Boletín de Matemáticas
Vol. XIX N° 3 (1985)

APORTES

USO DEL VAIVEN EN LA OBTENCION DE ISOMORFISMOS DE CONJUNTOS ORDENADOS DENSOS Y SUPERDENSOS

José Muñoz Q.

§0. RESUMEN.

El propósito principal del presente artículo es divulgar las pruebas directas de tres resultados fundamentales en el estudio de los números reales no estándar:

- Todos los conjuntos totalmente ordenados densos sin extremos, de cardinal $\aleph_0$, son isomorfos.
- Todo conjunto superdenso contiene una copia de $(\mathbb{R},<)$.
- Todos los conjuntos ordenados superdensos de cardinal $\aleph_1$, son isomorfos.

En las demostraciones hacemos explícitas algunas ideas de Cantor (ver [1]), Hausdorff (ver [3]) y Guillman y Jerinson (ver [2]).

Utilizamos los resultados anteriores como motivación para introducir un concepto más general llamado **método del vaivén**, con el fin de establecer isomorfismos entre estructuras del mismo tipo de cardinal $\aleph_0$.

Finalmente proponemos y demostramos una generalización débil en este método para estructuras de un mismo cardinal cualquiera.

§1. NOCIONES PRELIMINARES.

Diremos que un conjunto $(X,<)$ es un η_0-conjunto si es totalmente ordenado y tal que dados subconjuntos finitos cualesquiera A, B, de X, si $A < B$ (o sea si todo elemento de A es menor que todo elemento de B), entonces existe $r \in X$ tal que $A < \{r\} < B$.

Es fácil ver que un η_0-conjunto es lo mismo que un conjunto totalmente ordenado *denso* (entre dos elementos distintos siempre hay otro), sin primero ni último elementos (ya que en la definición A y B pueden ser vacíos).

Llamaremos a un conjunto ordenado $(X,<)$ *superdenso*, o un η_1-conjunto, si es totalmente ordenado y tal que dados subconjuntos contables arbitrarios A y B de X, con $A < B$, existe $c \in X$ tal que $A < \{c\} < B$.

Cuando $B = \emptyset$, la condición implica que todo subconjunto contable A posee una cota superior estricta, que no está en A.

Análogamente, cuando $A = \emptyset$ se deduce que cualquier conjunto contable B posee una cota inferior estricta.

TEOREMA 1. El conjunto $\mathbb{R}^*$ de los reales no estándar con su orden usual es superdenso.

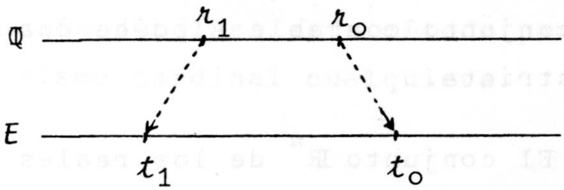
Una demostración del teorema 1 con algunos detalles omitidos, puede verse en [5], pp.26-32.

Otros ejemplos de conjuntos superdensos son el de los infinitesimales, el de los infinitesimales positivos, el de los reales no estándar infinitos positivos. No son superdensos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ni el conjunto de los reales no estándar finitos.

§2. ISOMORFISMOS ENTRE η_o-CONJUNTOS.

TEOREMA 2. $(\mathbb{Q},<)$ puede sumergirse inyectivamente en cualquier η_o-conjunto.

Demostración. Sea $(E,<)$ un η_o-conjunto; como $\mathbb{Q}$ es contable infinito, sea $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una enumeración inyectiva de $\mathbb{Q}$; vamos a contruir una función $f:(\mathbb{Q},<) \to (E,<)$ inyectiva que preserve el orden; lo haremos inductivamente:



i) Para $r_o \in \mathbb{Q}$, tomemos cualquier $t_o \in E$ y definamos $f_o = \{(r_o,t_o)\}$.

ii) Consideremos r_1 en $\mathbb{Q}$; si $r_1 < r_o$, tomemos en E un elemento t_1 menor que t_o (existe puesto que E no tiene mínimo) y definamos $f_1 = f_o \cup \{(r_1,t_1)\}$ Si fuese $r_1 > r_o$, se tomaría $t_1 > t_o$ y se definiría f_1 de la misma forma.

iii) Supongamos que ya se ha definido f_n,

$$f_n:\{r_o,r_1,\ldots,r_n\} \to \{t_o,t_1,\ldots,t_n\}$$

siendo un isomorfismo de orden del primer conjunto sobre el segundo. Consideremos r_{n+1} ; siendo biyectiva la enumeración de $\mathbb{Q}$, del dominio de f_n queda dividido en dos conjuntos complementarios:

$$A = \{r_i \mid r_i < r_{n+1}, \quad i = 0,1,\ldots,n\}.$$

$$B = \{r_i \mid r_i > r_{n+1}, \quad i = 0,1,\ldots,n\}.$$

Como $A < B$ y los dos son finitos, también $f_n(A)$ y $f_n(B)$ son finitos y $f_n(A) < f_n(B)$ por ser f_n un isomorfismo de orden; siendo E un η_o-conjunto, existe al menos un elemento t_{n+1} de E con $f_n(A) < \{t_{n+1}\} < f_n(B)$. Definamos

$$f_{n+1} = f_n \cup \{(r_{n+1}, t_{n+1})\};$$

entonces f_{n+1} es un isomorfismo de orden de $\{r_o, r_1, \ldots, r_n, r_{n+1}\}$ sobre $\{t_o, \ldots, t_n, t_{n+1}\}$. El principio de inducción nos permite concluir que para todo m natural, existen $\{t_o, t_1, \ldots, t_m\}$ y f_m tales que f_m es un isomorfismo de orden de $\{r_o, r_1, \ldots, r_m\}$ *sobre* $\{t_o, \ldots, t_m\}$ y en forma tal que $f_o \subset f_1 \subset f_2 \subset \cdots \subset f_n \subset f_{n+1} \subset \cdots$

Sea $f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$; es fácil ver que f es una función inyectiva (ver p.ej. [4] p.140) y tiene por dominio $\mathcal{D}(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(f_n) = \mathbb{Q}$, quedando demostrado el teorema; como consecuencia inmediata tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 3. El conjunto $(\mathbb{R},<)$ de los números reales ordenados, puede sumergirse inyectivamente en cualquier conjunto superdenso.

Demostración. Sea $(E,<)$ un conjunto superdenso; siendo en particular un η_o-conjunto, contiene una copia $t_o < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots$ de $(\mathbb{Q},<)$, es decir, existe $f:(\mathbb{Q},<) \to (E,<)$ inyectiva que preserva el orden; extendámosla a una función $\bar{f}$ de $(\mathbb{R},<)$ en $(E,<)$ que sea isomorfismo de orden: Sea $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ y consideremos la cortadura que define a x:

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}, \qquad B = \{r \in \mathbb{Q} \mid x < r\}.$$

Como A y B son contables y $A < B$, entonces $f(A)$ y $f(B)$ son contables y $f(A) < f(B)$ por ser f un isomorfismo de orden, luego por la superdensidad de E, existe t en E tal que $f(A) < \{t\} < f(B)$. Si definimos $\bar{f}(x) = t$ (y $\bar{f}(r) = f(r)$ para r en $\mathbb{Q}$), entonces $\bar{f}$ será el isomorfismo de orden buscado.

COROLARIO: Si $(E,<)$ es superdenso, entonces su cardinal, $|E|$, será mayor o igual que c $(=|\mathbb{R}|)$.

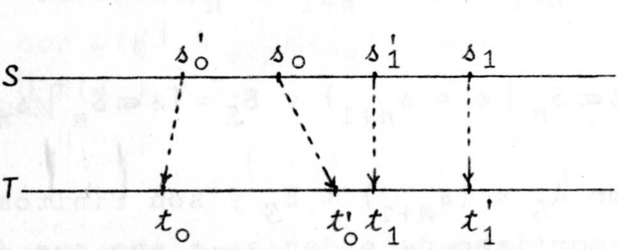
Después de las ideas anteriores que entrelazan los conceptos introducidos e ilustran una forma de construir isomorfismos no necesariamente sobreyectivos, presentamos el primer resultado fundamental, debido a Cantor (ver [1]):

TEOREMA 4. Todos los η_0-conjuntos de cardinal $\aleph_0$ son isomorfos.

Demostración. Sean $(S,<)$ y $(T,<)$ dos η_0-conjuntos de cardinal $\aleph_0$; debemos demostrar la existencia de un isomorfismo de orden $f:(S,<)\to(T,<)$ sobreyectivo. Lo construiremos inductivamente usando la técnica del vaivén.

Sean $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ enumeraciones biyectivas de S y T respectivamente.

Mostraremos que *para todo n natural* existen subconjuntos $\{s'_0, s'_1, \ldots, s'_n\}$ de S, $\{t'_0, t'_1, \ldots, t'_n\}$ de T, y una función f_n que es un isomorfismo de orden de $S_n = \{s_0, \ldots, s_n, s'_0, \ldots, s'_n\}$ sobre $T_n = \{t_0, \ldots, t_n, t'_0, \ldots, t'_n\}$ y en forma tal que $f_{n-1} \subseteq f_n$.



i) Consideremos $s_0 \in S$; tomemos en T un punto cualquiera y llamémoslo t'_0; consideremos $t_0 \in T$;

si $t_o = t'_o$, definamos $s'_o = s_o$; si $t_o < t'_o$, tomemos en S un punto s'_o con $s'_o < s_o$ (si $t'_o < t_o$, se escoge en S un punto s'_o con $s_o < s'_o$). Sea $f_o = \{(s_o, t'_o), (s'_o, t_o)\}$; este es un isomorfismo de orden de $S_o = \{s_o, s'_o\}$ sobre $T_o = \{t_o, t'_o\}$ tal que $f_o(s_o) = t'_o$ y $f_o(s'_o) = t_o$.

En el siguiente paso se construye f_1, como ilustramos en el gráfico adjunto (p.157), $f_1 : S_1 = \{s_o, s_1, s'_o, s'_o\} \to T_o = \{t_o, t_1, t'_o, t'_1\}$ tal que $f_o \subset f_1$ y $f_1(s_i) = t'_i$, $f_1(s'_i) = t_i$ para $i = 0,1$.

ii) Supongamos que se han construído $\{s'_o, \ldots, s'_n\}$, $\{t'_o, \ldots, t'_n\}$ y f_n: $S_n = \{s_o, \ldots, s_n, s'_o, \ldots, s'_n\} \to T_n = \{t_o, \ldots, t_n, t'_o, \ldots, t'_n\}$ siendo f_n un isomorfismo de orden que extiende a f_{n-1} y tal que $f_n(s_i) = t'_i$, $f_n(s'_i) = t_i$ para todo $i = 0,1,\ldots,n$.

Consideremos s_{n+1}; si $s_{n+1} \in S_n$, definimos $t'_{n+1} = f_n(s_{n+1})$. Si $s_{n+1} \notin S_n$, formamos

$$A_S = \{s \in S_n \mid s < s_{n+1}\} \text{ y } B_S = \{s \in S_n \mid s_{n+1} < s\}.$$

Como $A_S < \{s_{n+1}\} < B_S$ y son finitos, al ser f_n un isomorfismo de orden se tiene que $f_n(A_S) < f_n(B_S)$; siendo estos dos subconjuntos de T finitos y T un η_o-conjunto, existe $t'_{n+1} \in T$ tal que $f_n(A_S) < \{t'_{n+1}\} < f_n(B_S)$.

Sea $g_n = f_n \cup \{(s_{n+1}, t'_{n+1})\}$; es evidente que g es un isomorfismo de orden que extiende a f_n. Consideremos ahora t_{n+1}, si $t_{n+1} \in T_n \cup \{t'_{n+1}\} = \bar{T}_n$, definimos $s'_{n+1} = g_n^{-1}(t_{n+1})$. Si $t_{n+1} \notin \bar{T}_n$, sean

$$A_T = \{t \in \bar{T}_n \mid t < t_{n+1}\} \text{ y } B_T = \{t \in \bar{T} \mid t_{n+1} < t\}$$

Como $A_T < \{t_{n+1}\} < B_T$ entonces $g_n^{-1}(A_T) < g_n^{-1}(B_T)$ y siendo finitos y S un η_o-conjunto, existe $s'_{n+1} \in S$ tal que $g_n^{-1}(A_T) < \{s'_{n+1}\} < g_n^{-1}(B_T)$.

Definimos $f_{n+1} = g_n \cup \{(s'_{n+1}, t_{n+1})\}$ y según lo anterior f_{n+1} extiende a f_n.

El principio de inducción nos permite concluir que existe una sucesión creciente de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que son isomorfismos parciales (de subconjuntos de S sobre subconjuntos de T) de orden. Sea $f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$; igual que en el Teorema 2 f es un isomorfismo de orden que extiende todas las f_n, con $\mathcal{D}(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(f_n) = S$ y $\mathcal{R}(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}(f_n) = T$.

§3. ISOMORFISMOS ENTRE η_1-CONJUNTOS.

La técnica empleada en la demostración, llamada del vaivén por ir pasando de S a T y de T a

S en la construcción, puede adaptarse para construir isomorfismos entre estructuras no contables, para lo cual recordaremos algunas propiedades elementales de la teoría de conjuntos.

Un número ordinal es un conjunto transitivo (todos sus elementos son subconjuntos de él) que es bien ordenado por la pertenencia, es decir, cuyo orden "<" coincide con "$\in$". Por ejemplo ϕ, $\{\phi\}$, $\{\phi,\{\phi\}\}$, son números ordinales notados 0,1,2, respectivamente. Con esta definición de número natural ($n+1 = \{0,1,\ldots,n\}$) los naturales serán los ordinales finitos. Se acostumbra notar por ω al primer ordinal infinito ($\omega = \{0,1,2,\ldots\} = \mathbb{N}$) y por ω_1 al primer ordinal no contable; esto significa en particular que si α es un ordinal y $\alpha < \omega_1$ (o sea $\alpha \in \omega_1$), entonces α es un ordinal contable. Hay muchos ordinales contables, como ω, $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3,\ldots,\omega+\omega,\ldots$ Todo ordinal α tiene sucesor inmediato notado $\alpha+1$ pero no todo ordinal tiene predecesor inmediato (por ejemplo ω y ω_1 no lo tienen).

Un número cardinal es un ordinal que no es equipotente con ningún ordinal menor; por ejemplo $0,1,2,\ldots,\omega$ y ω_1 son cardinales pero $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+\omega$, ω_1+1, no lo son. Se acostumbra notar por $\aleph_0$ y $\aleph_1$ a ω y ω_1 respectivamente cuando se les considera como cardinales. Así $\aleph_0$ será el primer cardinal infinito y $\aleph_1$ será el segundo, el cardinal que le sigue a $\aleph_o$. Como $c = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_o} > \aleph_o$ (ver [4] p.259) se deduce que $c \geqslant \aleph_1$. El corolario del Teorema 3 anterior significa entonces que si E es superdenso, $|E| \geqslant c \geqslant \aleph_1$.

Debido a que todos los números ordinales (y en particular los cardinales) son bien ordenados, en todos ellos vale el principio de inducción transfinita:

Un subconjunto A de un conjunto bien ordenado $(X,<)$ tal que $(\forall u \in X)(\{x \in X \mid x < u\} \subseteq A \rightarrow u \in A)$, necesariamente es todo X $(A = X)$.

Es decir, si cualquiera sea u, del hecho de que todos los predecesores estrictos de u están en A se deduce que también u está en A, se concluye que A es todo X.

La demostración de este principio es muy simple (ver [4] p.166), lo usaremos en la prueba del siguiente resultado, debido a Hausdorff (ver [3]).

TEOREMA 5. Todos los conjuntos superdensos de cardinal $\aleph_1$ son isomorfos.

Demostración. Sean $(S,<)$ y $(T,<)$ conjuntos superdensos de cardinal $\aleph_1$; debemos demostrar que existe una biyección entre ellos que conserva el orden.

Decir que tienen cardinal $\aleph_1$ significa que son equipotentes con ω_1, de manera que existen biyecciones $h_1 : \omega_1 \to S$, $h_2 : \omega_1 \to T$. Si $h_1(\alpha) = s_\alpha$ y $h_2(\alpha) = t_\alpha$, entonces

$$S = \{s_o, s_1, s_2, \ldots, s_\omega, s_{\omega+1}, \ldots\}$$

$$= \{s_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} = \{s_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} \quad \text{y}$$

$$T = \{t_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} = \{t_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} = \{t_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$$

Sea A el conjunto de los β de ω_1 para los cuales existen familias $\{s'_i\}_{i\leqslant\beta}$, $\{t'_i\}_{i\leqslant\beta}$ y una biyección f_β de $S_\beta = \{s_i\}_{i\leqslant\beta} \cup \{s'_i\}_{i\leqslant\beta}$ sobre $T_\beta = \{t_i\}_{i\leqslant\beta} \cup \{t'_i\}_{i\leqslant\beta}$ tal que $f_\beta(s_i) = t'_i$, $f_\beta(s'_i) = t_i$ y f_β extiende todas las f_γ con $\gamma < \beta$.

Queremos demostrar que $A = \omega_1$ para lo cual es suficiente ver que A satisface la hipótesis del principio de inducción transfinita. Supongamos entonces que para α fijo cualquiera de ω_1, $\{\beta \in \omega_1 \mid \beta < \alpha\} \subseteq A$ y probemos que $\alpha \in A$. En efecto: la hipótesis significa que $\forall\beta < \alpha$, tanto $\{s'_o, s'_1, \ldots, s'_\beta\}$ como $\{t'_o, \ldots, t'_\beta\}$ están definidos y se tienen funciones f_β que son ismorfismos de orden entre S_β y T_β. Sea $\varphi = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$ la unión de todos estos isomorfismos; también φ es un isomorfismo de orden entre su dominio,

$$\bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta = \{s_i\}_{i<\alpha} \cup \{s'_i\}_{i<\alpha}$$

y su recorrido

$$\bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta = \{t_i\}_{i<\alpha} \cup \{t'_i\}_{i<\alpha};$$

además φ extiende todas las f_β y en consecuencia $\varphi(s_i) = t'_i$ y $\varphi(s'_i) = t_i$, $\forall i < \alpha$. Veamos que se pueden definir s'_α, t'_α y f_α de manera que se cumplan las condiciones exigidas:

a) Si $s_\alpha \in \{s'_i\}_{i<\alpha}$, por ejemplo $s_\alpha = s'_j$, definimos $t'_\alpha = \varphi(s'_j)$.

b) Si $s_\alpha \notin \{s'_i\}_{i<\alpha}$, descomponemos $\{s_i\}_{i<\alpha} \cup \{s'_i\}_{i<\alpha}$ en dos subconjuntos complementarios A_S, B_S en forma tal que $A_S < \{s_\alpha\} < B_S$. Como φ es un isomorfismo de orden, $\varphi(A_S) < \varphi(B_S)$. Pero $\{s_i\}_{i<\alpha} = \{s_i\}_{i\in\alpha}$ es contable ya que siendo $\alpha \in \omega_1$, o sea $\alpha < \omega_1$, y siendo ω_1 el primer ordinal no contable, se deberá tener α contable. Análogamente $\{s'_i\}_{i<\alpha}$, $\{t_i\}_{i<\alpha}$ y $\{t'_i\}_{i<\alpha}$ son contables y en consecuencia $\{s_i\}_{i<\alpha} \cup \{s'_i\}_{i<\alpha}$ y sus subconjuntos A_S y B_S son contables. Se deduce que $\varphi(A_S)$ y $\varphi(B_S)$ son contables, luego por la superdensidad de T, existe un elemento t'_α, tal que $\varphi(A_S) < \{t'_\alpha\} < \varphi(B_S)$.

Tomemos $\bar{\varphi} = \varphi \cup \{(s_\alpha, t'_\alpha)\}$.

c) Si $t_\alpha \in \{t'_i\}_{i<\alpha} \cup \{t'_\alpha\}$, definimos s'_α como $\bar{\varphi}^{-1}(t_\alpha)$.

d) Si $t_\alpha \notin \{t'_i\}_{i\leq\alpha}$, descomponemos $\{t_i\}_{i<\alpha} \cup \{t'_i\}_{i\leq\alpha}$ en dos subconjuntos complementarios A_T, B_T, tales que $A_T < \{t_\alpha\} < B_T$.

De lo dicho en b) se deduce que también A_T y B_T son contables y como $\bar{\varphi}$ es un isomorfismo de orden, $\bar{\varphi}^{-1}(A_T) < \bar{\varphi}^{-1}(B_T)$. Por la superdensidad de S, existe $s'_\alpha \in S$ tal que $\bar{\varphi}^{-1}(A_T) < \{s'_\alpha\} < \bar{\varphi}^{-1}(B_T)$. Definamos $f_\alpha = \bar{\varphi} \cup \{(s'_\alpha, t_\alpha)\}$; en esta forma también α está en A, luego $A = \omega_1$, es decir, para todo α en ω_1 existen f_α y los conjuntos S_α, T_α que satisfacen las condiciones pedidas.

Sea $f = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} f_\alpha$; entonces f es un isomorfismo de orden de $\mathcal{D}(f) = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \mathcal{D}(f_\alpha) = \{s_i\}_{i<\omega_1} = S$ sobre $T = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \mathcal{R}(f_\alpha)$ quedando demostrado lo propuesto.

COROLARIO 1. Bajo la hipótesis del continuo ($c = \aleph_1$), todos los conjuntos superdensos de cardinal c son isomorfos.

COROLARIO 2. Bajo la hipótesis del continuo, todos los conjuntos superdensos de cardinal c son isomorfos a $(\mathbb{R}^*, <)$.

Basta ver que $|\mathbb{R}^*| = c$; su demostración es simple y puede verse por ejemplo en [5], p.35.

F. Hausdorff (ver [3]) generalizó las ideas anteriores con la introducción de los η_α-conjuntos y la prueba de los dos resultados siguientes:

- Dos η_α-conjuntos de cardinal $\aleph_\alpha$, son isomorfos.
- Todo conjunto totalmente ordenado de cardinal $\leq \aleph_\alpha$, puede sumergirse inyectivamente en un η_α-conjunto de cardinal $\aleph_\alpha$.

En una dirección similar pero más compleja, se tiene el siguiente

TEOREMA 6. Todos los *cuerpos ordenados* superdensos de cardinal $\aleph_1$, son isomorfos.

Su demostración también se hace por inducción transfinita, usando bases de $\mathbb{R}$ trascendentes sobre $\mathbb{Q}$ y densas. El lector interesado puede consultar [2].

§4. EL METODO DEL VAIVEN.

La situación planteada y resuelta en los teoremas 4 y 5, ha sido en líneas generales la siguiente: Se desea construir un isomorfismo de una estructura $(S,<)$ sobre otra $(T;<)$, las dos con el mismo cardinal. Para lograrlo se constru-ye una familia $(f_\beta)_{\beta<\aleph_\alpha}$ de isomorfismos parcia-les con las características siguientes:

a) Si $\beta < \beta'$ entonces $f_\beta \subseteq f_{\beta'}$

b) $\bigcup_\beta \mathcal{D}(f_\beta) = S$ y c) $\bigcup_\beta \mathcal{R}(f_\beta) = T$

Se concluye que en tal caso $\bigcup_\beta f_\beta$ es el isomorfismo pedido. Vamos a tratar de plantear una situación similar cuando se poseen familias de isomorfismos parciales entre estructuras más generales.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ estructuras del mismo tipo, es decir adecuadas para el mismo lenguaje lógico; intuitivamente esto significa que poseen la misma cantidad de relaciones unarias, binarias,..., el mismo número de operaciones unarias, binarias,... e igual cantidad de constantes. Si

$$\mathcal{A} = (A, <, +, \cdot, e, \ldots)$$

$$\mathcal{B} = (B, <^*, +^*, \cdot^*, e^*, \ldots).$$

Decimos que A y B son los universos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. Nótese que lo anterior no significa que las dos estructuras posean las mismas propiedades.

Diremos que $\mathcal{S}$ es una subestructura de $\mathcal{A}$ si siendo una estructura del mismo tipo que $\mathcal{A}$, o sea $\mathcal{S} = (S, \hat{<}, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{c}, \ldots)$, se tiene que a) $S \subseteq A$. b) Las relaciones y operaciones de $\mathcal{S}$ son las restricciones a S de las relaciones y operaciones de $\mathcal{A}$ y c) las constantes de $\mathcal{S}$ son las mismas de $\mathcal{A}$.

Nótese nuevamente que una propiedad que vale en $\mathcal{A}$, no necesariamente es válida en $\mathcal{S}$, y recíprocamente. Por ejemplo $(\{0,1,2\};<)$ es una subestructura de $(\mathbb{R},<)$ pero la primera es bien ordenada y la segunda no, mientras que el orden de la segunda es denso y no así el de la primera. Análogamente, una subestructura de un grupo no necesariamente es un grupo. Llamaremos a f un isomorfismo parcial de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ si f es un isomorfismo de una subestructura de $\mathcal{A}$ sobre otra de $\mathcal{B}$. Lo anterior significa que f es una biyección entre los universos de las subestructuras compatible con las operaciones y relaciones, que aplica las constantes de una subestructura en las correspondientes de la otra. Por ejemplo si R es una relación enearia de la primera subestructura y R^* su correspondiente en la segunda, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ están en el universo de la primera y $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$, entonces $(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^*$.

Diremos que una familia $\mathcal{F}$ de isomorfismos de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ posee la *propiedad del vaivén*, si no es vacía y tal que

i) Para todo $f \in \mathcal{F}$ y toda $a \in A$, existe en $\mathcal{F}$ una extensión g de f tal que $a \in \mathcal{D}(g)$.

ii) Para toda f de $\mathcal{F}$ y toda $b \in B$, existe en $\mathcal{F}$ una extensión f^* de f tal que $b \in \mathcal{R}(f^*)$.

TEOREMA 7. Si existe una familia $\mathcal{F}$ de isomorfismos parciales de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ que posee la propiedad del vaivén y $|A| = \aleph_0 = |B|$, entonces $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son isomorfos.

La demostración es muy similar a la del Teorema 4; se enumeran los universos de las dos estructuras y se usa la propiedad del vaivén para formar una cadena $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de isomorfos parciales que posea las propiedades a), b) y c) descritas al comienzo del §4. No la detallaremos para no repetir argumentos.

Si observamos cuidadosamente la demostración del Teorema 5, nos damos cuenta de que el paso crucial es el hecho que la unión de la cadena $(f_\beta)_{\beta<\alpha}$ con $\alpha < \omega_1$, es aún un isomorfismo de orden que pertenece a la familia $\mathcal{F}$ de isomorfismos parciales. Lo mismo sucede en las generalizaciones establecidas por Hausdorff para los η_α-conjuntos. Para estructuras arbitrarias, no siempre se cumple la mencionda propiedad, de manera que si deseamos generalizar el Teorema 7, es necesario adicionarla:

TEOREMA 8. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ estructuras del mismo tipo con $|A| = \aleph_\alpha = |B|$; si existe una familia $\mathcal{F}$ de isomorfismos parciales de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ que posee la propiedad del vaiven y tal que la unión de toda cadena $(f_\beta)_{\beta\in L}$ con $|L| < \aleph_\alpha$, también está en $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{A}$ es isomorfa a $\mathcal{B}$.

Demostración. Sean $h_1 : \aleph_\alpha \to A$ y $h_2 : \aleph_\alpha \to B$ enumeraciones biyectivas de A y B; si notamos por a_β a $h_1(\beta)$ y por b_β a $h_2(\beta)$, tenemos:

$$A = \{a_\beta | \beta \in \aleph_\alpha\} = \{a_\beta\}_{\beta\in\aleph_\alpha} = \{a_\beta\}_{\beta<\aleph_\alpha}$$

y análogamente,

$$B = \{b_\beta\}_{\beta\in\aleph_\alpha} = \{b_\beta\}_{\beta<\aleph_\alpha} .$$

Usando argumentos conocidos, se tiene que para $a_o \in A$ y cualquier $g \in \mathcal{F}$, existe $\bar{g} \in \mathcal{F}$ que extiende a g y a_o pertenece a su dominio; para $\bar{g}$ y b_o, existe por ii) un isomorfismo parcial f_o que extiende a $\bar{g}$ con $b_o \in \mathcal{R}(f_o)$. La idea es continuar indefinidamente el proceso para obtener una cadena $(f_\beta)_{\beta<\aleph_\alpha}$ de extensiones. Esto se puede hacer rigurosamente usando inducción transfinita.

Como $\aleph_\alpha$ es un cardinal, es decir un ordinal no equipotente con un ordinal menor, es bien ordenado, siendo "<" precisamente "$\in$". Vamos a probar que el subconjunto de $\aleph_\alpha$ de los ordinales β para los cuales está definida f_β con $a_\beta \in \mathcal{D}(f_\beta)$, $b_\beta \in \mathcal{R}(f_\beta)$ y $f_\nu \subseteq f_\beta$ para todo $\nu < \beta$, es precisamente todo $\aleph_\alpha$.

Supongamos que para todo $j < \beta$ está definida f_j con $f_j \in \mathcal{F}$ y tal que $a_j \in \mathcal{D}(f_j)$, $b_j \in \mathcal{R}(f_j)$ y $\forall i < j$ $(f_i \subseteq f_j)$. Demostremos que es posible definir f_β con las mismas característi̲ticas.

Sea $\mathcal{G} = \bigcup_{j<\beta} f_j$; evidentemente $\mathcal{G}$ extiende todas las f_j y puede comprobarse que es compati̲ble con las operaciones, relaciones y constantes de su dominio; por ejemplo si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ y $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$ (siendo R una relación enearia), entonces $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \bigcup_{j<\beta} \mathcal{D}(f_j)$ y en consecuencia existen en $\mathcal{F}$ isomorfismos par̲ciales f_{j_k}, $k = 1, 2, \ldots, n$, tales que $a_1 \in \mathcal{D}(f_{j_1}), a_2 \in \mathcal{D}(f_{j_2}), \ldots, a_n \in \mathcal{D}(f_{j_n})$; si m es el máximo de $j_1, j_2, \ldots, j_k$, entonces $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{D}(f_m)$ ya que f_m es una de las f_{j_k} que extiende a las demás. En consecuencia $(f_m(a_1), f_m(a_2), \ldots, f_m(a_n)) \in R^*$ por ser f_m un isomorfismo parcial, o sea $(\mathcal{G}(a_1), \mathcal{G}(a_2), \ldots, \mathcal{G}(a_m)) \in R^*$ puesto que $\mathcal{G}$ extiende a f_m.

Sin embargo, el solo hecho de ser φ un isomorfismo parcial, no nos garantiza que pertenezca a $\mathcal{F}$, por lo cual la necesidad de la hipótesis adicional.

Estando φ en $\mathcal{F}$, para a_β existe por i) una función $\bar{\varphi}$ que extiende a φ y tal que $a_\beta \in \mathcal{D}(\bar{\varphi})$; por ii) existe para b_β una función f_β en $\mathcal{F}$ que extiende a $\bar{\varphi}$ con b_β en su recorrido. El principio de inducción trasfinita nos permite concluir que existe una cadena de extensiones $(f_\beta)_{\beta<\aleph_\alpha}$ con las propiedades requeridas. Si $f = \bigcup_{\beta<\aleph_\alpha} f_\beta$, al igual que antes $f \in \mathcal{F}$ y evidentemente su dominio es todo $\{a_\beta\}_{\beta<\aleph_\alpha}$ o sea A y su recorrido B, con lo cual se completa la demostración del teorema.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Cantor, G., *Contributions of the founding of the Theory of transfinite numbers*, Dover P.C., 1915, New York (Traducción del original en alemán publicado en 1895).

[2] Gillman, L. and Jerinson, M., *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, Princeton, 1960.

[3] Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914 (Reprinted by Chelsea P.C, New York, 1949).

[4] Muñoz, J.M., *Introducción a la Teoría de Conjuntos*, Univ. Nal. de Col., Bogotá, 1983.

[5] Takeuchi, Y., "Análisis no estándar I, Conjuntos generados", Matemática, enseñanza universitaria. Nº 35, Junio de 1985.

* *

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia.
BOGOTA. D.E.