincentes para la imaginación. Solo el trabajo algebraico con la teoría de los enteros permite familiarizarse con ellos y aceptarlos.*

*Pero las preguntas ¿Existen los números enteros negativos? ¿Qué es un número negativo? no son preguntas carentes de sentido y que deban ser despreciadas. Ni son preguntas que por su carácter aparentemente metafísico no deban ser contestadas por las matemáticas. La pregunta tiene una respuesta dentro de las matemáticas, diferente del simple enunciado de los axiomas. **Sí existen los enteros** (y por lo tanto los negativos). Hay un modelo que satisface los axiomas. Hay un conjunto (un verdadero conjunto) de objetos y relaciones que cumplen las propiedades exigidas para poder llamarse enteros.*

Partiendo del modelo $\mathbf{N}$ *que ya se tiene para los números naturales, formamos el producto cartesiano* $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Se define en $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *una relación de equivalencia así :*

$$(x, y)\ R\ (z, w) \iff x + w = y + z$$

Esta relación de equivalencia determina una partición en clases de equivalencia en el conjunto $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Ahora sí, procedemos a la definición del modelo :

1) Universo de individuos .

Se toman como individuos de la teoría las clases de equivalencia determinadas por la relación R. Es decir el conjunto :

$$\{ [n , m)] \mid n , m \in N \} = N \times N / R$$

(llamado conjunto cociente)

2) Operaciones

Las operaciones de los enteros que deben cumplir los axiomas de **anillo algebraico** *se interpretan de la manera siguiente :*

Adición $[(n , m)] + [(p , q)] = [(n+p , m+q)]$

Multiplicación $[(n , m)] \cdot [(p , q)] = [(np + mq , nq + mp)]$

(Debemos observar que estas operaciones corresponden a las operaciones en-entre las expresiones (n-m) y (p-q) suponiendo que ya tuvieran un sentido).

3) Orden

La relación de orden de la teoría de los enteros se interpreta como :

$$[(n , m)] < [(p, q)] \Leftrightarrow n + q < m + p$$

Hemos usado del modelo que teníamos para los naturales, no solo sus individuos sino sus operaciones y relaciones .

Viene ahora un proceso que merece ser analizado en detalle. Entre las clases de equivalencia que forman este modelo se toman aquellas que tienen la forma :

$$[(n, m)] \quad \text{en donde} \quad n \geqslant m$$

Es fácil mostrar que esta es una característica que se conserva para cualquier elemento o representante de la clase. Una clase de este tipo se identifica con el natural n - m . Qué quiere decir esto ?

Es posible demostrar que entre el conjunto de las clases de la forma indicada :

$$N = \{ [(n , m)] \mid n \geq m \}$$ *(se puede representar en la forma [(n,0)])*

y el antiguo modelo que teníamos para los naturales (**N**) *se puede establecer un isomorfismo por medio de la función :*

$$f : N \rightarrow \mathbf{N} \qquad f([(n, m)]) = n - m$$

Este no es solo un isomorfismo de la estructura algebraica de anillo, sino de la estructura de orden. Como el nuevo conjunto de clases, que a su vez es un subconjunto del modelo construido para los enteros, **tiene las propiedades de los naturales.** *Pues el isomorfismo garantiza, que las propiedades se conservan al cambiar [(n, m)] por n-m* **y viceversa;** *llamamos* **números naturales** *a este nuevo conjunto .*

La última afirmación no queda completamente clara, cuando se construyen los números enteros de esta manera. ¿Qué pasó con los anteriores naturales? ¿Porqué resulta que ya no son los naturales, y llamamos números naturales al conjunto artificial que acabamos de construir? En términos de modelos la respuesta es muy sencilla .

Teníamos un modelo para la teoría de los **números naturales.** *Hemos construido un modelo para la teoría de los* **números enteros** *.*

Dentro de este modelo (llamado Z) hemos encontrado como subconjunto **otro** *modelo para la teoría de los números naturales. Tan bueno como el primero pues cumple todos los axiomas de la teoría de los naturales. La única diferencia es que el primer modelo* **no es submodelo** *de* **Z***; en cambio, el segundo* **es un submodelo,** *(obviamente un subconjunto) de* **Z.** *Es clara, pues, la razón para seguir trabajando con el nuevo modelo y no con el inicial (2) .*

La construcción de los números racionales sigue un proceso análogo a la de los enteros .
Se parte de un modelo ya determinado para los enteros, llamado Z. Se forma

el producto cartesiano $Z \times (Z - \{ 0 \})$

En $Z \times (Z - \{ 0 \})$ *se define la relación de equivalencia :*

$$(x, y) \; R \; (z, w) \iff xw = yz$$

Se procede a la construcción del modelo :

1) Universo de individuos $Z \times (Z - \{ 0 \}) /_R$

(es decir, el conjunto de las clases de equivalencia).

2) Operaciones

Adición : $[(x, y)] + [(z, w)] = [(xw + yz, yw)]$

Multiplicación : $[(x, y)] \cdot [(z, w)] = [(xz, yw)]$

3) Orden

$$[(x, y)] < [(z, w)] \iff xw < yz$$

$$\text{tomando: } y > 0, \quad w > 0$$

Como en los casos anteriores se puede comprobar que este modelo cumple todos los axiomas de los números racionales. Es decir es un campo (cuerpo) ordenado y cumple ciertas propiedades de minimalidad.

Llamamos a este modelo Q, el conjunto de los números racionales. Lo mismo que antes, dentro del modelo Q hallamos un subconjunto que, con las mismas operaciones y la misma relación de orden de Q, restringidas, sirve de modelo para la teoría de los números enteros. Ese submodelo es el formado por las clases de equivalencia de la forma :

$[(x, y)]$ *donde* x *es múltiplo de* y

Todas estas clases se pueden representar en la forma :

$[(z, 1)]$ *y si identificamos cada clase correspondiente con el entero z, obtenemos el modelo nuevo para los enteros que tiene la ventaja de ser subconjunto* *del modelo Q .*

(2) **Nota.** *Dentro de Z hay también un subconjunto que sirve de modelo para los "negativos". Los negativos son las clases de la forma* $[(n , m)]$ *donde* $n < m$ *. De acuerdo con la definición de orden en el modelo, tenemos que*

$$[(n , m)] < [(0 , 0)] \quad \textit{pues} \quad n + 0 < m + 0$$

Pero $[(0 , 0)]$ *es precisamente el elemento neutro de la adición en Z. Si usamos el hecho de que todas estas clases se pueden representar en la forma :* $[(0 , n)]$ $n \in N$ *podemos hacer la identificación simbólica:* $[(0 , n)] = -n$ *y tenemos los negativos en la escritura acostumbrada. Obsérvese que :*

$$[(n , m)] + [(m , n)] = [(n + m, m+n)] = [(0 , 0)]$$

C) El siguiente paso sería, naturalmente, construir un modelo para la **teoría de los números reales.** *Esta teoría consta de un universo de individuos indeterminados, dos operaciones y una relación de orden. Los axiomas se pueden resumir así : (1) Axiomas de campo (cuerpo) para las dos operaciones ,*

(2) Axiomas de compatibilidad del orden, es decir :

A) $x > y \Rightarrow x + a > y + a$

B) $x > y \wedge a > 0 \Rightarrow ax > ay$

(3) Axioma de completitud (todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo).

La construcción de los números reales fue uno de esos logros maravillosos de las matemáticas del siglo pasado. Y habría sido imposible sin el rigor lógico que había alcanzado el análisis o sin las ideas de la teoría de conjuntos que hacían su aparición en ese momento .

Modelo cantoriano de clases de sucesiones .

Se toma como punto de partida un modelo Q para los racionales .

Se forma el conjunto de todas las **sucesiones infinitas de Cauchy** *de números racionales .*

$$S = \{ (r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots,) \mid r_i \subset Q \}$$

(la constructibilidad de este conjunto está garantizada por la Teoría de Conjuntos).

Se define una relación de equivalencia entre las sucesiones de este con-conjunto por medio de la noción de límite :

$$(r_1, r_2, r_3, \ldots) \sim (t_1, t_2, t_3, \ldots) \iff r_n - t_n \to 0$$

Como es natural esta relación determina en S una partición en clases de equivalencia. Como en los casos anteriores, estas clases de equivalencia van a ser los individuos dela teoría.

Modelo

1) Universo de individuos : $S/\sim$

Un real es una clase de equivalencia de sucesiones de racionales :

$$\alpha = [(r_1, r_2, \ldots)] = \{ (x_1, x_2, \ldots) \mid (x_1, x_2, \ldots) \sim (r_1, r_2, \ldots) \}$$

2) Operaciones

$$[(r_1, r_2, \ldots)] + [(t_1, t_2, \ldots)] = [(r_1 + t_1, r_2 + t_2, \ldots)]$$

$$[(r_1, r_2, \ldots)] \cdot [(t_1, t_2, \ldots)] \quad [(r_1 \times t_1, r_2 \times t_2, \ldots)]$$

3) Orden

$[(r_1, r_2, \ldots)] < [(t_1, t_2, \ldots)]$ ***significa que*** $\exists M$ ***tal que para*** $i \geqslant M$, $r_i < t_i$

Ciertas clases de sucesiones tienen entre sus elementos una sucesión constante de números racionales. Es decir :

$$[(r, r, r, \ldots)] \quad \textit{donde} \quad r \in Q$$

Se puede demostrar que estas clases, con las mismas operaciones, sirven de

modelo para la teoría de los números racionales. La validez del modelo se puede establecer por medio del isomorfismo que resulta al hacer la identificación :

$$[(r, r, r, \ldots\ldots)] \longleftrightarrow r$$

Tenemos un modelo para los racionales que es submodelo del modelo para los reales.

El modelo de Dedekind

Sea Q un modelo de los racionales. Se toma la familia de subconjuntos de Q que cumplen las siguientes propiedades :

$$(1) \quad x \in A \wedge y < x \Rightarrow y \in A$$

(2) A es acotado superiormente

(3) A no tiene último elemento

A estos subconjuntos se les llama "cortes" y constituyen los individuos del modelo. La relación de orden se reduce a la inclusión :

$$A \leq B \quad \text{significa} \quad A \subset B$$

La adición se define fácilmente :

$$A + B = \{ x + y \mid x \in A \wedge y \in B \} \quad \text{(que es un corte)}$$

La multiplicación es un poco más complicada, y hace uso del orden. Entre los conjuntos del modelo hay algunos que tienen "supremo" en Q, y otros que no lo tienen. La familia de subconjuntos de Q **que sí tienen supremo en Q constituyen un modelo para los racionales.** *Un isomorfismo de los nuevos racionales con los viejos se puede establecer por la función :*

$$f(A) = \sup(A) \in Q$$

D) Los números complejos

La existencia de los números complejos fue uno de los escollos con que se tropezó el pensamiento matemático durante mucho tiempo. Todo el problema *puede resumirse en la pregunta : ¿Existe $\sqrt{-1}$? ¿Qué es $\sqrt{-1}$? Cabezas como la de Descartes se vieron perplejas ante los paradójicos números "inaginarios", y aunque los llamaron* **imaginarios** *precisamente por considerarlos irreales, como no existentes; descubrieron que era posible "imaginarlos",* **suponer que sí existían,** *y trabajar algebraicamente con ellos. Desde nuestro punto de vista el problema se puede expresar así :* **se tenía una teoría pero no se tenía un modelo.** *Los modelos intuitivos tradicionales, sacados del mundo físico-geométrico, fracasaban aquí; no era posible encontrar "entes" reales con los cuales asociar los números imaginarios.*

Pero este problema no solo se presentó históricamente sino que se presenta continuamente a quienes, en el aprendizaje elemental de las matemáticas, se encuentran con los números complejos. Toda la aritmética anterior de los números naturales, enteros, racionales y algo de la de los reales, ha sido comprendida gracias a los modelos basados en **contar** *y* **medir,** *modelos que aquí no son aplicables. Surge inmediatamente, entonces, la pregunta : ¿Existe $i = \sqrt{-1}$? ¿Existe un número i , tal que $i^2 = -1$? Dentro de la teoría de los números reales esto es imposible, pues todos los cuadrados deben ser positivos o nulos .*

No sabemos si existe **i.** *No sabemos qué es* **i.** *Pero resulta que se puede hacer una teoría de* **i.** *Podemos* **suponer** *que* **i** *existe y cumple la propiedad deseada : $i^2 = -1$. Podemos suponer también que* **i** *se porta como un verdadero número; es decir que se puede combinar con los* **números reales,** *y tiene la mayor parte de sus propiedades algebraicas. Todo esto es suponer.* **Pero este suponer constituye una teoría.** *Cuando todas las suposiciones se expresan de manera clara y precisa, tenemos los axiomas de la teoría de los números complejos .*

Los axiomas para la teoría de los números complejos se podrían resumir en la siguiente forma :

(1) Los axiomas algebraicos de campo (cuerpo)

(2) **Axioma de existencia de i :**

$$(\exists i)\ (i^2 + 1 = 0)$$

(donde 1 *y* 0 *son las identidades multiplicativa y aditiva del campo, respectivamente).*

(3) Los complejos deben ser un campo que contenga a los reales y sea minimal con respecto a los axiomas anteriores.

Desde un punto de vista puramente axiomático, se ha solucionado el problema del la existencia de i. Simplemente hay un axioma de la teoría que postula la existencia de esa i. No tiene, pues, sentido dudar de ella. ¿No tiene sentido? Lo sigue teniendo. Cuando el estudiante de matemáticas pregunta por la existencia de i y se le da esta respuesta, la axiomática, no queda convencido. Le huele a truco, a círculo vicioso; y tiene toda la razón. Está pidiendo que se le convenza de la "existencia" de un número cuyo cuadrado es -1, y se le contesta con un axioma que tranquilamente **afirma esa existencia!.** *Sabemos, por otra parte, que es absolutamente correcto postular los axiomas, y que todas las propiedades de los complejos se pueden derivar de ellos.*

¿Es obsoleta la pregunta sobre la existencia de i? ¿Porqué no es convincente, intuitivamente, la simple enunciación de los axiomas? Queremos que se nos exhiba una cosa, un objeto tangible al cual identificar con i. Lo que se está pidiendo es **un modelo** *en el cual i corresponda a uno de sus objetos concretos. Pero, ¿importa el modelo algo? ¿Cambiarían las cosas si tal modelo no fuera posible, no existiera? La respuesta es simple: si tal modelo no existiera,* **la teoría no sería realizable, no se podría satisfacer, sería una teoría imposible, contradictoria.**

La pregunta tenía un sentido mucho más profundo de lo que parecía. Al preguntar por la posibilidad de i se estaba preguntando por la posibilidad de la teoría misma. Se estaba pidiendo mostrar que la teoría de los números complejos no es absurda, no es contradictoria.

Suponiendo que **R** *es un modelo para la teoría de los reales,* *se puede construir un modelo para la teoría de los números complejos así:*

(1) **Universo :** $R \times R$

(2) **Operaciones :** $(a, b) + (c, d) = (a+c\ , b+d)$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd\ , ad + bc)$$

Es fácil comprobar que en este universo la identidad aditiva es la pareja : 0' = (0,0) y la identidad multiplicativa es la pareja 1' = (1,0). Y en general, que se cumplen las propiedades de campo. Para mostrar que este modelo cumple el axioma de existencia de i, **bautizamos con el nombre de** i **a la pareja (0,1).** *Utilizando las definiciones de las operaciones, tenemos :*

$$
\begin{aligned}
i^2 + 1' &= (0,1)^2 + (1,0) \\
&= (0,1) \cdot (0,1) + (1,0) \\
&= (00 - 11, 01 + 10) + (1,0) \\
&= (-1,0) + (1,0) \\
&= (-1 + 1,\ 0 + 0) \\
&= (0,0) = 0' \qquad \text{es decir}, \quad i^2 = -1
\end{aligned}
$$

Hemos obtenido, ahora sí, la seguridad de que los números imaginarios son realizables, no son absurdos. **Han dejado de ser imaginarios.**

Por otra parte, el conjunto $R^o = \{(x,0) \mid x \subset R\}$ *, con las mismas operaciones acabadas de definir, y con una definición obvia del orden, resulta ser un modelo para la teoría de los números reales. Tenemos, pues, a los reales como subconjunto de los complejos, comprobando así el último axioma (no requiere mucho trabajo probar la minimalidad).*

E) Hemos llegado a construir un modelo, C *, para la teoría de los números complejos, usando para ello un modelo,* R *, de los reales; el cual, a su vez, se construyó usando uno de los racionales,* ϕ *; este se construyó usando un modelo* Z *, de los enteros; para construir* Z *se usó un modelo* N*, de la teoría de los números naturales. Y este modelo* N *se construyó usando directamente conjuntos, prácticamente a partir del conjunto vacío. Y en la sucesiva* *construcción de los modelos sólo se usaron las herramientas proporcionadas por la teoria de conjuntos. Podemos concluir entonces que los individuos de todos los modelos son* **conjuntos de conjuntos de conjuntos . . .** *y que todas las relaciones y operaciones son relaciones y operaciones entre conjuntos,* **reducibles a la pertenencia, a la intersección y a la unión.**

El siguiente diagrama muestra claramente el proceso seguido

$$
\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr] & Z_1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, phantom, "\cup"] \arrow[dr] & Q_1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, phantom, "\cup"] \arrow[dr] & R_1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, phantom, "\cup"] \arrow[dr] & C_1 \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
& N_2 \arrow[dr] & Z_2 \arrow[d, phantom, "\cup"] \arrow[dr] & Q_2 \arrow[d, phantom, "\cup"] \arrow[dr] & R_2 \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
& & N_3 \arrow[dr] & Z_3 \arrow[d, phantom, "\cup"] \arrow[dr] & Q_3 \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
& & & N_4 \arrow[dr] & Z_4 \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
& & & & N_5
\end{tikzcd}
$$

Veamos cómo en el proceso se han construido N_1 , Z_1 , Q_1 , R_1 , C_1 *en sucesión unos a partir de otros y al mismo tiempo se han engendrado 5 modelos para los naturales, 4 para los enteros, 3 para los racionales, y 2 para los reales. Modelos que, desde un punto de vista conjuntista, son diferentes. Sólo los modelos finales :* N_5 , Z_4 , Q_3 , R_2 , C_1 *tienen las propiedades de inclusión exigidas a los sistemas numéricos .*

IV CARACTERISTICAS GENERALES DE LOS MODELOS

De los casos analizados anteriormente podemos extraer algunas ideas generales.

A) Los modelos posibles para una teoría son muchos; en realidad hay una infinidad de modelos para cada teoría axiomática. En la construcción de mode-

los para las teorías numéricas se desechaba **un modelo** *y se tomaba otro, con la seguridad de que* **daba lo mismo.**

B) La noción de **isomorfismo** *es la que permite comparar y establecer relaciones entre los modelos de una teoría. En los sistemas numéricos, ya mencionados, los modelos correspondientes a una teoría, por ejemplo los 5 modelos de la teoría de los naturales, son isomorfos, uno se puede transformar en otro por medio de una biyección. Esta biyección traduce las operaciones y relaciones de un modelo en las operaciones y relaciones del otro.*

C) No todos los modelos de una teoría tienen que ser isomorfos. El ejemplo geométrico dado inicialmente tenía por lo menos dos modelos, uno de **10** *individuos; obviamente estos dos modelos no pueden ser isomorfos. Además sabemos ahora que* $R \times R$ *(donde* R *es un modelo de los reales), convenientemente interpretado, sirve de modelo para la teoría del plano euclideano; y a fortiori en un modelo infinito para los dos axiomas discutidos. Tenemos pues, modelos completamente incongruentes para una misma teoría.*

La **Teoría de grupos** *nos da otro ejemplo para el cual no todos los modelos son isomorfos :*

Teoría :

$A1 \quad (x + y) + z = x + (y + z)$

$A2 \quad (\exists 0)\,(\forall x)\,(x + 0 = x)$

$A3 \quad ((\forall x)\,(\exists y)\,(x + y = 0)$

Z ó R, modelos para los enteros y los reales son perfectos modelos de la teoría de grupos. Sin embargo, sabemos que Z y R no son isomorfos. Otro modelo de grupo sería el conjunto :

$U = \{ 0 \}$ *donde* **0** *se ha tomado de Z. Tenemos pues, modelos infinitos no enumerables, modelos enumerables, y modelos finitos para una misma teoría algebraica.*

Todo esto nos lleva a la idea de **teorías categóricas.** *Una teoría categórica* *es aquella en la cual* **todos sus modelos son isomorfos,** *por ejemplo : la teoría de los números naturales. Una teoría no categórica sería, por ejemplo, la de grupos.*

D) En el álgebra se trabaja continuamente con los modelos. Cuando se demuestra un teorema "algebraico" como por ejemplo :

T. **Existe un grupo abeliano de n elementos, para todo natural n** **no se** *está demostrando un teorema de la* **teoría de grupos;** *puesto que los axiomas de la teoría de grupos no permiten deducirlo. Se está hablando es sobre modelos de la teoría de grupos. El teorema no se prueba deduciéndolo de los axiomas, sino construyendo modelos de* **n** *elementos y* **comprobando que cumplen los axiomas de grupo.** *Esto se puede hacer, por ejemplo, tomando clases de equivalencia módulo* **n** *a partir de un modelo de los naturales, y definiendo apropiadamente la suma.*

Ahora bien, la comprobación de que el modelo cumple los axiomas, es a la vez una **demostración de ciertas propiedades del modelo,** *demostración que se hace dentro de la Teoría de Conjuntos, puesto que el modelo es un conjunto muy determinado. La comprobación de que un modelo conjuntista satisface una teoría, es en el fondo un teorema de la* **Teoría de Conjuntos.**

V LA CONSISTENCIA DE UNA TEORIA

Una teoría es consistente cuando no se puede deducir ninguna contradicción de sus axiomas. La **inconsistencia** *o contradicción de una teoría sería entonces la posibilidad de deducir una proposición del tipo* **P** *y no* **(P)** *a partir de sus axiomas. El problema clásico del barbero nos va a proporcionar un ejemplo de lo que sería una teoría inconsistente o contradictoria. La teoría es la siguiente :*

> *"En cierto pueblo existe un barbero que afeita exactamente a aquellas personas que no se afeitan a sí mismas".*

Obsérvese que se trata de una verdadera teoría en la cual se habla de cierto universo de individuos (el pueblo) y de ciertas relaciones (afeitar) entre individuo de ese universo (el barbero) y el resto. Si llamamos : **b** *al barbero* **R** *a la relación de afeitar podemos presentar la teoría como un universo indeterminado de individuos, un elemento constante* **b** *y una relación* **R** *para los cuales valen los dos axiomas :*

$$A1 : \; x R x \Longrightarrow b \not R x$$
$$A2 : \; x \not R x \Longrightarrow b R x$$

(A1 significaría : si **x** *afeita a* **x,** *es decir se afeita a sí mismo, entonces* **b** *(el barbero)* **no afeita a x.** *A2 significaría : si* **x** *no se afeita a sí mismo, entonces* **b** *lo afeita). Esta teoría no es consistente :*

Sabemos que $b R b$ *ó* $b \not R b$. *Si* $b R b$, *por el axioma A1 podemos concluir que* $b \not R b$, *lo cual es contradictorio. Si* $b \not R b$, *también llegamos a una contradicción por el axioma A2 :* $b R b$.

Ha sido posible derivar una contradicción de los axiomas y por lo tanto la teoría **no es consistente,** *es contradictoria. ¿Podría haber un modelo para esta teoría? Obsérvese que el pueblo y el barbero no son un modelo riguroso para la teoría, puesto que ni ellos son objetos de la Teoría de Conjuntos, ni la relación de afeitar es una relación conjuntista .*

Si hubiera un modelo conjuntista para la anterior teoría, llegaríamos a la conclusión de que hay un conjunto **b** *y cierta relación* **natural** *de los conjuntos tal que* **b está relacionado con b,** *y* **b no está relacionado con b.** *Pero esto significaría que la Teoría de Conjuntos es contradictoria !*

En resumen : si una teoría es contradictoria no puede tener modelos. **Si una teoría tiene modelos es consistente.** *De esta manera, vemos que el método apropiado para demostrar la consistencia de una teoría es exhibir un modelo. Las construcciones que se hicieron para la teoría de los números naturales prueban la consistencia de esta teoría, lo mismo para las demás teorías numéricas.*

La consistencia de los dos axiomas geométricos también quedó demostrada con con el modelo exhibido. Que la Teoría de grupos, por ejeml lo no es absurda o inconsistente quedó demostrado con el modelo de los enteros dado anteriormente.

Las viejas preguntas : ¿Qué es un número? ¿Existen los negativos? ¿Puede existir $\sqrt{-1}$*? ¿Son verdaderos números los irracionales? ¿Qué es un punto? etc., no eran preguntas necias, sino que eran prácticamente preguntas por la consistencia de las teorías involucradas. Estas preguntas no quedaron contestadas hasta que se construyeron modelos basados en la Teoría de Conjuntos, en los cuales los axiomas de la teoría* **eran demostrables como propiedades del modelo.** *Estas demostraciones se hacen dentro de la misma Teoría de Conjuntos, y esto significa que todos los problemas de consistencia se redujeron a la Teoría de Conjuntos.*

Inmediatamente surge una duda. Si la consistencia de una teoría la podemos fundamentar en la Teoría de Conjuntos, es porque estamos suponiendo **la consistencia de la Teoría de Conjuntos misma.** *¿Cómo probar la consistencia de la Teoría de Conjuhtos? En realidad esta no ha sido probada de una manera completa. Pero esto no significa que el método de modelos para demostrar consistencia fracase totalmente en el caso de la Teoría de Conjuntos misma.*

Fue por este método que Godel y Cohen lograron resolver el problema de la **hipótesis del continuo.** *La hipotesis consiste en la afirmación de que el segundo cardinal transfinito (el sucesor de* $\aleph_0$*) es* **c** *(la potencia del continuo). Partiendo de la suposición de que la Teoría de Conjuntos es consistente, y por lo tanto apta para construir modelos, Godel, en 1940, adjunto a los axiomas de la T. de C. la hipótesis del continuo como un nuevo axioma. Luego construyó un modelo* **para esta nueva teoría,** *basándose, claro está, su construcción en la vieja. De esta manera demostró que* **si la Teoría de Conjuntos corriente era** *consistente, entonces, al adjuntarle la hipótesis del continuo,* **seguía siendo consistente.** *Es decir, la hipótesis del continuo podía suponerse verdadera sin peligro de contradicción. En 1963, P. Cohen adjuntó a la T. de C.* **la negación** *de la hipótesis del contínuo, y construyó también un modelo, demostrando así que la hipótesis del contínuo podía negarse sin peligro de contradicción.*

Quedó claro de esta manera que ni la falsedad ni la verdad de la hipótesis se podían deducir dentro de la Teoría de Conjuntos. Es decir esta era **independiente** *de la teoría. La noción de* **independencia**, *de la cual el anterior es un ejemplo concreto es aplicable a las teorías axiomáticas en general, y son los modelos la herramienta más útil para trabajar con ella. Se puede hablar de la independencia de una proposición con respecto a una teoría, o a un conjunto cualquiera de otras proposiciones. Se puede hablar, entonces, de la independencia mutua de los axiomas de una teoría.*

Para indicar la clase de resultados a los que se puede llegar con la noción de modelo, mencionaremos cómo ciertos teoremas de lógica (Godel, Lowenheim-Skolem) implican que cualquier teoría consistente, con un conjunto finito de axiomas, **tiene un modelo cuya cardinalidad es enumerable.** *Sobra explicar la importancia que esto puede tener en álgebra, por ejemplo. Es sorprendente, sin embargo, encontrar que la Teoría de Conjuntos misma, que contiene como individuos conjuntos que no son enumerables, tiene un modelo enumerable.*