INTRODUCCION A LA GEOMETRIA AFIN

Roger Guyot

Con la enseñanza de la geometría al nivel medio aparece un problema muy delicado. Con mucha frecuencia, el método utilizado es muy oonfuso, porque los sistemas de axiomas se inspiran de la geometría tradicional de Euclides, sin tener en cuenta la evolución de la matemática en este dominio. En consecuencia esta confusión contrasta con el rigor de las estructuras algebraicas y uno puede preguntarse sobre el poder formativo de tal enseñanza.

Por eso, parece que se debe cambiar totalmente el método. Un método que parece satisfactorio es el que consiste en introducir la geometría a partir de las nociones fundamentales del álgebra que habrán sido presentadas anteriormente. No es difícil llegar al concepto de espacio vectorial, utilizando las nociones intuitivas de la geometría de la recta, del plano o del espacio. En observar que una estructura semejante se encuentra en varios ejemplos en álgebra aparece la necesidad de definir axiomáticamente la estructura de espacio vectorial.

Recordemos aquí la definición de un espacio vectorial sobre el campo de los números reales.

Definición 1. *Un conjunto V de elementos u, v, . . . , llamados vectores es un* **R-** *espacio vectorial si :*

1) En V está definida una ley de composición interna llamada **adición**, *por la cual V es un grupo conmutativo.*

2) En V está definida una ley de composición externa (o sea una aplicación de $\mathbf{R} \times V \to V$) que cumpla las propiedades siguientes :

$$a) \quad \alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \qquad \alpha \in \mathbf{R}, \quad \vec{u}, \vec{v} \in V$$

$$b) \quad (\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \vec{u} \in V$$

$$c) \quad \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \vec{u} \in V$$

$$d) \quad 1\,\vec{u} = \vec{u} \qquad \vec{u} \in V$$

Antes de definir las nociones generales de subespacios vectorial y de base parece preferible comenzar por un estudio de los espacios vectoriales de dimensión 1, 2 y 3, los cuales sirven en el estudio de la geometría. Después. no hay dificultad en generalizar los resultados encontrados, a los espacios vectoriales de dimensión n .

Consideremos ahora, por ejemplo, el espacio vectorial asociado al conjunto de los puntos de un plano. Tenemos las dos propiedades fundamentales siguientes :

1) Si A,B,C son tres puntos y $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{AC}$ los vectores asociados a estos puntos, entonces $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

2) Si 0 es cualquier punto del plano, todo vector tiene un representante de origen 0, y recíprocamente, todo vector ligado de origen 0 es un representante de un vector del plano.

Entonces, dado un espacio vectorial V, la idea es construir un conjunto, llamado espacio afín asociado a V que cumpla las dos propiedades anteriores. Más precisamente :

Definición 2. *Dado un espacio vectorial V, un conjunto $\mathcal{E}$ de elementos A,B,C, . . . , llamados* ***puntos,*** *tiene una estructura de* ***espacio afín asociado a*** *V si existe una aplicación $\phi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to V$ que tenga las propiedades siguientes :*

1) $\phi(A,B) + \phi(B,C) = \phi(A,C) \quad \forall A,B,C \in \mathcal{E}$.

2) Para todo punto 0 perteneciente a $\mathcal{E}$, la restricción ϕ_0 de ϕ a $\{0\} \times \mathcal{E}$ es una biyección de $\{0\} \times \mathcal{E}$ sobre V .

El espacio vectorial V se llama **dirección** *de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ es un espacio* *afín de dirección V .*

Observación. *Si notamos* $\vec{AB}$ *al vector* v *imagen del elemento* (A,B) *por la aplicación* ϕ, *entonces podemos traducir los axiomas anteriores así:*

1') $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad \forall A, B, C \in \mathcal{E}$

2') $\forall\, 0 \in \mathcal{E}$ *fijo*, $\forall\, \vec{v} \in V$, $\exists\, A \in \mathcal{E}$ *único tal que* $\vec{0A} = \vec{v}$

Ejemplos fundamentales .

1) Sea V *un* **R**-*espacio vectorial de dimensión 1. Un espacio afín* $\mathcal{E}_1$ *de dirección* V_1 *se llama* **recta afín** *o simplemente* **recta** *y podemos representarla por una línea recta .*

2) Sea V_2 *un* **R**-*espacio vectorial de dimensión 2. Un espacio afín* $\mathcal{E}_2$ *asociado a* V_2 *se llama* **plano afín** *o* **plano** *y puede ser representado por la superficie de una hoja de papel .*

3) De la misma manera, a todo **R**-*espacio vectorial* V_3 *de dimensión 3, podemos asociar un espacio afín* $\mathcal{E}_3$, *llamado* **espacio de 3** *dimensiones y representado por el espacio físico en el cual vivimos .*

Así tenemos los elementos fundamentales de la geometría, definidos de una manera precisa .

Algunas propiedades de los espacios afines .

1) Un elemento (A,B) *del espacio producto* $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ *se llama* **bipunto**
En $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, *consideremos la relación siguiente :*

$$(A, B)\ \mathcal{R}\ (C, D) \Longleftrightarrow \vec{AB} = \vec{CD}$$

Es claro que $\mathcal{R}$ *es una relación de equivalencia, llamada relación de* **equipotencia,** *y las clases de equivalencia corresponden biyectivamente a los vectores del espacio* V. *Así podemos identificar la clase del bipunto* (A,B) *y su imagen* $\vec{AB}$ *por la aplicación* ϕ .

Además no es difícil demostrar que $\vec{AB} = \vec{CD}$ *si y solamente si* $\vec{AC} = \vec{BD}$.

Ahora, podemos poner la definición siguiente :

Un paralelogramo es una sucesión de 4 puntos (A,B,C,D) *tales que* $\vec{AB} = \vec{DC}$

Se puede ver que esto corresponde a la definición de la geometría clásica.

2) De la propiedad fundamental $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad \forall A,B,C \in \mathcal{E}$ *tenemos las consecuencias siguientes :*

i) $\forall A \in \mathcal{E}, \; \vec{AA} = \vec{0}$

ii) $\forall (A,B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \; \vec{AB} = -\vec{BA}$

iii) Si 0 *es cualquier punto*

$$\forall (A,B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \quad \vec{AB} = \vec{0B} - \vec{0A}$$

Llamaremos **punto medio de un bipunto** (A,B) *al punto* M *único determinado por la relación* $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$

En consecuencia, (A,B,C,D) *es un paralelogramo si y solamente si* (A,C) *y* (B,D) *tienen el mismo punto medio.*

Cuando tengamos definida una estructura, es natural definir el concepto de subestructura. Vamos a ver cómo asociar la noción de subespacio afín a la noción de subespacio vectorial.

Propiedad Fundamental.

Sea $\mathcal{E}$ *un espacio afín de dirección* V, $\phi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to V$ V' *un subespacio vectorial de* V, 0 *cualquier punto en* $\mathcal{E}$.

Sea $\mathcal{E}' = \phi_0^{-1}(V')$.

Entonces, $\mathcal{E}'$, *provisto de la restricción* ϕ' *de* ϕ *a* $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$ *es un espacio afín de dirección* V'.

En primer lugar, observemos que ϕ' *es una aplicación de* $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$ *en* V'. *En efecto :*

Si $A, B \in \mathcal{E}'$, $\vec{AB} = \vec{0B} - \vec{0A}$ *y por definición de* $\mathcal{E}'$, $\vec{0A}$ *y* $\vec{0B}$ *pertenecen a* V', *luego* $\vec{AB} \subset V'$

Ahora, si $A,B,C \in \mathcal{E}'$, *por definición de* ϕ :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Finalmente, sea Ω *cualquier punto en* $\mathcal{E}'$, *y sea* $\phi'\Omega : \{\Omega\} \times \mathcal{E}' \to V'$ $\phi'\Omega$ *es la restricción a* $\{\Omega\} \times \mathcal{E}'$ *de* $\phi\Omega : \{\Omega\} \times \mathcal{E} \longrightarrow V$

Siendo ϕ_Ω *biyectiva, también lo es* ϕ'_Ω .

Definición 3. *El subconjunto* $\mathcal{E}'$ *de* $\mathcal{E}$ *así definida se llama* **variedad** *afín de dirección* V' *que pasa por el punto* 0 .

Es claro en efecto que 0 *pertenece a* $\mathcal{E}'$ *, pues* $\phi_0(0) = \vec{0}$.
Noteremos $\mathcal{E}'(0, V')$ *a la variedad afín de dirección* V' *que pasa por el punto* 0 .

Ejemplos de la geometría clásica.

1) Sea $\mathcal{E}$ *un espacio afín de dirección* V *de dimensión 2 ó 3.* V' *un subespacio vectorial de dimensión 1,* A *un punto en* $\mathcal{E}$.

La **recta** *de dirección* V' *que pasa por* A *es el conjunto.*

$$R = \{ M \in \mathcal{E} \ / \ \vec{AM} \in V' \}$$

Podemos notarla $R(A, V')$

Pero si $\vec{u}$ *es cualquier vector no nulo en* V' :

$$V = \{ \vec{v} \ / \ \vec{v} = \lambda \vec{u} , \lambda \in \mathbf{R} \}$$

Entonces

$$R(A, V') = \{ M \in \mathcal{E} \ / \ \vec{AM} = \lambda \vec{u} \ \lambda \in \mathbf{R} \}$$

y podemos notar también $R(A, V') = R(A, \vec{u})$.

$\vec{u}$ *se llama* **vector director** *de la recta* R .

Propiedad 1. *Si* B *es un punto de la recta* $R(A, \vec{u})$ *entonces*

$$R(B, \vec{u}) = R(A, \vec{u}) .$$

Existe $\alpha \in \mathbf{R}$ *tal que* $\vec{AB} = \alpha \vec{u}$ *pues* $B \in R(A, \vec{u})$

Si $M \in R(B, \vec{u})$ *, existe* $\lambda \in \mathbf{R}$ *tal que* $\vec{BM} = \lambda \vec{u}$

Pero $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = (\alpha + \lambda) \vec{u}$*, lo que significa que* M *pertenece a* $R(A, \vec{u})$ *y que* $R(B, \vec{u})$ *está contenida en* $R(A, \vec{u})$.

Ahora $\vec{AB} = \alpha \vec{u}$ *implica que* $A \in R(B, \vec{u})$ *pues* $\vec{BA} = -\alpha \vec{u}$.
Entonces $R(A, \vec{u}) \subset R(B, \vec{u})$ *. De donde tenemos la igualdad.*

Propiedad 2. *Existe una recta única que pasa por dos puntos distintos A y B.*

En efecto, si R pasa por los puntos A y B, $\vec{AB}$ es un vector director de R, y $R = R(A, \vec{AB})$. De donde la existencia y la unicidad de tal recta.

2) De la misma manera, podríamos definir un plano en el espacio afín de dimensión 3, y demostrar propiedades semejantes, o sea :

- Existe un plano único que pasa por 3 puntos no colineales.

- Existe un plano único que pasa por dos rectas secantes (dos rectas son **secantes** *si tienen un punto común único).*

Variedades afines paralelas.

Definición 4. *Sean V_1 y V_2 dos subespacios vectoriales de V y $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ variedades afines de direcciónes V_1 y V_2. Entonces, $\mathcal{E}_1$, y $\mathcal{E}_2$ se dicen* **paralelas** *si $V_1 \subset V_2$ (o $V_2 \subset V_1$).*

Por ejemplo, en el espacio de 3 dimensiones :

- Dos rectas $R(A, V')$ y $R(B, V')$ de dirección común son paralelas.

- Dos planos de misma dirección son paralelos.

- Una recta $R(A, \vec{u})$ y un plano $P(B, \vec{v}, \vec{w})$ tales que $\vec{u} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ son paralelos.

Propiedad 3. *Sea $R(A, \vec{u})$ una recta del espacio y B un punto que no pertenezca a esta recta. Entonces, existe una recta única que pasa por B y paralela a $R(A, \vec{u})$.*

En efecto $R(B, \vec{u})$ y $R(A, \vec{u})$ son paralelas. Sea $R'(B, \vec{v})$ otra recta paralela a $R(A, \vec{u})$. Entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ generan el mismo subespacio vectorial V y así :

$$R(B, \vec{u}) = R'(B, \vec{v}) = R(B, V)$$

Así queda demostrado el postulado de Euclides.

Sería muy interesante prolongar este estudio y ver cómo presentar la noción de **sistema de referencia** *en un espacio afín a partir de la noción de base en un* *espacio vectorial, y así introducir la geometría analítica .*

En este estudio se trata de **geometría afín** *, es decir que no hemos introducido todavía el concepto de distancia. Esto puede hacerse cuendo esté definido un* **producto escalar** *en el espacio vectorial director considerado, que permite definir la* **norma** *de un vector y luego la distancia de dos puntos . El espacio asociado a tal espacio vectorial se llama* **espacio métrico** *y se trata entonces de* **geometría métrica** *. Tales consideraciones pueden encontrarse en los libros mencionados en la bibliografía siguiente .*

BIBLIOGRAFIA

- *Condamine et Vissio.*
  Mathématique - Terminale C et E - Geométric . Editions Delagrave .
- *Collection Cossart et Théron .*
  Mathématiques - Terminale C - Tomes II et III . Editions Bordas.
- *Jean Diendomé*
  Algébre linéaire et géométric élémentarie . Editions Hermann .
- *Mostow - Sampson - Meyer*
  Fundamental Structures of Algebra
  International Student edition .

Universidad Nacional

Departamento de Matemáticas

Recibido : Marzo de 1970