ECUACIONES POLINOMICAS DE TERCER Y CUARTO GRADO

por

Nelo ALLAN
Hernando PEREZ

INTRODUCCION.

Los primeros problemas de ecuaciones lineales y polinómicas se plantearon a los geómetras y matemáticos de los primeros tiempos como necesarios en la comprensión de otros temas de mayor interés para ellos, y aunque en la actualidad, la teoría de ecuaciones tiene interés por sí misma (Teoría de Galois) también se hace necesaria en el estudio de otros tópicos matemáticos .

Las soluciones de las ecuaciones cúbica y cuártica, surgieron de una competencia entre los matemáticos italianos en el siglo XVI. Parece que Tartaglia fue el primero en resolver problemas particulares de la ecuación de tercer grado pero el método más general (presentado en esta exposición) es debido a Cardano. Sobre la originalidad de la solución de la ecuación cúbica, surgió una polémica entre Cardano y Tartaglia. La solución de la ecuación de cuarto grado fue encontrada por primera vez por Ferrari, alumno de Cardano, intentando descomponerla como producto de dos de segundo grado. El método de Cardano y Tartaglia fue intensamente estudiado por Vieta, Hudde y otros quienes en el proceso de estudio simplificaron la notación apareciendo la nomenclatura algebraica .

En esta época aparecieron otras soluciones, entre las cuales se destaca la de Gregory, quien creyó resolver el problema de grado n.

Lagrange intentó entender lo que realmente ocurría y principalmente el papel oscuro que la **resolvente** *desempeña en la solución. (En la solución de la cuártica, cualquiera que sea el método, siempre se reduce el problema a resolver una ecuación cúbica, llamada resolvente) y con esto introduce la noción de grupo y se reconoce la importancia de las funciones simétricas en este estudio. El trabajo de Lagrange tiene gran influencia en el método moderno para resolver la cuártica. El estudio de las ecuaciones de grado superior se continúa con Abel y con Galois. Abel demuestra que la resolvente de una ecuación general de grado* ≥ 5 *tiene resolvente de grado mayor que la ecuación dada y también obtiene una prueba de la imposibilidad de resolver la ecuación general de quinto grado.*

Galois reduce el estudio de las ecuaciones al estudio de algunas propiedades particulares de grupos de permutaciones. El estudio de las ecuaciones desde el punto de vista de las permutaciones de las raices se deja para un estudio posterior.

I) *Consideremos la siguiente ecuación en x de grado n.*

(I-1) $x^n + a_1 x^{n-1} + , , , + a_{n-1} x + a_n = 0$

Si tomamos $x = y + \alpha$ (procedimiento debido a Vieta) y reemplazamos en la ecuación (I-1) se obtiene :

(I-2) $y^n + n\alpha y^{n-1} + , , , + \alpha^n + a_1 y^{n-1} + , , , + a_1 \alpha^{n-1} + , , , + a_{n-1} y + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$

Observemos pues, que el coeficiente de y^{n-1} es $n\alpha + a_1$ y por lo tanto, escogiendo α de manera que $n\alpha + a_1 = 0$, o sea, $\alpha = -\dfrac{a_1}{n}$ entonces la ecuación (I-2) se reduce a una de la forma

(I-3) $y^n + b_1 y^{n-2} + , , , + b_{n-1} = 0$

Es claro que, resolviendo la ecuación (I-3) la ecuación (I-1) queda resuelta.

II) **Ecuación cúbica.** *(Método de Cardano-Hudde).*

Consideremos la ecuación $x^3 + ax + 6 = 0$ (II-1)

Supongamos z, v incógnitas tales que $x = z + v$ de manera que

$$x^3 - 3zv\,x - (z^3 + v^3) = 0$$

Comparando con (II-1) podemos suponer

$$z^3 + v^3 = -6$$
$$3zv = -a$$

o sea

$$z^3 + v^3 = -6$$
$$z^3 v^3 = -\frac{a^3}{27}$$

Entonces, z^3, v^3 son las soluciones de la ecuación

$$\lambda^2 + 6\lambda - \frac{a^3}{27} = 0$$

y así podemos escribir

$$z^3 = -\tfrac{1}{2}\,6 + \sqrt{6^2/4 + a^3/27}$$

$$v^3 = -\tfrac{1}{2}\,6 - \sqrt{6^2/4 + a^3/27} \qquad (II-2)$$

De las ecuaciones (II - 2), podemos calcular los valores de z, v y por tanto los valords de x. Sinembargo, hay tres valores posibles para z y también para v y como $x = z+v$ entonces existirían seis valores posibles para x; pero, la ecuación de tercer grado tiene tres raices, es decir, deben existir a lo más tres valores diferentes de x.

La indeterminación se elimina de la siguiente manera :

Sean $\omega = -\tfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *una raíz cúbica de la unidad* ($\omega^3 = 1$) *y* z_1, v_1 *números complejos tales que*

$$z_1^3 = -\tfrac{1}{2}\,6 + \sqrt{6^2/_4 + a^3/_{27}}$$

$$v_1^3 = -\tfrac{1}{2}\,6 - \sqrt{6^2/_4 + a^3/_{27}}$$

$$3\,z_1\,v_1 = -\,a$$

Los posibles valores de z son z_1, ωz_1, $\omega^2 z_1$ y los de v son v_1, ωv_1, $\omega^2 v_1$ y de estos, los valores de z, v tales que $3zv = -a$ son $z_1 v_1$; ωz_1, $\omega^2 v_1$; $\omega^2 z_1$, ωv_1 de manera que las raices de la ecuación (II - 1) son

$$x_1 = z_1 + v_1$$

$$x_2 = \omega\, z_1 + \omega^2 v_1$$

$$x_3 = \omega^2 z_1 + \omega\, v_1$$

III) Ecuación de cuarto grado.

$$x^4 + p\,x^2 + q\,x + r = 0 \qquad (III-1)$$

A. - Método de Ferrari.

De (III - 1) se sigue que

$$x^4 + p\,x^2 = -\,q\,x - r \qquad (III-2)$$

y *tomando una incógnita* α , *sumando la expresión* $\frac{p^2}{4} + p\alpha + \alpha^2 + 2\alpha x^2$ *a ambos lados de la ecuación* (III - 2) *obtenemos*

$$(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha)^2 = -qx - r + \frac{p^2}{4} + p\alpha + \alpha^2 + 2\alpha x^2$$

o sea

$$(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha)^2 = 2\alpha x^2 - qx + (\alpha^2 + p\alpha + \frac{p^2}{4} - r) \qquad \text{(III - 3)}$$

Considerando el segundo miembro de la ecuación (III - 3) *como polinomio de segundo grado en* x, *su discriminante sería*

$$q^2 - 8\alpha(\alpha^2 + p\alpha + \frac{p^2}{4} - r) \qquad \text{(III - 4)}$$

Escogiendo α *de manera que la expresión* (III - 4) *sea* 0 *entonces podemos encontrar* M , N *tales que*

$$(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha)^2 = (Mx + N)^2 \qquad \text{(III - 5)}$$

La expresión (III - 4) *puede escribirse de la manera siguiente*

$$q^2 - 2\alpha(p^2 - 4r) - 8\alpha^3 - 8p\alpha^2 = 0$$

y tomando $\beta = -\alpha$

obtenemos

$$\beta^3 - 2p\beta^2 + (p^2 - 4r)\beta + q^2 = 0 \qquad \text{(III - 6)}$$

Resolviendo la ecuación (III - 6) (*ecuación resolvente*) *podemos encontrar* x *en la ecuación* (III - 5) *y por tanto la ecuación* (III - 1)

Obsérvese que la ecuación (III - 5) *se puede escribir en la siguiente forma* :

$$\text{(III - 7)} \quad 0 = (x^2 + \frac{p}{2} + \alpha + Mx + N)(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha - Mx - N)$$

y entonces el valor de x *se obtiene de una cualquiera de las siguientes ecuaciones* :

$$x^2 + \frac{p}{2} + \alpha Mx + N = 0$$

$$x^2 + \frac{p}{2} + a - Mx - N = 0$$

En realidad, este método no es completo pues la ecuación (III-6) da tres valores para a *y entonces las ecuaciones (III-8) serían en total seis ecuaciones y cada una de ellas tiene dos para* x *; se tendrían así doce valores de* x, *entre los cuales hay que escoger las soluciones de (III-1).*

B. Método moderno.

a) Supongamos que x_1, x_2, x_3, x_4 *son las soluciones de la ecuación (III-1) entonces*

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = x^4 + px^2 + qx + r \qquad (III-9)$$

b) Si $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 +$

$$+ x_3x_4 \;,\; \sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$$

$\sigma_4 = x_1x_2x_3x_4$ *, entonces la ecuación (III-9) se puede escribir*

$$x^4 - \sigma_1 x^3 + \sigma_2 x^2 - \sigma_3 x + \sigma_4 = x^4 + px^2 + qx + r$$

y así

$$\sigma_1 = 0 \;,\; \sigma_2 = p \;,\; \sigma_3 = -q \;,\; \sigma_4 = r \qquad (III-10)$$

c) Supongamos que $\tau_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $\tau_2 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$

$\tau_3 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$. *Se pueden somprobar las siguientes relaciones*

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 2\sigma_2$$

$$b_2 = \tau_1\tau_2 + \tau_1\tau_3 + \tau_2\tau_3 = \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$$

$$b_3 = \tau_1\tau_2\tau_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1^2\sigma_4 - \sigma_3^2$$

Evidentemente τ_1, τ_2, τ_3 *son las soluciones de la ecuación*

$$(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3) = \tau^3 - b_1\tau^2 + b_2\tau - b_3 = 0$$

Usando las relaciones (III - 10) se concluye que $b_1 = 2p$, $b_2 = p^2 - 4r$, $b_3 = -q^2$ *y entonces* τ_1, τ_2, τ_3 *son las soluciones de la ecuación*

$$\tau^3 - 2p\tau^2 + (p^2 - 4r)\tau + q^2 = 0$$

(Compárese con la ecuación (III - 6))

d) Supongamos pues que τ_1, τ_2, τ_3 *son las soluciones de la ecuación (III - 6). De las relaciones* $(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = 0$ *y* $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \tau_1$ *, se sigue que* $x_1 + x_2$, $x_3 + x_4$ *son las raices de la ecuación* $x^2 + \tau_1^2 = 0$ *y entonces podemos escribir*

$$x_1 + x_2 = \sqrt{-\tau_1}$$
$$x_3 + x_4 = -\sqrt{-\tau_1}$$

Con un razonamiento como el anterior obtenemos las otras ecuaciones del sistema lineal

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= \sqrt{-\tau_1} \\
0x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 &= -\sqrt{-\tau_1} \\
x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 &= -\sqrt{-\tau_2} \\
0x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 &= -\sqrt{-\tau_2} \\
x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 &= \sqrt{-\tau_3} \\
0x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 &= -\sqrt{-\tau_3}
\end{aligned}$$

cuya matriz es de rango máximo y por tanto su solución es única :

$$\begin{aligned}
x_1 &= (\sqrt{-\tau_1} + \sqrt{-\tau_2} + \sqrt{-\tau_3})/2 \\
x_2 &= (\sqrt{-\tau_1} - \sqrt{-\tau_2} - \sqrt{-\tau_3})/2 \\
x_3 &= (-\sqrt{-\tau_1} + \sqrt{-\tau_2} - \sqrt{-\tau_3})/2 \\
x_4 &= (-\sqrt{-\tau_1} - \sqrt{-\tau_2} + \sqrt{-\tau_3})/2
\end{aligned}$$

IV)Método de Gregory .

Reemplazando $x = u+v$ *en la ecuación* $x^3 + px + q = 0$ *obtenemos* $u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$ *o de otra manera*

$$v^3 + (3u)v^2 + (3u^2 + p)v + (u^3 + pu + q) = 0 \qquad (IV\text{-}1)$$

Multiplicando la ecuación (IV-1) por una expresión del tipo $v^3 + av^2 + bv + c$ *obtenemos una ecuación de la forma*

$$(IV\text{-}2) \qquad v^6 + a_1 v^5 + a_2 v^4 + a_3 v^3 + a_4 v^2 + a_5 v + a_6 = 0$$

donde

$$\begin{aligned}
a_1 &= (a+3u) \\
a_2 &= 3u^2 + 3au + b + p \\
a_3 &= u^3 + 3au^2 + (3b+p)u + pa + q + c \\
a_4 &= au^3 + 3bu^2 + (3c+pa)u + qa + pb \\
a_5 &= bu^3 + 3cu^2 + pbu + qb + pc \\
a_6 &= cu^3 + pcu + qc
\end{aligned}$$

Escogiendo a, b, c, u *de manera que* $a_1 = a_2 = a_4 = 0\, a_5 = 0$, *la ecuación (IV-2) se convierte en una de la forma*

$$v^6 + \alpha v^3 + \beta = 0$$

cuya solución es inmediata .

El anterior método es aplicable al caso de grado 4 con un poco de más dificultad. Gregory murió convencido de que su método era aplicable a la resolución de la ecuación de grado arbitrario n .

BIBLIOGRAFIA

ROTH Richard. El origen de la teoría de Grupos. El teorema de Lagrange (1771) Boletían deMatemáticas, Vol. II No. 6 .

SMITH David E. History of Mathematics Vol. II, págs. 454 y siguientes. Dover publications , Inc. New York .

SMITH David E. A source book in mathematics Vol. I, págs. 203-212. Dover Publications, Inc., New York. (Este libro contiene la traducción por parte de Hudde del trabajo de Cardano. Además contiene reproducciones de otros trabajos matemáticos importantes p.e de Abel y Galois).

TURNBULL H. W. Teoría de Ecuaciones. Editorial Donat. University Mathematical texts. Traducido del inglés por R. Méndez Ilanza. Parágrafos 48-61. Van Der Waerden. Modern Algebra. Vol. I, parágrafo 58. F. Ungar publishing Co. New York. (Este libro es el primer tratado de álgebra publicado en este siglo y trae un buen estudio de la teoría de Galois).

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Recibido : Noviembre de 1969