LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA EN SECUNDARIA

Gilma de VILLAMARIN
Mary BENITEZ
Antonio DONADO ACOSTA

INTRODUCCION.

Con este trabajo queremos presentar a ustedes algunas ideas para la introducción de la enseñanza de la Geometría en los primeros años del Bachillerato.

La Geometría es una disciplina matemática que participa de muchas y muy complejas estructuras y es por eso que se hace difícil su presentación en este primer nivel.

En secundaria se puede y se debe (así se ha probado en diversas experiencias pedagógicas) comenzar la Matemática por elementos de la Teoría de Conjuntos seguida de una introducción al Algebra.

Según nuestro punto de vista, la mejor manera de introducir la Geometría es infiltrándola gradualmente en el desarrollo de tales temas básicos de la Matemática.

En un planeamiento ideal de la enseñanza de la Geometría, debe comenzarse en los años anteriores a la Enseñanza secundaria con cursos experimentales en los cuales estaría casi totalmente ausente el razonamiento deductivo explícitamente declarado como tal, pero estarían presentes la Geometría intuitiva y experimental. De esta manera se inicia al estudiante en los primeros años del bachillerato en un desarrollo racional más o menos riguroso de la Geometría en base a las experiencias realizadas.

LAMINA 1.

La Geometría es la parte de la Matemática que estudia las "figuras" u "objetos" del espacio (el plano, la recta, el círculo, los polígonos, etc.), seis propiedades y sus relaciones mutuas (rectas paralelas), segmentos congruentes, etc.), lo cual se observa en los estudios experimentales efectuados en los cursos anteriores.

Partimos entonces considerando el "Espacio" como un conjunto, no vacío de puntos, el cual constituye nuestro primer Axioma.

Las figuras geométricas no son otra cosa que partes del Espacio, es decir, conjuntos de puntos. O sea, el Espacio será considerado como el conjunto de referencia de nuestro estudio. Sin embargo, een el presente trabajo haremos un estudio de las partes del Plano, pero para dejar el camino abierto hacia el estudio de los cuerpos o figuras del Espacio, será también este nuestro referencial.

Comenzamos a trabajar enunciando nuestro segundo Axioma, que habla de existencia de por lo menos dos puntos :

"En E existen por lo menos dos puntos"

La punta del lápiz sobre el papel, puede darnos la idea de punto .

LAMINA 2.

Tenemos la existencia de por lo menos dos puntos. Experimentalmente podemos verificar que cualquiera sean los puntos a, b siempre se pueden hacer coincidir con el borde de la regla.

Introducimos ahora la noción o concepto de Interestancia entre ternas de puntos para lo cual postulamos la existencia de un tercer punto c, situado entre a y b y sobre el borde de la regla. Decimos que se cumple la interestancia a, c, b que notamos así : $a - c - b$.

Cuando hablamos de interestancia estamos suponiendo que los puntos son diferentes dos a dos, o sea $a \neq b \neq c \neq a$.

Aplicando de nuevo el Axioma entre a y c existe otro punto en relación *de interestancia y otro entre c y b y por lo tanto, tantos puntos como queramos distintos de los anteriores.*

Si trazamos todos los puntos x que guardan la relación de interestancia con a y b, hemos trazado el segmento abierto ab, lo cual hacemos corriendo el lápiz sobre el borde de la regla sin incluir los puntos a y b.

Los puntos a y b son los extremos del segmento, o sea se define el signo abierto $\overline{ab}$*, es el conjunto de todos los puntos x que cumple la interestancia* $a - x - b$.

LAMINA 3.

Dado el segmento abierto $\overline{ab}$*, si incluimos el extremo a, tenemos el segmento cerrado en a.,*

De la misma manera si incluimos el extremo b, obtenemos el segmento cerrado en b.

En caso de incluir los dos extremos a y b, obtenemos el segmento cerrado ab.

LAMINA 4.

Para llegar al concepto de semirecta, postulamos la existencia de un tercer punto c, situado a la derecha de a y b y sobre el borde de la regla. Es decir que dado el segmento cerrado ab*, existen tantos puntos como queramos a la derecha de b sobre el borde de la regla, distintos de los del los segmentos* ab.

La reunión de los puntos del segmento cerrado ab *con el conjunto de los puntos x que están a la derecha de b, sobre el borde de la regla, se llama semirecta cerrada de origen a.*

LAMINA 5.

En el caso de no incluir el origen de la semirecta, se tiene entonces la semirecta abierta de origen b.

Ahora podemos hablar de recta. Dados dos puntos a y b, podemos trazar los puntos del segmento ab*, los puntos a la derecha de a y b y los puntos a la* *izquierda de a y b.*

Es decir la traza de un lápiz deslizándose a lo largo de la regla cuyo borde pasa por los puntos a y b constituye la representación gráfica de la idea de recta.

En este momento podemos enunciar el Axioma :

"Dos puntos determinan una Recta".

Por otra parte si p y q son otros dos puntos distintos de la recta $\overleftrightarrow{ab}$*, la recta determinada por los puntos p y q es idéntica a la recta* $\overleftrightarrow{ab}$*.*

LAMINA 6.

Tenemos ahora la idea de lo que es una recta R. Hemos considerado a la recta R como una parte del Espacio, pero que sin embargo no constituye todo el Espacio. Para trabajar fuera de la recta, postulamos la existencia de un punto fuera de la recta. En este caso decimos que los puntos a,b,c son no colineales.

LAMINA 7.

Sean tres puntos no colineales a,b,c. Llamemos x a cualquier punto de $\overleftrightarrow{bc}$*; llamemos y a cualquier punto de* $\overleftrightarrow{ac}$ *y llamemos z a cualquier punto de* $\overleftrightarrow{ab}$*. De acuerdo con esto* $\{\overleftrightarrow{ax}\}$ *es el conjunto de todas las rectas que pasan por a y por un punto x de* $\overleftrightarrow{bc}$ *;* $\{\overleftrightarrow{by}\}$ *es el conjunto de todas las rectas que pasan por b y por un punto y de* $\overleftrightarrow{ac}$*,* $\{\overleftrightarrow{cz}\}$ *es el conjunto de todas las rectas que pasan por c y por un punto z de* $\overleftrightarrow{ba}$*. El conjunto de puntos determinado por la reunión de todas estas rectas determina el plano* $\overleftrightarrow{abc}$*. En este momento podemos enunciar el postulado que dice :*

"Tres puntos no colineales determinan un plano".

LAMINA 8.

Dadas dos rectas A y B del plano, puede suceder uno de los tres casos siguientes :

En el primer caso las rectas se interceptan, o sea tienen un punto en común. p.

En este caso las rectas se llaman **Secantes**.

En el segundo caso, las rectas no se cortan o sea no tienen ningún punto en común, es decir $A \cap B = \phi$.

En el último caso coinciden, o sea son iguales. En cualquiera de los dos casos se dice que las rectas son **Paralelas**.

A continuación enunciamos el postulado que dice :

"Dado un punto p y una recta L, existe una única paralela a L que pasa por p".

LAMINA 9.

Observamos ahora una propiedad que cumplen algunas partes del plano. Sea un conjunto D de puntos del plano. Dados a y b puntos del conjunto D, se observa que todos los puntos del segmento $\overline{ab}$ *son también puntos de D.*

Un conjunto que cumpla esta propiedad se llama Convexo. Más precisamente, un segmento D de puntos del plano es **Convexo** *, si y solamente es vacío, o bien si el segmento que tiene por extremos dos puntos del conjunto está contenido en el conjunto.*

De la definición se sigue que la semirecta abierta ó cerrada, la recta y el plano son convexos.

Los conjuntos convexos del plano juegan un gran papel en la Geometría, gracias al teorema siguiente :

"La intersección de dos conjuntos **Convexos** *del plano es un conjunto convexo".*

La demostración de este teorema se observa en la gráfica.

Como Corolario se obtiene, que los segmentos cerrados y abiertos son convexos, pues se pueden considerar como la intersección de dos semirectas cerradas o abiertas respectivamente, cada una de las cuales es un conjunto convexo.

LAMINA 10.

Consideremos una recta R en un plano. Observando la figura se puede constatar que la recta R determina dos partes H_1 *y* H_2 *en el plano que llamaremos semiplanos abiertos de borde R.*

La reunión del semiplano abierto H_1 *con la recta R se llama el semiplano* *cerrado T_1. La reunión del semiplano abierto H_2 con la recta R se llama el semiplano cerrado de borde R.*

En resumen, una recta R de un plano determina dos semiplanos abiertos H_1 y H_2 y dos semiplanos cerrados T_1 y T_2. La recta R es el borde común a estos cuatro semiplanos. La recta R está incluida en los semiplanos cerrados T_1 y T_2 y no está incluida en los semiplanos abiertos H_1 y H_2.

Consideremos dos puntos x y z del semiplano abierto H_1, todos los puntos del segmento cerrado $\overleftrightarrow{zx}$ pertenecen al semiplano abierto H_1, o sea que el segmento cerrado $\overleftrightarrow{zx}$ está contenido en el semiplano abierto H_1.

De manera análoga si dos puntos x e z pertenecen al semiplano cerrado T_1 el segmento $\overline{xz}$ está contenido en este semiplano.

Como consecuencia inmediata se tiene que los semiplanos cerrados y abiertos son convexos.

Por otra parte se observa que si x es un punto del semiplano abierto H_1 y y un punto del semiplano abierto H_2, o sean x, y son dos puntos que pertenecen a dos semiplanos abiertos distintos con el mismo borde R, entonces el segmento $\overline{xy}$ intercepta o tiene un punto en común con la recta R.

LAMINA 11.

Dadas dos rectas secantes $\overleftrightarrow{ab}$ y $\overleftrightarrow{cd}$, cada una de ellas determina dos semiplanos cerrados.

Consideremos el semiplano cerrado de borde $\overleftrightarrow{ab}$ que contiene al punto c y el semiplano cerrado de borde $\overleftrightarrow{ac}$ que contiene al punto b.

Llamamos ángulo (o región angular) $\widehat{abc}$, a la intersección de estos dos semiplanos cerrados. Las semirectas $\overleftrightarrow{ab}$ y $\overleftrightarrow{ac}$ se llaman lados del ángulo y el punto de corte a se llama el vértice.

Puesto que los semiplanos son conjuntos convexos del plano, un ángulo es también un conjunto convexo por ser la intersección de dos convexos.

Dados tres puntos a, b y c no colineales, llamamos triángulos (o región triangular) a la intersección de los semiplanos de borde $\overleftrightarrow{ab}$ que contiene al punto c, de borde ac que contiene a b y de borde bc que contiene a a como intersección de tres semiplanos cerrados el triángulo es también un conjunto cerrado del plano.

LAMINA 12 .

Sean las parejas de puntos del plano (a,b) *y* (c,d). *Decimos que las parejas de puntos* (a,b) *es equidistante con la pareja de puntos* (c,d), *si al colocar los puntos del compás sobre* a,b *y luego trasladarlos sin abrir ni cerrar el compás sobre los puntos* c,d, *estos coinciden con ellos.*

Cada pareja de las parejas de puntos (a,b) *y* (c,d) *determinan un segmento cerrado. Decir que las parejas de puntos son equidistantes equivale a decir que los segmentos determinados por ellos son congruentess.*

Dados los puntos c *y* b *el punto* x *es tal que la pareja de puntos* (c,b) *es equidistante con la pareja* (c,x) .

De igual manera se pueden determinar nuevos puntos tales que (c,x) *equidistantes con* (c,b). *El conjunto de todos los puntos* x *que satisfacen esta condición se llama circunferencia de centro* c *y radio* cb .

LAMINA 13 .

En el conjunto de parejas de puntos del plano, consideremos la relación de equidistancia. Evidentemente la relación es reflexiva, es simétrica y es transitiva, o sea, la relación de equidistancia es una relación de equivalencia.

Dada una pareja de puntos (p,q) *el conjunto de todas las parejas de puntos equidistantes con* p,q *se llama* **Distancia** $(p,q) = pq$.

Definida la **Distancia** *como clase de equivalencia, hablamos de adición de distancias.*

Dadas las distancias (p,q) *y* (r,s) *adicionarlas significa colocarlas de tal manera que el punto* q *coincida con* r, *y que los puntos* p-q-s *sean colineales. Además, siendo la distancia una clase de equivalencia, si tomamos otra pareja de puntos* (p,q') *de la misma distancia, o sea que* dist. (p,q) = dist. (p',q') *y la pareja de puntos* r',s' *tal que* dist.(r,s)=dist.(r',s') *y los adicionamos, entonces se cumple* dist(p,s) = dist (p',s') . *Es decir que la adición de distancias es independiente de las parejas que se tienen.*

De la definición de adición de distancias se desprende que dados tres puntos en relación de interestancia a-b-c, *significa que,* dist (a,b) + dist (b,c) = dist (a,c) .

LAMINA 14 .

Sean las parejas de puntos (a,b) y (e,f). Se dice que la distancia (a,b) es estrictamente menor que la distancia (e,f), si y solamente si existe un punto g, en relación de interestancia e-g-f de tal manera que la distancia (a,b) es igual a la distancia (e,g).

Dados los puntos c y b, el punto x es tal que dist (c,x) < dist (c,b). Existen muchos puntos que satisfacen esta condición. Rl conjunto de todos los puntos x cuya distancia ac es menor que la distancia cb se llama disco abierto de centro c y radio cb. Si incluimos la circunferencia, entonces hablamos de disco cerrado de centro c y radio cb .

LAMINA 15.

Introducimos ahora el concepto de Isometría .

Una manera experimental obvia de realizar isometrías consiste en identificar el plano con un papel transparente. Dada una figura G del plano, marquemos en el papel los puntos de la figura. Movemos el papel y volvemos a aplicarlo sobre el plano. Con este movimiento hemos transformado la figura G en la figura G'. Hemos realizado una Isometría. Observamos que al realizar la Isometría a los puntos p y q del plano les estamos haciendo corresponder otros puntos p', q', también del plano y que llamamos las transformadas de p y q lo cual notamos f(p) , f(q) .

Es decir que con la Isometría estamos haciéndole corresponder a cada punto del plano, otro punto, su transformado (por medio de esta isometría). O sea una Isometría no es otra cosa que una función puntual del plano sobre el plano.

Por otra parte, observamos que la distancia entre los puntos p,q es igual a la distancia de los puntos p',q', o sea de las imágenes o transformadas por la Isometría .

En resumen, una Isometría es una función puntual (biyectiva) que conserva las distancias.

LAMINA 16 .

Veamos ahora cuál es la imagen o transformada de un segmento por medio *de una isometría. Dado el segmento cerrado* $\overline{ab}$ *y una isometría* f *tal que* a' *es la imagen de* a *por la isometría* f *y* b' *es la imagen de* b *por la isometría* f .

Si m *es un punto del segmento* $\overline{ab}$, *significa que se cumple la interestancia* a-m-b *y por lo tanto* $dist(a,m) + dist(m,b) = dist(a,b)$. *Puesto que una isometría es una función puntual que conserva las distancias, la distancia entre los puntos* a,m *es igual a la distancia entre las imágenes, es decir, que se cumple :*

$$dist\,(a',m') + dist\,(m',b') = dist(a',b')$$

lo cual significa que se cumple la interestancia a'-m'-b', *o sea que la imagen de* m *por* f, m' *pertenece al segmento* $\overline{a'b'}$. *Es decir, que la imagen del segmento cerrado* $\overline{ab}$ *por una isometría, es el segmento cerrado* $\overline{a'b'}$, *cuyos extremos* a',b' *son las imágenes de los extremos de* $\overline{ab}$. *Por otra parte, puesto que la isometría conserva las distancias, en particular para los puntos* a,b *se cumple* $dist(a,b) = dist(a',b')$ *lo cual significa que el segmento cerrado* $\overline{ab}$ *es congruente con el segmento cerrado* $\overline{a',b'}$.

En resumen, la imagen de un segmento por una isometría es un segmento congruente con el y tal que sus extremos son las imágenes de los extremos del primero.

De manera análoga se obtiene que la imagen de una semirecta por una isometría es otra semirecta cuyo origen es la imagen del origen de la primera.

LAMINA 17 .

A través de la definición de isometría podemos definir ángulos congruentes. Sea el ángulo $\widehat{bac}$ *y una isometría* f, *tal que la imagen del vértice* a *es el punto* a'. *Sobre los lados del ángulo podemos determinar los puntos* b *y* c *los cuales tendrán otros dos puntos* b',c' *transformadas de* b *y* c *por la misma isometría. Se obtiene que la imagen del ángulo* $\widehat{bac}$ *es el ángulo* $\widehat{b',a',c'}$, *de tal manera que se cumple :* $dist(a,c) = dist(a',c')$; $dist(a,b) = dist(a',b')$ *y por lo tanto* $dist(c,b) = dist(c',b')$, *lo cual significa que los ángulos* $\widehat{bac}$ *y* $\widehat{b'a'c'}$ *son congruentes.*

Con el concepto de congruencia se puede definir la bisectriz de un ángulo. Sea el ángulo $\widehat{bac}$. *Si una semirecta* $\overrightarrow{ap}$ *con origen en el vértice a que pasa* *por un punto p interior al ángulo, determina en el ángulo que la contiene dos ángulos adyacentes congruentes, la semirecta* $\overrightarrow{ap}$ *se llama Bisectriz del ángulo* $\widehat{bac}$.

LAMINA 18 .

Consideremos la recta R en la cual podemos determinar dos puntos a y b. El punto c es tal que distancia(a, c) igual a distancia(b, c). El conjunto de todos los puntos del plano tal que su distancia al punto a es igual a la distancia del punto b que determina la recta .

Decimos que la recta M es perpendicular a la recta R. En particular en el punto p, punto de corte de la recta R con la recta M se cumple que :

distancia (a, p) = distancia (p, b)

esto significa que el punto p es el punto medio del segmento $\overline{ab}$.

La recta M perpendicular a la recta R es el punto medio del segmento $\overline{ab}$, *se llama también Mediatriz del segmento* $\overline{ab}$. *De la construcción de la recta M, es inmediato que los ángulos* $\widehat{apc}$ *y* $\widehat{bpc}$ *determinados por las rectas M y R perpendiculares son congruentes.*

LAMINA 19 .

Dadas dos rectas M y R perpendiculares los ángulos congruentes determinados por ellas se llaman Rectos. Un ángulo recto se puede materializar por una escuadra. Un ángulo menor que un ángulo recto se llama agudo. Un ángulo mayor que un ángulo recto se llama obtuso.

Se puede hacer una clasificación de los triángulos según los ángulos. Un triángulo que tiene un ángulo recto se llama Rectángulo; un triángulo que tiene todos sus ángulos agudos se llama Acutángolo. Un triángulo que tiene un ángulo obtuso se llama Obtusángulo.

LAMINA 20 .

Los triángulos se pueden clasificar también según sus lados. En el triángulo abc las distancias entre los puntos vértices son diferentes. En este caso, o sea cuando un triángulo no tiene un par de lados congruentes se llama Escaleno. En el triángulo q, r, s la distancia qs es la igual a la distancia rs. En *este caso, o sea cuando un triángulo tiene dos lados congruentes se llama isósceles. Por otra parte, el triángulo qrs tiene dos ángulos congruentes En efecto, el ángulo $\widehat{sqp}$ es congruente con el ángulo $\widehat{prs}$.*

Como caso particular de los triángulos isósceles tenemos el caso del triángulo dfe en el cual la distancia de f a los puntos d y e es igual a la distancia de e. En este caso o sea cuando un triángulo isósceles tiene sus tres lados congruentes, se llama Equilátero. Por otra parte el triángulo de f tiene sus tres ángulos congruentes.

LAMINA 21.

Sea un punto d y una recta R. La perpendicular a R que pasa por el punto d corta a R en el punto p. La distancia del punto d a la recta R, es la distancia entre los puntos d y p. En base a esto podemos hablar de distancia entre rectas paralelas.

Sean L y R dos rectas paralelas. Trazamos rectas perpendiculares a L y R. Se puede verificar que la distancia entre los puntos de corte de las perpendiculares con las rectas L y R es la misma. Esta distancia es la distancia entre las rectas L y R. O sea:

distancia entre L y R es la distancia (a, p) o distancia (a', p').

LAMINA 22.

Dados los puntos a, b, c, d, tales que tres de ellos no son colineales. Considerémos los semiplanos cerrados de borde $\overleftrightarrow{ab}$ que contiene al punto d, el semiplano cerrado de borde ad que contiene al punto c, el semiplano cerrado d c que contiene al punto b y el semiplano cerrado cb que contiene al punto a.

La intersección de estos cuatro semiplanos es el cuadrilátero abcd. El borde del cuadrilátero abcd es la reunión de los segmentos cerrados $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{da}$. Puesto que cada uno de los semiplanos es un conjunto cerrado del plano, el cuadrilátero abcd es también un conjunto convexo.

LAMINA 23.

Dadas las rectas R y L paralelas consideremos los siguientes semi-

planos determinados por ellos. El semiplano cerrado de borde R que contiene la recta L y el semiplano cerrado de borde L que contiene la recta R. Llamamos banda cerrada B, a la intersección de los dos semiplanos cerrados T_L *y* T_R. *La Banda es un conjunto convexo, por ser la intersección de dos Convexos.*

La distancia h entre las rectas paralelas R y L se llama altura de la Banda. Hablemos ahora de algunos polígonos especiales. Consideremos el ángulo (o región angular) $\widehat{aob}$ *y una banda B cuyos bordes intersectan los lados del sector angular. La intersección de estos dos conjuntos de puntos se llama Trapecio, de lados* $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{bd}$, $\overrightarrow{dc}$ *y* $\overrightarrow{ca}$. *Es decir que el trapecio es un cuadrilátero que tiene dos de sus lados paralelos. La altura h de la banda es la altura del trapecio.*

Por otra parte el trapecio es también un conjunto Convexo, por ser la intertersección de dos Convexos.

LAMINA 24 .

Consideremos dos bandas B y B' intersectantes. El conjunto de intersección de las dos bandas es el paralelogramo abcd. Puesto que cada banda es un conjunto convexo también lo es el paralelogramo por ser la intersección de dos Convexos.

Obsérvese que el paralelogramo es un caso particular del trapecio, cuando este tiene sus lados opuestos paralelos. Por otra parte en el caso del paralelogramo se pueden considerar dos alturas, las correspondientes alturas de las dos bandas.

LAMINA 25 .

Un primer caso particular del anterior se tiene cuando se tienen dos bandas B y B' de bordes respectivamente perpendiculares. En este caso la intersección de las dos bandas se llama Rectángulo. Es decir, un rectángulo es un paralelogramo que tiene todos sus lados perpendiculares, o sea, que todos sus ángulos son rectos. Como caso particular del paralelogramo, el rectángulo tiene dos alturas y además es un conjunto convexo.

LAMINA 26 .

Un segundo caso particular se tiene cuando se trata de la intersección de *dos bandas B y B' que tienen la misma altura. En este caso la intersección de las bandas se llama Rombo, es decir, un rombo es un paralelogramo que tiene sus lados congruentes. Obsérvese que el rombo no tiene sino una sola altura.*

LAMINA 27

Los dos casos anteriores pueden suceder simultáneamente. Es decir, puede tenerse la intersección de dos bandas B y B' de bordes perpendiculares y además con igual altura. En este caso la intersección de las dos bandas se llama Cuadrado. O sea que un Cuadrado es el rectángulo que tiene todos sus lados congruentes, o también se puede considerar el Cuadrado como el Rombo cuyos ángulos son rectos.

Como en el caso del rombo el cuadrado no tiene sino una sola altura.

LAMINA 28 .

En esta gráfica se resumen las relaciones de inclusión entre los diferentes conjuntos de cuadriláteros convexos.

Se tienen los cuadriláteros, los trapecios como un caso particular cuando dos lados son paralelos y si además todos los lados opuestos son paralelos, se tiene el paralelogramo.

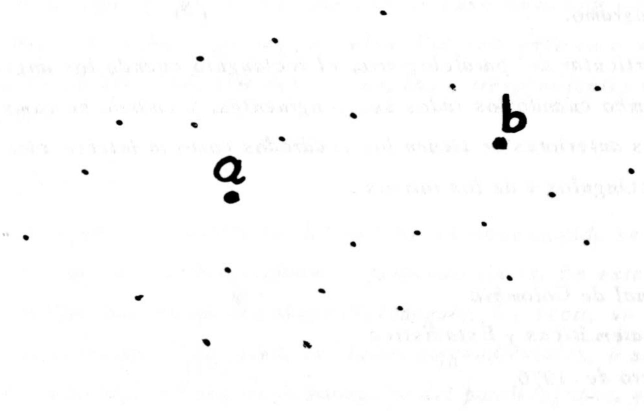
Como caso particular del paralelogramo, el rectángulo cuando los ángulos son rectos, o el rombo cuando los lados son congruentes, y cuando se cumplen las dos condiciones anteriores se tienen los cuadrados como la intersección del conjunto de los rectángulos y de los rombos .

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas y Estadística
Recibido : Febrero de 1970

1

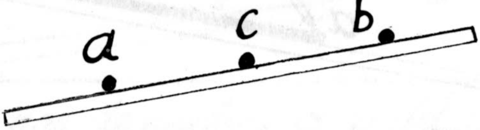
Existe un conjunto E no vacío cuyos elementos se llaman puntos

En E existen por lo menos dos puntos



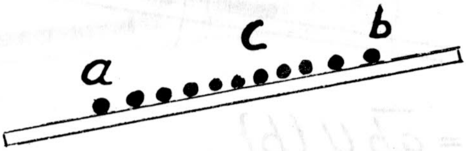
2

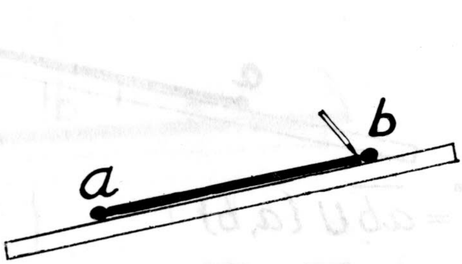
Para todo por de puntos **a**, **b** del conjunto E existe por lo menos un tercer punto c, tal que a-c-b



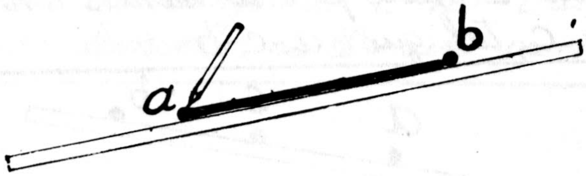
$$a\text{-}c\text{-}b \Rightarrow a \neq b \neq c \neq a$$

$$a\text{-}c\text{-}b \Longleftrightarrow b\text{-}c\text{-}a$$



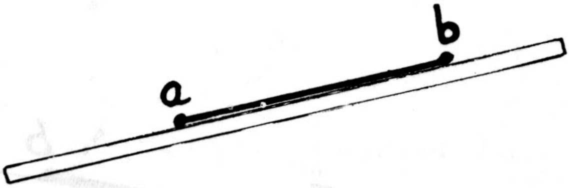


$$\overline{ab} = \{x : \mathbf{a}\text{-}x\text{-}\mathbf{b}\}$$

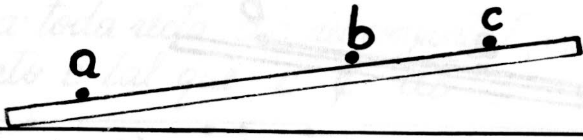


$\overset{\bullet\!-\!-}{ab} = \overline{ab} \cup \{a\}$

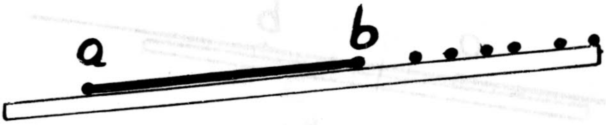
$\overset{-\!-\!\bullet}{ab} = \overline{ab} \cup \{b\}$



$\overset{\bullet\!-\!\bullet}{ab} = \overline{ab} \cup \{a, b\}$

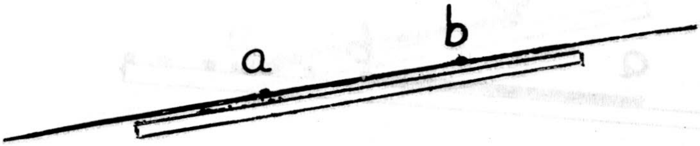


Para todo par de puntos a, b del conjunto E,
existe por lo menos un tercer punto c tal que
a - b - c



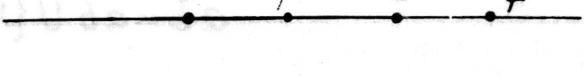
$$\overrightarrow{ab} = \overline{ab} \cup \{x : a\text{-}b\text{-}x\}$$

$$\overset{\longleftarrow\bullet}{ba} = \overset{\bullet\!\!-\!\!\bullet}{ba} - \{b\}$$



$$\overleftrightarrow{ab} = \{x : x\text{-}a\text{-}b\} \cup \overline{ab} \cup \{x : a\text{-}b\text{-}x\}$$

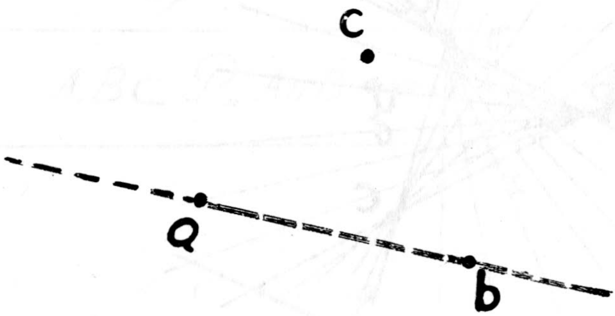
Dos puntos determinan una Recta

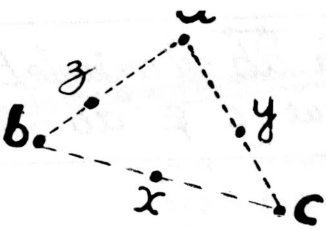


6

Para toda recta $\overleftrightarrow{ab}$ del conjunto E, existe un punto c tal que $c \notin \overleftrightarrow{ab}$

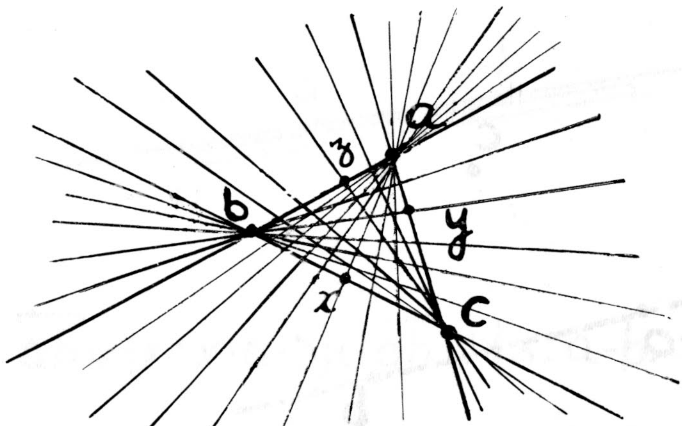
$c \notin \overleftrightarrow{ab}$





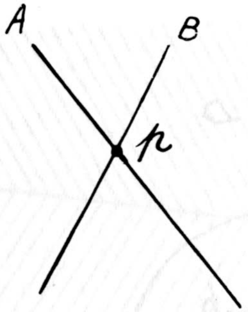
$a \notin \overleftrightarrow{bc}$

$x \in \overleftrightarrow{bc}$, $y \in \overleftrightarrow{ac}$, $z \in \overleftrightarrow{ba}$



Plano abc $= \{\overleftrightarrow{ax}\} \cup \{\overleftrightarrow{by}\} \cup \{\overleftrightarrow{cz}\}$

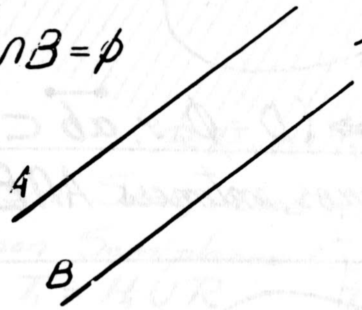
Tres puntos no colineales determinan un Plano



Rectas secantes

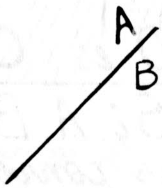
$A \cap B = \{p\}$

$A \cap B = \emptyset$

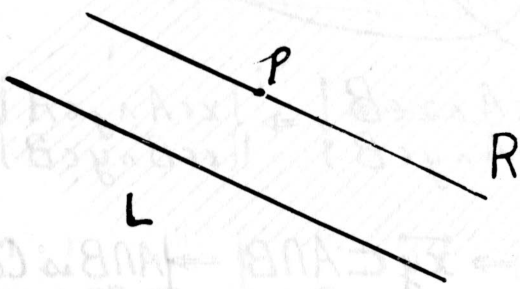


Rectas paralelas

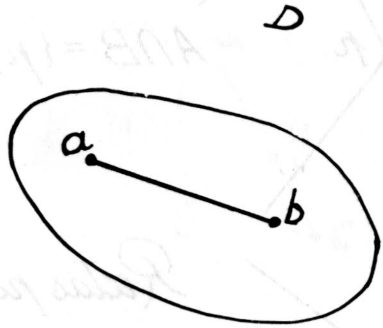
$A = B$



$$\boxed{A, B \subset \mathcal{P},\ A \parallel B \Longleftrightarrow (A = B \vee A \cap B = \emptyset}$$

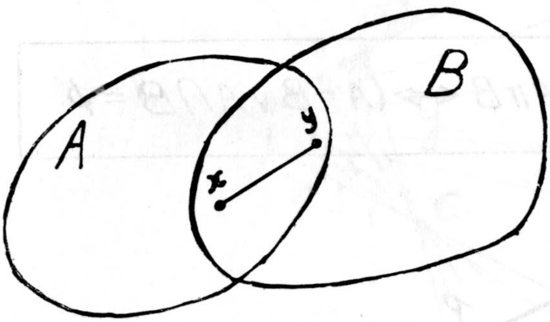


Existe una única paralela a L que pasa por p



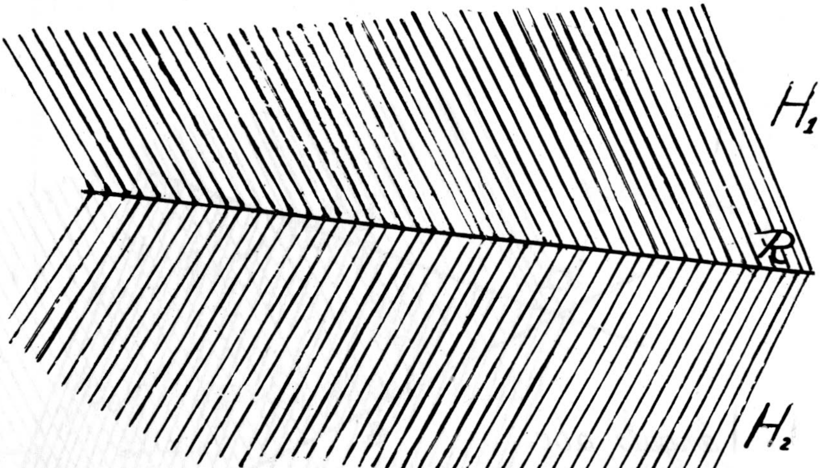
D es Convexo $\Longleftrightarrow (D = \emptyset$, ó, $\overline{ab} \subset D)$

> Si A, B son convexos, entonces $A \cap B$ es convexa.



$$\left.\begin{array}{l} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \\ y \in A \cap B \Rightarrow y \in A \wedge y \in B \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \wedge y \in A \\ x \in B \wedge y \in B \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \overline{xy} \subset A \\ \wedge \\ \overline{xy} \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{xy} \subset A \cap B \Rightarrow A \cap B \text{ es Convexo}$$

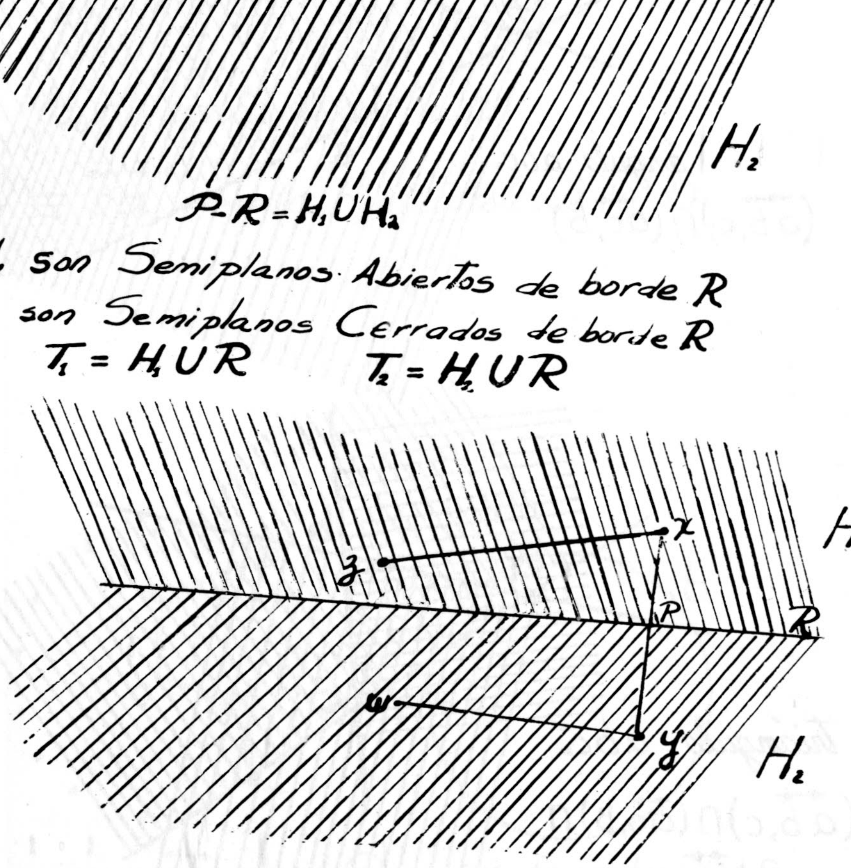


$\mathcal{P} - R = H_1 \cup H_2$

H_1, H_2 son Semiplanos Abiertos de borde R

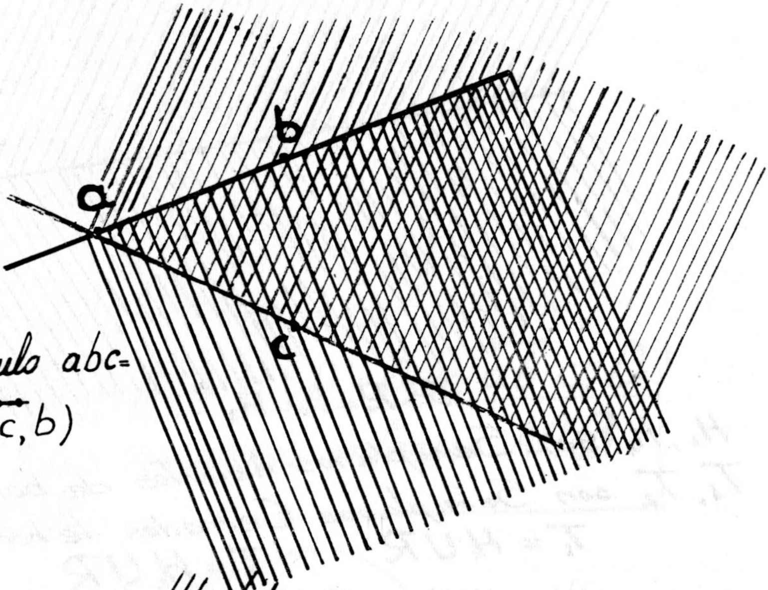
T_1, T_2 son Semiplanos Cerrados de borde R

$T_1 = H_1 \cup R \qquad T_2 = H_2 \cup R$

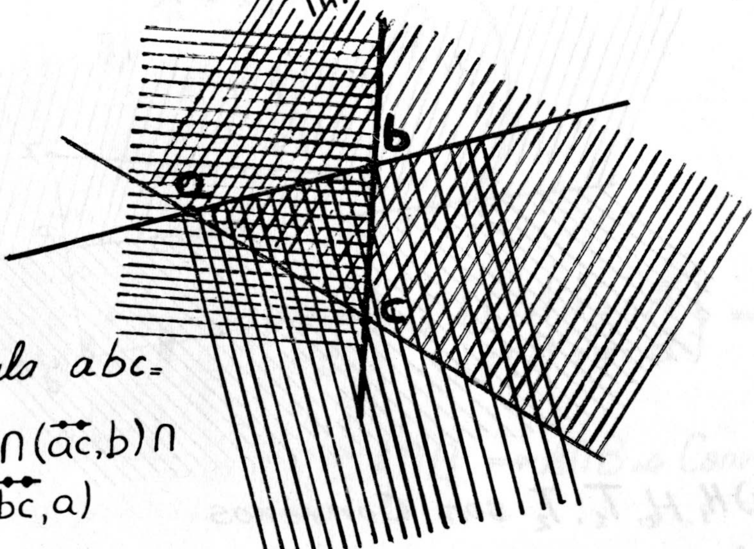


(i) H_1, H_2, T_1, T_2 son Convexos

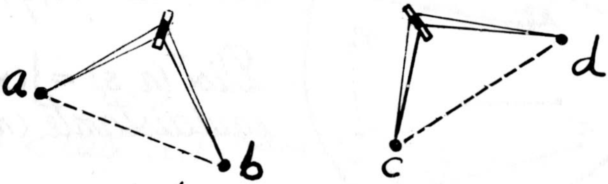
(ii) $x \in H_1, T_1 \wedge y \in H_2, T_2 \Longrightarrow \overleftrightarrow{xy} \cap R \neq \emptyset$



ángulo abc=
$(\overleftrightarrow{ab},c)\cap(\overleftrightarrow{ac},b)$

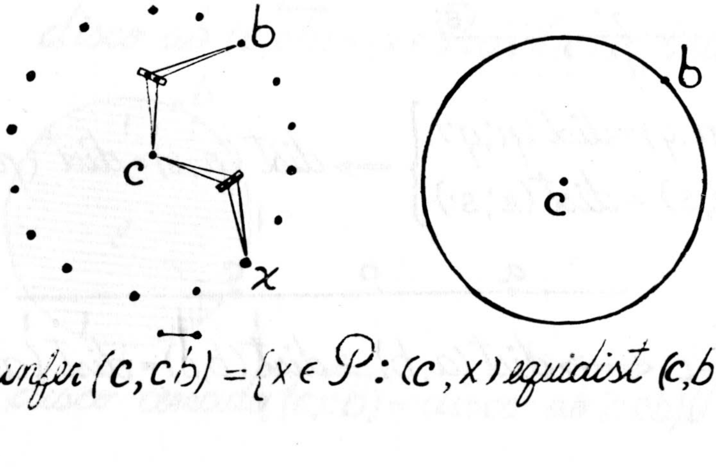


triángulo abc=
$(\overleftrightarrow{ab},c)\cap(\overleftrightarrow{ac},b)\cap$
$\cap(\overleftrightarrow{bc},a)$

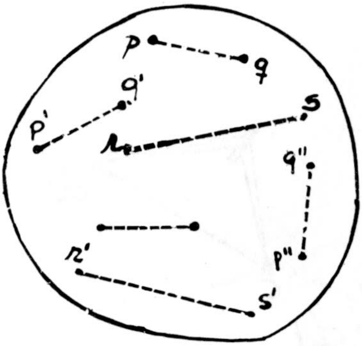


(a,b) equidistante (c,d)

$\overline{ab} \equiv \overline{cd} \Longleftrightarrow (a,b)$ equidistante (c,d)



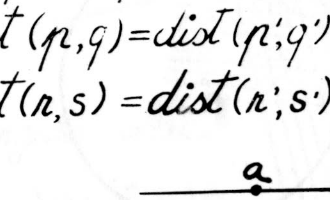
Circunfer $(c, \overline{cb}) = \{x \in \mathcal{P} : (c,x)$ equidist $(c,b)\}$



$Dist(p,q) = \{(x,y) : (x,y) \text{ equidistante } (p,q)\}$

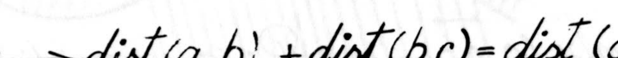
$Dist(r,s) = \{(x,y) : (x,y) \text{ equidistante } (r,s)\}$

La Equidistancia efectúa una partición en el conjunto de parejas de puntos del Plano. Cada clase de equivalencia es una Distancia

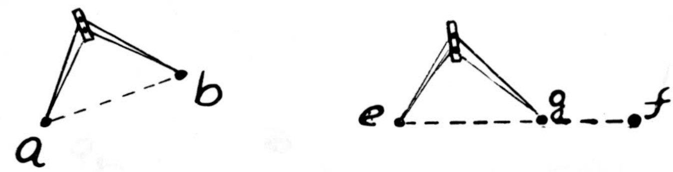


$dist(p,q) + dist(r,s) = dist(p,s)$

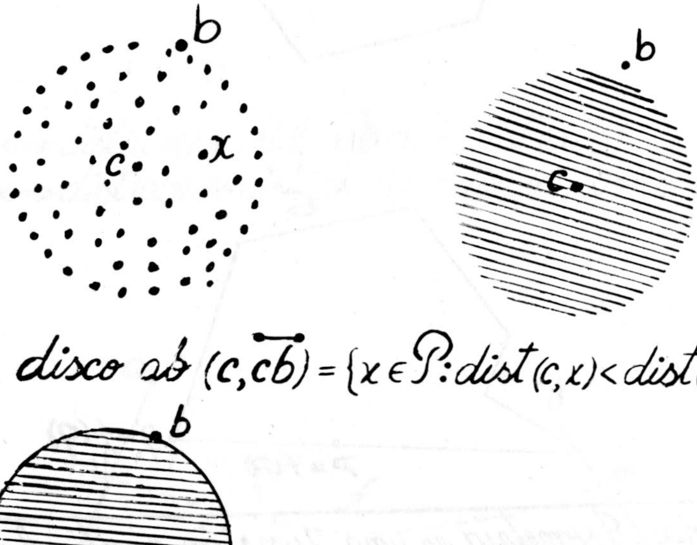
$$\left.\begin{array}{l} dist(p,q) = dist(p',q') \\ dist(r,s) = dist(r',s') \end{array}\right\} \Longrightarrow dist(p,s) = dist(p',s')$$



$$a\text{-}b\text{-}c \Longleftrightarrow dist(a,b) + dist(b,c) = dist(a,c)$$

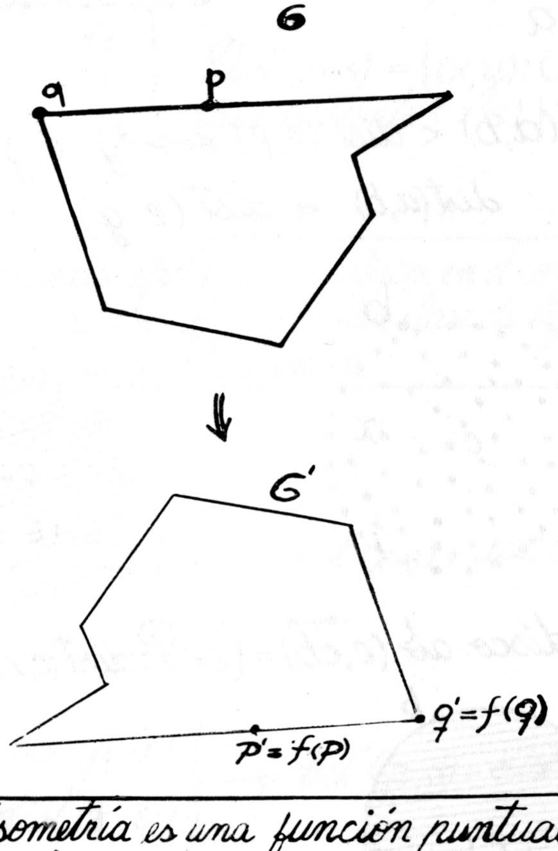


$$\mathrm{dist}(a,b) < \mathrm{dist}(e,f) \Longleftrightarrow \exists g : e\text{-}g\text{-}f,\ \wedge,$$
$$\mathrm{dist}(a,b) = \mathrm{dist}(e,g)$$



$$\text{disco ab}\,(c,\overline{cb}) = \{x \in \mathcal{P} : \mathrm{dist}(c,x) < \mathrm{dist}(c,b)\}$$

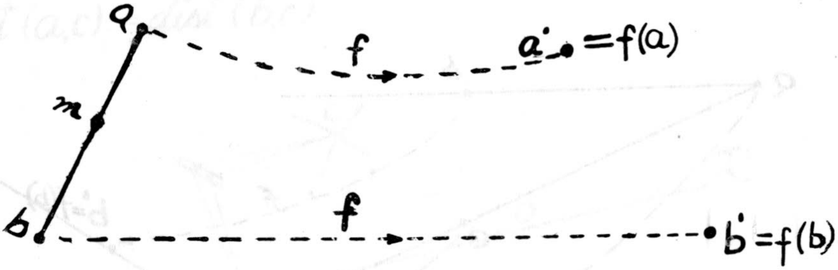
$$\text{disco cerrado}\,(c,\overline{cb}) = \text{disco ab}\,(c,\overline{cb}) \cup \mathcal{C}_{c,b}$$



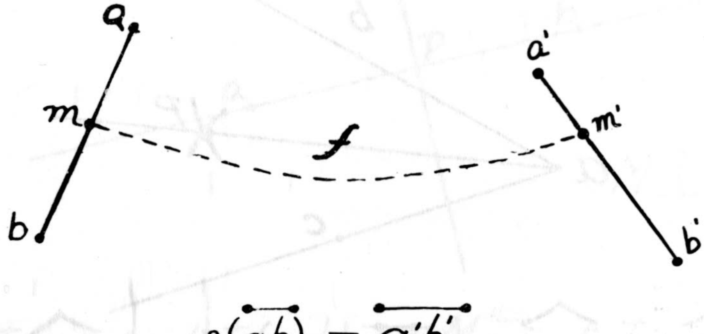
$$\boxed{\text{Una Isometría es una función puntual que conserva las distancias.}}$$

O sea $\quad f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$

$$\text{distancia}\,(p, q) = \text{dist}\,(p'; q')$$

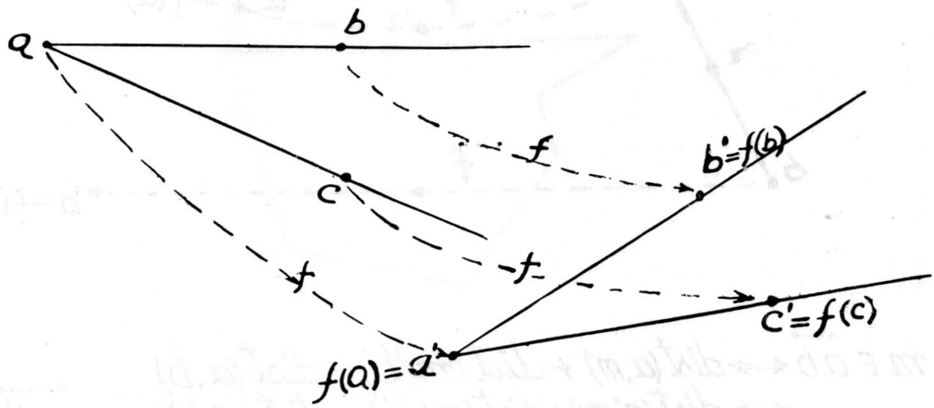


$$m \in \overline{ab} \Leftrightarrow dist(a,m) + dist(m,b) = dist(a,b)$$
$$\Leftrightarrow dist(a',m') + dist(m',b') = dist(a',b') \Leftrightarrow m' \in \overline{a'b'}$$



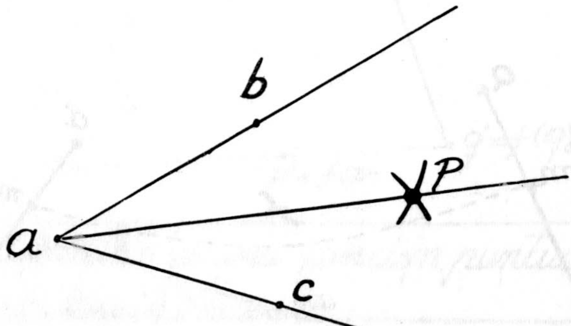
$$f(\overline{ab}) = \overline{a'b'}$$

$$\boxed{dist(a,b) = dist(a',b') \Longleftrightarrow \overline{ab} \equiv \overline{a'b'}}$$



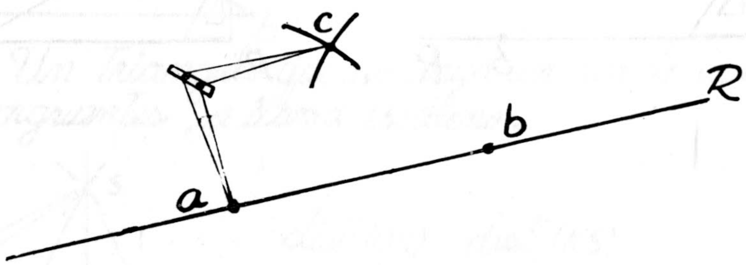
$dist(a,c) = dist(a';c')$ $\quad$ $dist(c,b) = dist(c';b')$

$dist(a,b) = dist(a';b')$

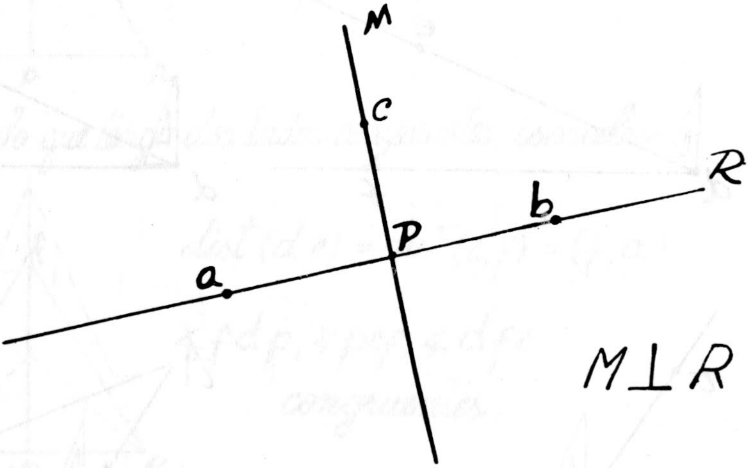


$\widehat{bap} \equiv \widehat{pac} \Leftrightarrow \overleftrightarrow{ap}$ es bisectriz de $\widehat{bac}$

$dist(a,c) = dist(b,c)$

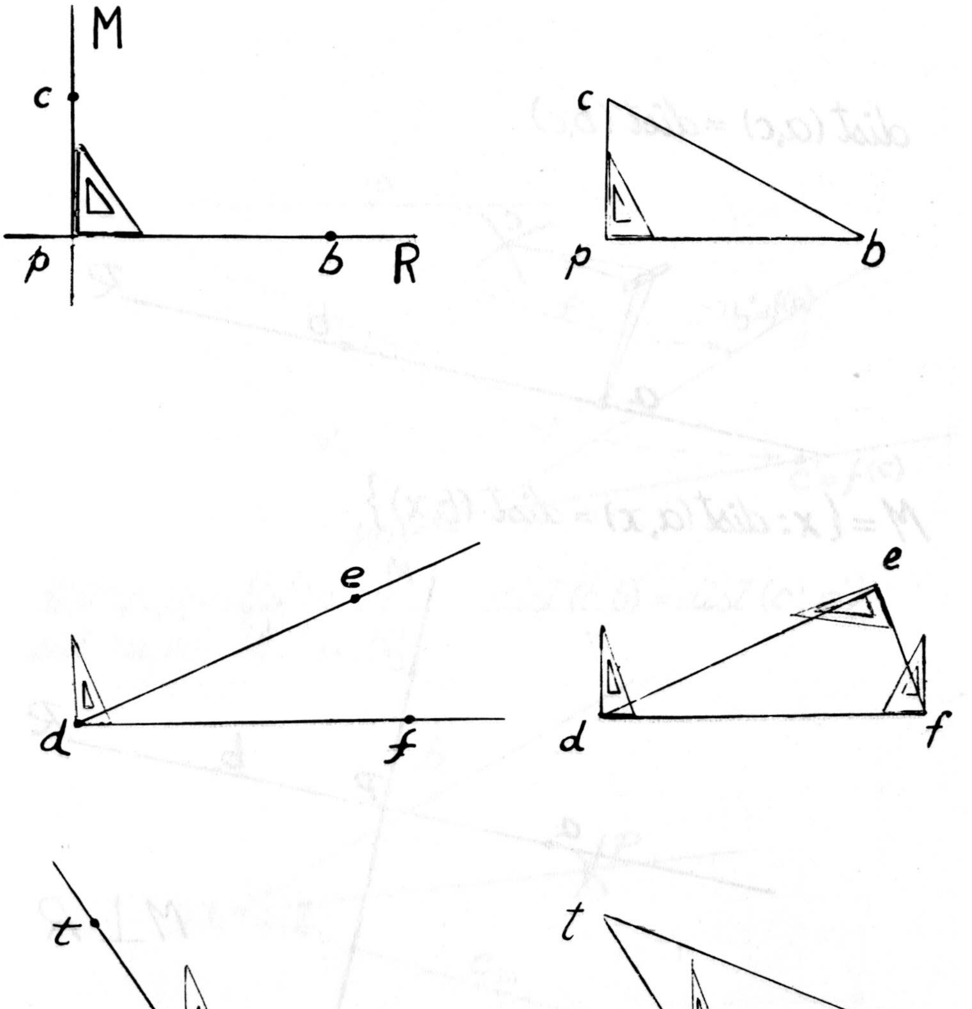


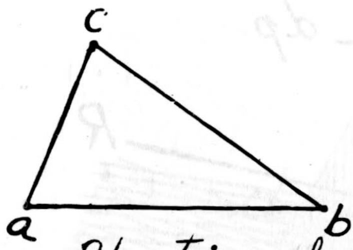
$M = \{x : dist(a,x) = dist(b,x)\}$



$dist(a,p) = dist(p,b) \Longleftrightarrow M$ es mediatriz de $\overline{ab}$

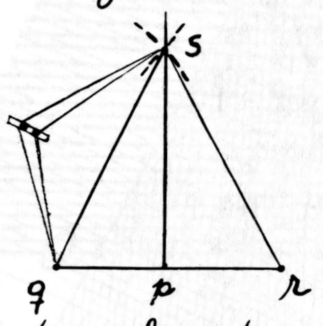
$< apc \equiv < bpc$


M
c
p
b
R
c
p
b
e
d
f
e
d
f
t
r
s
t
r
s



$dist(ab) \neq dist(bc) \neq dist(c,a)$

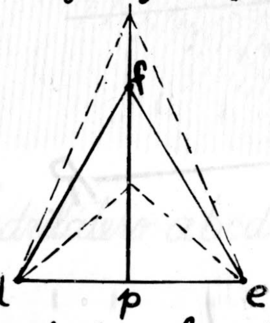
Un triangulo que no tenga un par de lados congruentes, se llama escaleno.



$dist(qs) = dist(rs)$

$\widehat{sqp}$ congruente $\widehat{prs}$

Un triángulo que tenga dos lados congruentes, isósceles

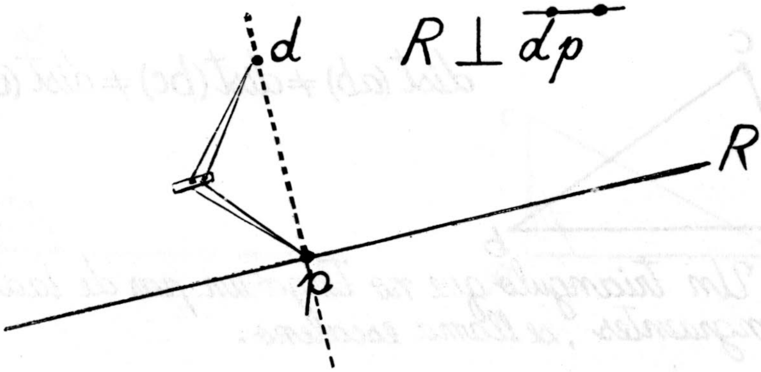


$dist(d,e) = dist(e,f) = (f,d)$

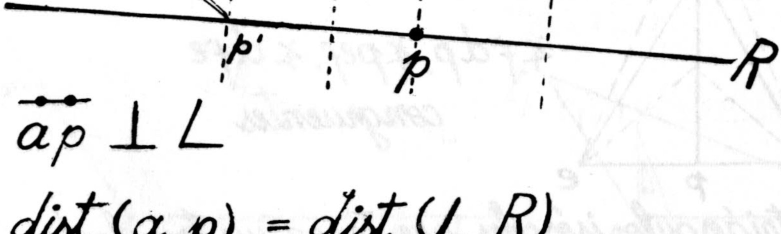
$\sphericalangle fdp, \sphericalangle pef, \sphericalangle dfe$ congruentes

Un triángulo isósceles que tenga sus tres lados congruentes, se llama equilátero.

$R \perp \overleftrightarrow{dp}$

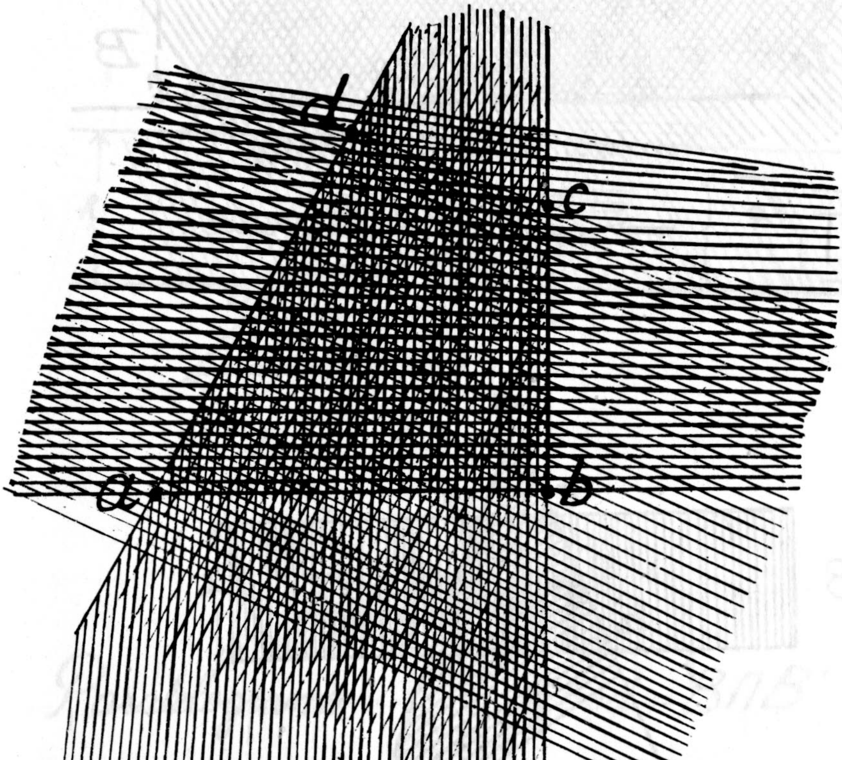


$\text{dist}\,(d,p) = \text{dist}\,(d,R)$

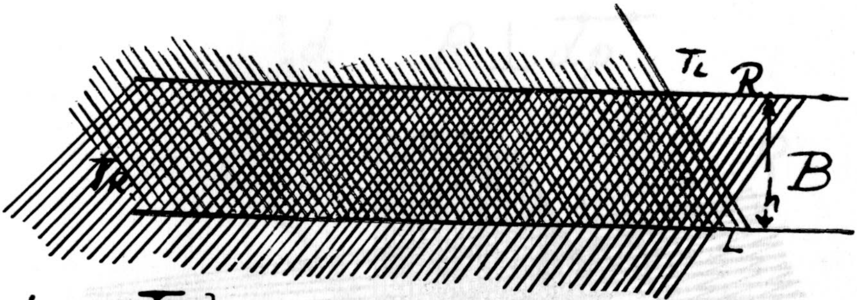


$\overleftrightarrow{ap} \perp L$

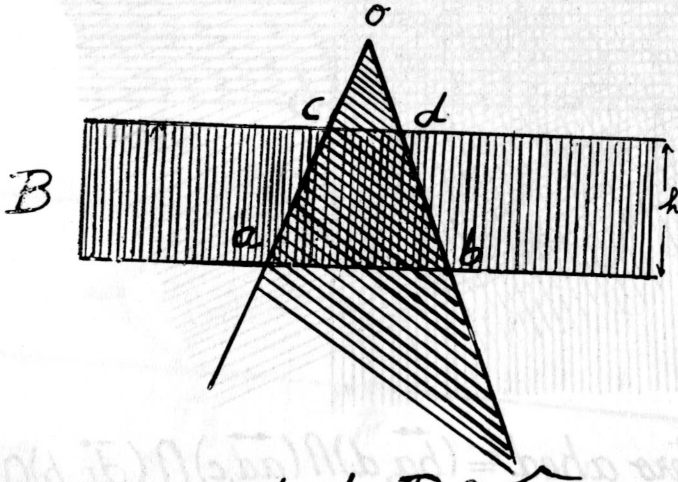
$\text{dist}\,(a,p) = \text{dist}\,(L,R)$



Cuadrilátero abcd $= (\overleftrightarrow{ba}, d) \cap (\overleftrightarrow{ad}, c) \cap (\overleftrightarrow{dc}, b) \cap (\overleftrightarrow{bc}, a)$

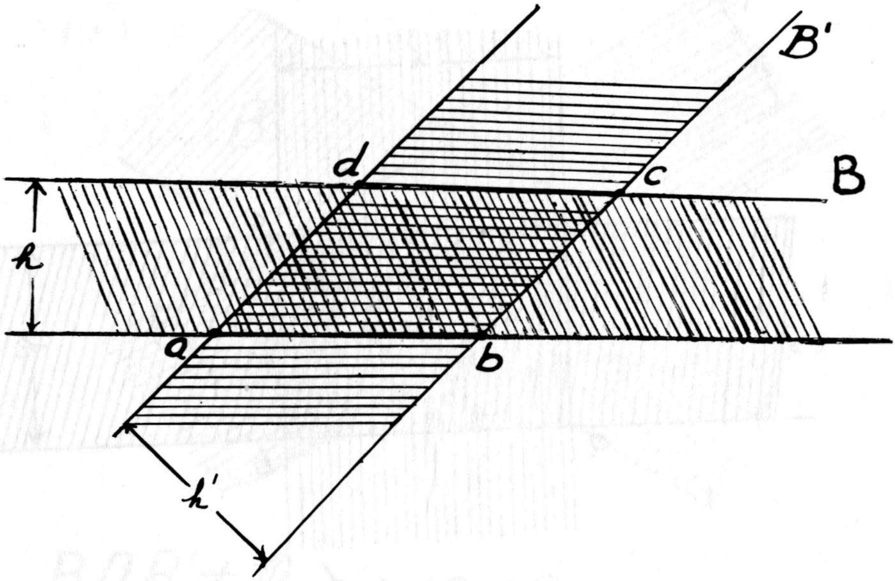


$$\left.\begin{array}{l} L \subset T_R \\ R \subset T_L \end{array}\right\} \Longrightarrow T_R \cap T_L = \text{Banda}$$



Trapecio $\quad ab,cd = B \cap \widehat{aob}$

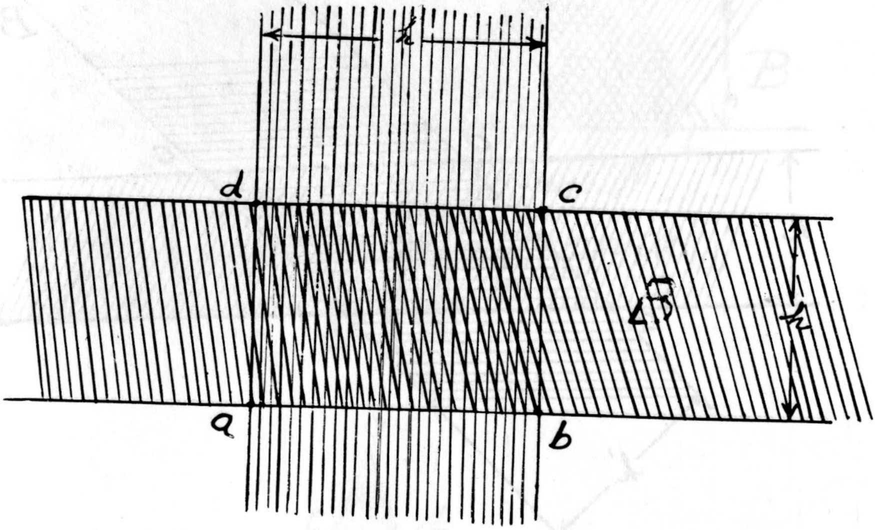
El cuadrilátero que tiene dos de sus lados, paralelos, se llama **trapecio**



$$B \cap B' \neq \emptyset$$

Paralelogramo $\quad abcd = B \cap B'$

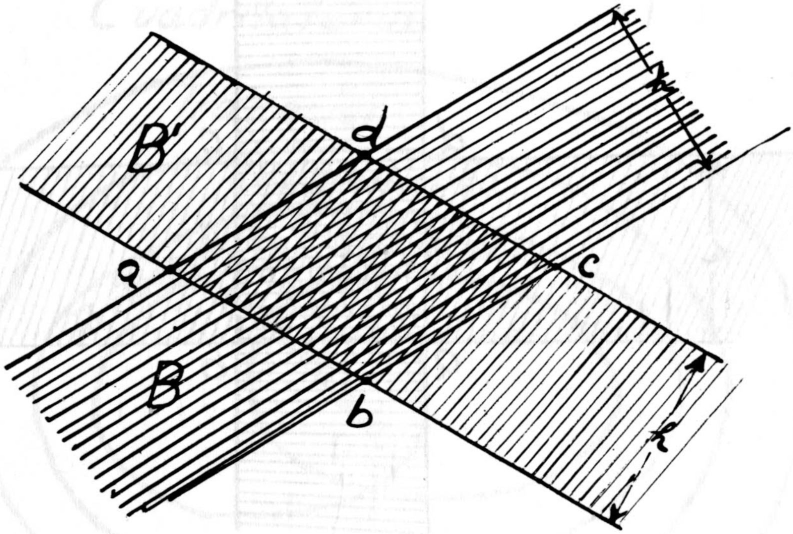
Un Trapecio que tiene sus lados opuestos paralelos se llama Paralelogramo.



$B \cap B' \neq \emptyset$

Rectángulo $\qquad abcd = B \cap B'$

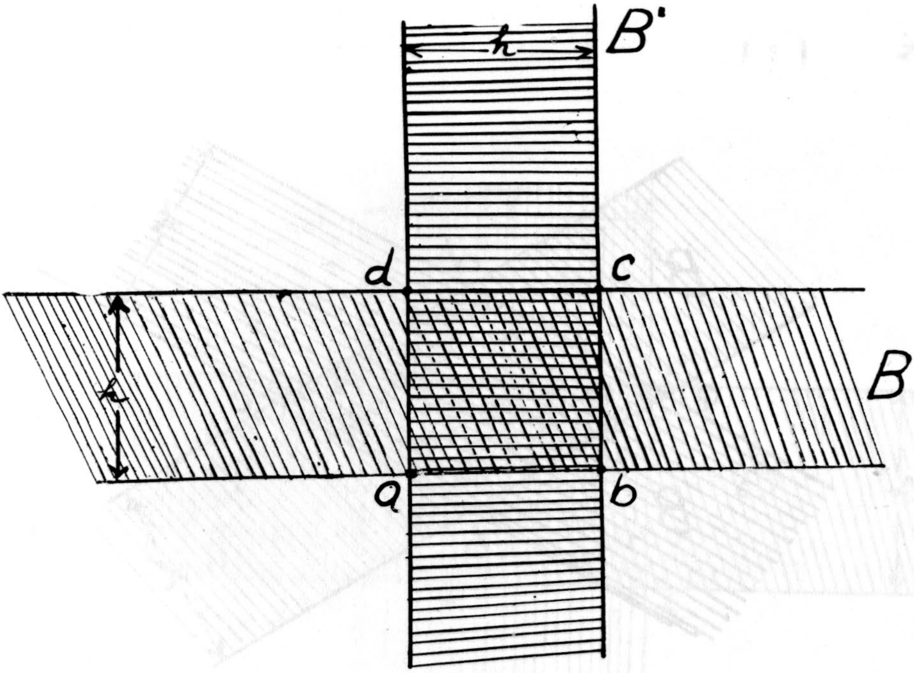
El paralelogramo que tiene sus lados perpendiculares, se llama **Rectángulo**



$B \cap B' \neq \emptyset$

Rombo $abcd = B \cap B'$

Un paralelógramo que tiene sus lados congruentes se llama Rombo.

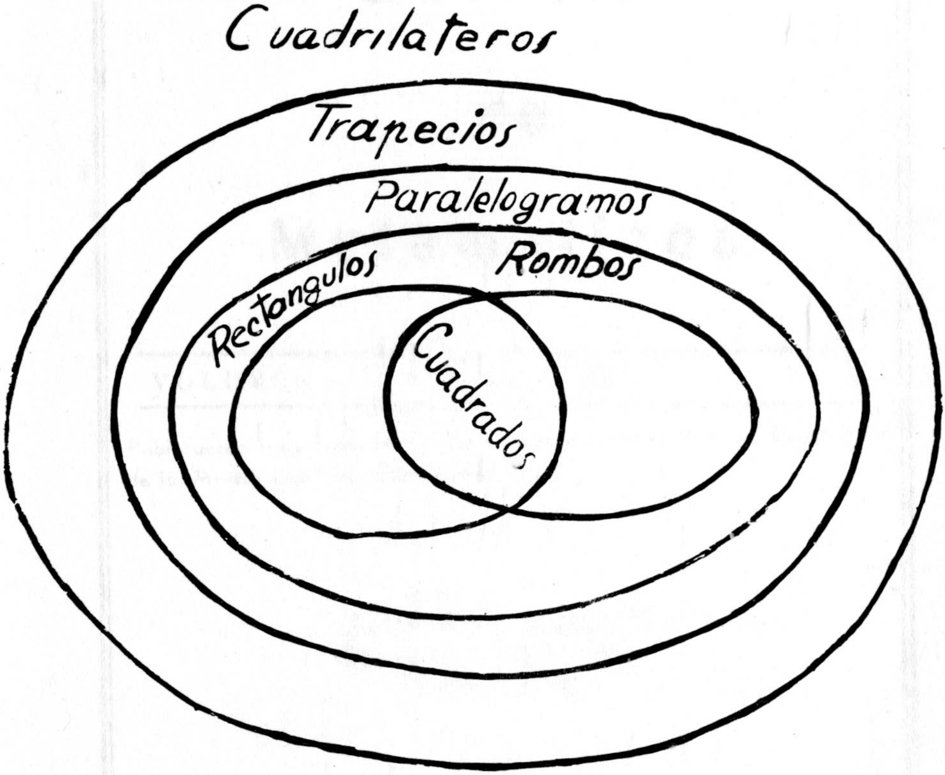


$B \cap B' \neq \phi$

cuadrado abcd $= B \cap B'$

El cuadrado es el rectángulo cuyos lados son congruentes

El cuadrado es el rombo cuyos ángulos son congruentes


Cuadrilateros
Trapecios
Paralelogramos
Rombos
Rectangulos
Cuadrados