LA INDUCCION MATEMATICA

Diego PAREJA HEREDIA

A finales del siglo pasado y comienzos del presente la matemática atravezó por una etapa de marcada axiomatización, tendiente a hacer de ella un sistema mejor estructurado, de bases firmes y lógicamente coherentes.

Cantor en sus trabajos sobre cardinalidad descubrió los números transfinitos y mostró la diferencia entre el cardinal de los naturales y el cardinal de los reales.

Cantor fue de los primeros matemáticos en tomar conciencia del extraordinario papel que jugaban los conjuntos en la matemática; él procuró crear alrededor de los conjuntos una teoría lo suficientemente firme.

Por su parte, Zermelo dio los primeros axiomas para los conjuntos con el propósito de convertir la teoría de conjuntos en un sistema deductivo. Estos axiomas, la mayoría estudiados en teoría elemental de conjuntos son :

1) *Dos conjuntos que tienen los mismos elementos son idénticos.*
2) *Hay un conjunto que no tiene ningún elemento, es el conjunto vacío; si existe un objeto, existe un conjunto (a) cuyo único elemento es este objeto; si existen dos objetos a y b existe un conjunto (a,b) cuyos únicos elementos son estos dos objetos.*
3) *La reunión de todos los elementos de un conjunto M que satisfacen una condición X, forman un subconjunto de M (una untermenge de M).*
4) *A cada conjunto T corresponde otro conjunto PT formado por todos los subconjuntos de T.*

5) Consideremos un conjunto T cuyos elementos también son conjuntos; existe un conjunto ST cuyos elementos son los elementos de los elementos de T, si por ejemplo T tiene tres elementos de A,B,C, que son a su vez conjuntos, si A tiene dos elementos a y a', B dos elementos b y b', C dos elementos c y c' ST tendrá seis elementos; a,a'; b,b' ; c, c' .

6) Si se tiene un conjunto no vacío T, cuyos elementos son conjuntos no vacíos, se puede elegir un elemento de cada uno de estos conjuntos y la reunión de estos elementos así elegidos forma un subconjunto de ST .

7) Existe por lo menos un conjunto infinito. Aunque Zermelo no dio una definición de conjunto, ya que admitió que la idea de conjunto puede considerarse como ente primitivo, consideró que si se tiene un dominio (Bereich) de objetos, cualesquiera, puede suceder que entre dos de esos objetos X y Y haya una relación $X \subset Y$; diremos en tal caso que X es un elemento de Y, y que Y es un conjunto (una menge).

Cantor dió la siguiente definición: Un conjunto es la reunión de objetos distintos cualesquiera, considerados como partes de un todo.

La anterior definición fue rechazada por Zarmelo porque presentía que encerraba una contradicción.

En lo referente a conjuntos numéricos Giusepe Peano fue el primero en construir una axiomática para los números naturales. Partiendo de cero, números naturales y sucesivo, como conceptos primitivos y tomando cinco axiomas dedujo toda la teoría de los naturales.

Los axiomas de Peano son :

1) Cero es un número natural.

2) El sucesivo de un número natural es un número natural.

3) Dos números naturales diferentes no tienen nunca el mismo sucesivo.

4) Cero no es el sucesivo de ningún número natural .

5) Toda propiedad que pertenezca a cero y al sucesivo de un número que tenga esa misma propiedad, pertenece a todos los números naturales.

Este último postulado encierra en sí una trascendental operación lógica : la inducción matemática, y dio origen a una de las formas más pródigas de *demostración, el método de demostración por inducción, gran herramienta para el desarrollo de la matemática.*

Este método de demostración consiste en lo siguiente :

Sea $P(n)$ una proposición que envuelve a un entero n, se concluye que esta proposición es válida para todo $n \geqslant n_1$ si se pueden verificar los siguien- pasos :

i) $P(n_1)$ es verdadero .

ii) Sea k un entero fijo $> n_1$. Supuesto $P(k)$ verdadero se infiere la veracidad de $P(k+1)$.

La proposición $P(k)$ se llama hipótesis de inducción. Para ilustrar este método de demostración consideremos el siguiente ejemplo : (3)

Note que :

$$1 - 1/2 = 1/2$$

$$(1 - 1/2)(1 - 1/3) = 1/3$$

$$(1 - 1/2)(1 - 1/3)(1 - 1/4) = 1/4$$

Se puede establecer una ley general que rija estos productos; se observa que los resultados de cada producto son fracciones de numerador 1 y el denominador es el mismo que aparece en el último factor, se sospecha pues, que la proposición general gtendrá la siguiente forma :

$$P(n) : (1 - 1/2)(1 - 1/3)(1 - 1/4) \ldots (1 - 1/n) = \frac{1}{n}$$

Se trata de demostrar que esta proposición es válida para todo n natural.

En nuestro caso $P(n)$ tiene significado para $n \geqslant 2$ de aquí que podremos escoger como n_1 al número 2, quedando : $P(2)$:

$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ la cual es obviamente verdadera

Sea $k \geqslant 2$, nuestra hipótesis de inducción es $P(k)$:

$$(1 - 1/2)(1 - 1/3) \ldots (1 - 1/k) = \frac{1}{k}$$

la cual la asumimos verdadera para concluir que $P(k + 1)$ es también verdadera .

La mecánica de la demostración se centra en la implicación de $P(k + 1)$ a *partir de $P(k)$, lo cual puede hacerse por medios algebraicos. En nuestro ejemplo multiplicaremos el enunciado por el término que suponemos será el siguiente de $(1 - 1/k)$ esto es $1 - \frac{1}{k+1}$ para obtener :*

$$(1 - 1/2)\,(1 - 1/3)\ldots(1 - 1/k)\,(1 - \frac{1}{k+1}) =$$

$$\frac{1}{k}\,(1 - \frac{1}{k+1}) = \frac{k+1-1}{k\,(k+1)}$$

De aquí que :

$$(1 - \frac{1}{2})\,(1 - \frac{1}{3})\ldots(1 - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{k+1}$$

que es efectivamente $P(k+1)$. La demostración ha concluído y estamos con la certeza que la proposición $P(n)$ es válida para todo $n \geqslant 2$.

La importancia de este método estriba precisamente en convertir conjeturas en proposiciones verdaderas válidas para cada $n \geqslant n_1$.

Ilustremos con otro ejemplo un poco más difícil, Obsérvese que :

$$\begin{array}{rcrcl} 1 & & 1 & = & 0 + 1 \\ 2+3+4 & & 4 & = & 1 + 8 \\ 5+6+7+8+9 & + & 9 & = & 8 + 27 \\ 10+11+12+13+14+15+16 & + & 16 & = & 27+64 \end{array}$$

Trate de encontrar una regla para estas proposiciones y pruébela por inducción.

A la derecha de las igualdades no se necesita mucho esfuerzo para intuir que sus términos son cubos de dos números sucesivos.

$$0^3 + 1^3\,,\ 1^3 + 2^3\,;\ 2^3 + 3^3\,;\ \text{etc.}\,,\ \text{en general}$$

Se tendrá : $n^3 + (n+1)^3$, $n > 0$

En la izquierda se hace más difícil encontrar una ley general.

Volvamos a escribir el enunciado con algún cambio de escritura :

$$
\begin{array}{rcll}
1 & = & 0^3+1^3 & : P(0) \\
(1+1)+3+2^2 & = & 1^3+2^3 & : P(1) \\
(2+3)+6+7+8+3^2 & = & 2^3+3^3 & : P(2) \\
(5+5)+11+12+13+14+15+4^2 & = & 3^3+4^3 & : P(3) \\
(10+7)+18+19+20+21+22+23+24+5^2 & = & 4^3+5^3 & : P(4)
\end{array}
$$

Escrito en esta forma el problema se torna acequible. En primer lugar, notamos que los términos finales de las sumas de la izquierda son cuadrados cuya base es la misma que la del segundo sumando a la derecha. Además el segundo sumando de cada cantidad entre paréntesis es un número impar, esto es : 1, 3, 5, 7; y el primer sumando de la izquierda entre paréntesis es exactamente igual al resultado del paréntesis de la fila inmediatamente anterior, también se observa que el primer sumando (total) de la izquierda es igual al último de la fila anterior de la izquierda más uno. De aquí obtenemos la ley general.

$$P(n) = (n^2+1) + (n^2+2) + \ldots + [(n+1)^2 - 1] + (n+1)^2 = n^3 + (n+1)^3$$

Se ve que $P(0)$ *es verdadera. Tratamos de pasar de* $P(k)$ *a* $P(k+1)$ *.*

Podemos observar que cuando se pasa de una fila a la siguiente aumentan dos sumandos y ya vimos antes que una fila se obtiene sumando a la anterior un número impar, y los dos términos finales son un cuadrado y un cuadrado menos 1. Para nuestro caso,

$$P(k) : (k^2+1) + (k^2+2) + \ldots + [(k+1)^2 - 1] + (k+1)^2 = k^3 + (k+1)^3 .$$

Si adiciomamos a cada término de $P(k)$, $2k+1$ *y al resultado*

$[(k+2)^2 - 1] + (k+2)^2$ *se obtiene :* $[(k+1)^2 + 1] + [(k+1)^2 + 2]) + \ldots +$ $[(k+1)^2 + 2k + 1] + [(k+2)^2 - 1] + (k+2)^2 = (k+1)^3 + (k+2)^3$ *y de esto último se tiene que :* $P(k+1)$ *es verdadera .*

En los dos ejemplos vistos hemos intuido una conjetura, utilizando el método de demostración por inducción la hemos transformado en una proposición ver-

dadera. Estos ejemplos son suficientes para mostrar cómo se aplica este método de demostración.

En una ocasión Euler afirmó : "nosotros hemos visto casos en que la mera inducción conduce a error", y en efecto Fermat consideró la secuencia, 5,17, 2 57, 65537, cuyo término general $f(n) = 2^{2^n} + 1$ *, y observó que* $f(1), f(2), f(3), f(4)$ *son primos y conjeturó que los siguientes también lo serían. Se sintió tan seguro de su conjetura que invitó a John Wallis para que tratara de demostrar lo contrario. No obstante Euler descubrió que* $f(5) = 2^{32} + 1$ *no es primo, pues es divisible entre 641. Una prueba simple de este hecho se debe a G'. T. Bennett y procede así :*

$$f(5) = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = (2 \cdot 2^7)^4 + 1$$

Sea : $2^7 = a$, $5 = b$ *entonces* $f(5) = (2a)^4 + 1$, *también*
$2^4 = 1 + 3b$, *ó* , $2^4 = 1 + b(a - b^3)$ *y así* $f(5) = (1 + ab - b^4)\, a^4 + 1 =$
$(1 + ab) [\, a^4 + (1 - ab)(1 + a^2 b^2) \,]$

lo cual implica que $1 + ab = 641$ *divide a* $f(5)$.

Este ejemplo muestra que algunas proposiciones valen para algunos números pero fallan para otros.

A propósito de los números de Fermat, aunque no todos son primos, George Polya logró demostrar que dos diferentes números de Fermat son primos relativos, y en base a esto halló una elegante forma de demostrar la infinitud de los primos.

Como hemos visto a través de estos ejemplos la inducción ha ayudado a formular verdades generales y a intuir reglas y procesos de valiosa utilidad. Aunque la inducción no siempre conduce a verdades, sin embargo por lo que tiene de útil como medio de generalización debe ser tenido en cuenta y fomentar su estudio a nivel de bachillerato, lo cual dará magníficos resultados dado que la induccion despierta en el estudiante una actitud de observación y un alto grado de generalización .

REFERENCIAS

1) . *Henri Poincaré : Ultimos Pensamientos.*

2) . *Bertrand Russell : Filosofía Matemática .*

3) . *Tom M. Apostol : Calculus, Vol. I .*

4) . *George Polya : Matemáticas y Razonamientos Plausible.*

5) . *K. Chandrasekharan : Introduction to Analytic Number Theory .*

Universidad del Quindío

Departamento de Matemáticas

Recibido. Noviembre de 1969 .