GEOMETRIAS NO EUCLIDEANAS EN EL PLAN INEM

por

AGUSTIN PEREZ REPIZO

INTRODUCCION.

En el amplio panorama que se ha planteado en el desarrollo de la matemática para los Institutos Nacionales de Enseñanza Media Diversificada, encontramos a la altura del décimo semestre, con el nombre de Matemática 10 el contenido del programa específico que a la letra dice :

Concepto. Trata de las ideas básicas sobre Espacios Vectoriales de dos y tres dimensiones; el plano euclideano, el espacio euclideano de tres dimensiones; la ecuación general de segundo grado con dos variables; el producto vectorial y geometrías no euclideanas.

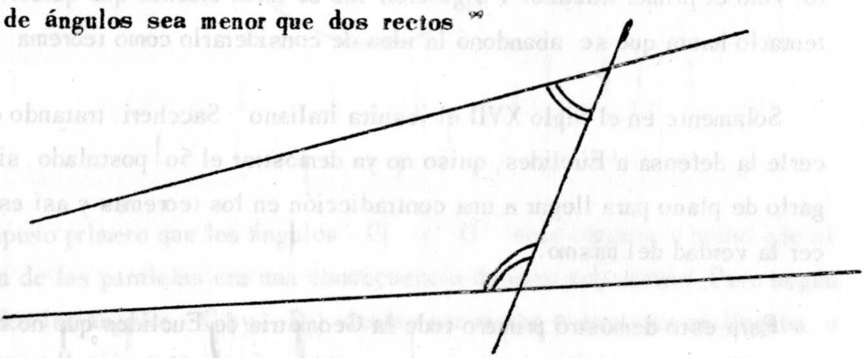
Como estas tres últimas ~~palabras~~ constituyen un tema bastante extenso, muy controvertido por más de dos mil años y como no aparecieran en los temas los tópicos que deberían tratarse a este respecto, se convino en que debía darse a los estudiantes una información general de tipo histórico, para llevar a su conocimiento el contenido del problema y ver en qué condiciones se podrían dar algunas soluciones. Es este el sentido de la corta charla -mal llamada conferencia- que vamos a tener ahora.

CONOCIMIENTO EMPIRICO

El común sentir de los comentaristas actuales es el de que la Geometría de Euclides se obtuvo de la experiencia y esta afirmación es en parte verdadera. Los geómetras helénicos tomaron como fuentes de información las experiencias egipcias, muy importantes respecto a la medida, puesto que el Río Nilo borraba periódicamente sus posesiones que debían construir y Pitágoras llegó hasta hacerse sacerdote egipcio para arrancarles sus secretos científicos, al par que Thales de Mileto no solamente captó sus conocimientos sino que deslumbró a los egipcios con sus grandes descubrimientos. Pero Euclides que recopiló toda la geometría de su tiempo, la sistematizó y creó la ciencia axiomática, fue mucho más allá de las aprehensiones empíricas, como puede verse en dos de sus postulados que son de naturaleza muy distinta de los otros tres.

Los enunciados son los siguientes :

"Toda recta puede prolongarse indefinidamente por ambos extremos" (es decir, es infinita en su extensión), y el famoso 5o. postulado que presentó en la forma " si una recta, que corta a otras dos, forma del mismo lado ángulos internos cuya suma sea menor que dos rectos, las dos últimas rectas prolongadas indefinidamente, se cortan del lado en que la suma de ángulos sea menor que dos rectos "



A éstos enunciados se observa :

1o. Que ambos incluyen un concepto del infinito y que por consiguiente están fuera de toda experiencia.

2o. Que Euclides elude el enunciar el postulado de las paralelas en la forma que se conoce comunmente a saber : " Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una y solo una parálela".

3o. Que el enunciado original es laborioso - aunque mucho menos que otros múltiples axiomas modernos - y que esto implica cierta dificultad en la formulación de los términos de los que podría no estar muy seguro.

Es de notar también que en el desarrollo de su teoría no utilizó su postulado sino muy avanzada su obra y más bien forzado por las circunstancias.

Todas estas consideraciones indujeron a los primeros investigadores a pensar que se trataba más bien de un teorema y principiaron los intentos por demostrarlo. Es decir, se pensó que el postulado no era independiente de los otros y que por tanto podría deducirse de los cuatro primeros.

Uno de los comentaristas que hizo probar el teorema fue Proclo (Siglo V de nuestra era), quien intentó hacer caso omiso del axioma de las paralelas, definiendo estas como lugares geométricos situados a una distancia dada. Pero esto es lo mismo que reemplazar un axioma por otro equivalente y por tanto, vino el primer frazazo. Y siguieron los de otros muchos que quisieron intentarlo hasta que se abandonó la idea de considerarlo como teorema.

Solamente en el Siglo XVII el jesuíta italiano Saccheri, tratando de hacerle la defensa a Euclides, quiso no ya demostrar el 5o. postulado, sino negarlo de plano para llegar a una contradicción en los teoremas y así establecer la verdad del mismo.

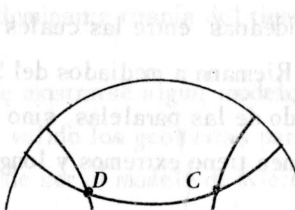
Para esto demostró primero toda la Geometría de Euclides que no necesita el 5o. postulado, luego añadió otras consideraciones lógicas a lo expuesto por Euclides y por último quiso probar que las adiciones eran falsas, pero al intentar esto, iban resultando teoremas tras teoremas y la contradicción no aparecía.

En realidad estaba construyendo una Geometría completamente lógica con un axioma opuesto al 5o. de Euclides

La obra de Sacheri que tituló " Euclides librado de toda culpa" , no logró del todo liberarlo, pero sin proponérselo realizó el primer intento serio de una geometría Euclideana.

Por estar fuera de moda el trabajo se Saccheri quedó en el olvido hasta que un siglo más tarde, Beltrami otro matemático italiano, revaluó el contenido científico de la obra.

Uno de los métodos de Saccheri consistió en tomar un cuadrilátero birrectángulo isósceles ABCD con ángulos A y B rectos y lados AD y BC iguales.



Supuso primero que los ángulos C y D eran obtusos y probó que el axioma de las paralelas era una consecuencia de esta suposición. Pero según Euclides los ángulos C y D, debían ser rectos y entonces se llegaba a una contradicción.

Supuso luego que los ángulos en D y C fueran agudos y esperó llegar a una contradicción pero no logró alcanzarla y arguyó en forma tal, que sus razones no fueron convincentes , y desde luego, no podían serlo. Pero el problema estaba planteado y las investigaciones siguieron por parte del ya mencionado Beltrami , del alemán Gauss, del húngaro Bolyai y del ruso Lobachevski, todos los cuales trabajaron separadamente, pero todos concibieron la idea de reemplazar el axioma de Euclides por el de que por un punto exterior a una recta, puede trazarse más de una paralela.

geometría Euclideana.

Los trabajos de estos investigadores desembocaron en la creación de la Geometría hiperbólica o lobachevskiana, llamada así en honor de su más prolífico divulgador en el Siglo XIX, puesto que Bolyai fue muy parco en sus publicaciones y Gauss muy cauto en la presentación de sus resultados, por el temor de perder su gran prestigio alcanzado.

Una vez que la geometría hiperbólica alcanzó su madurez, aparecieron otras geometrías no euclideanas, entre las cuales se encuentra la geometría elíptica desarrollada por Riemann a mediados del Siglo XIX, quien rompió no solamente con el postulado de las paralelas, sino con el de infinitud de la recta, afirmando que toda línea tiene extremos y longitud finita.

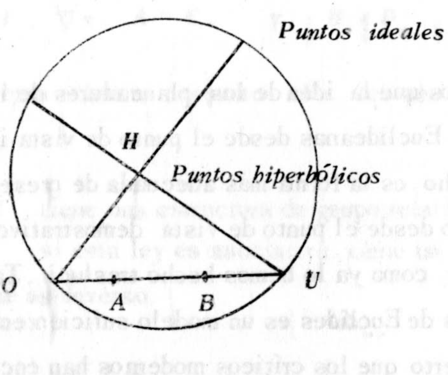
Posteriormente, en los albores del Siglo XX, el alemás Félix Klein, hizo avances en el mismo sentido y creó otra geometría elíptica con ciertas peculiaridades distintivas de las de Riemann.

De los estudios anteriores resultó también una geometría parabólica en la cual dos rectas siempre se cortan aunque sean paralelas.

Una vez enunciadas las características en forma muy global de las geometrías no euclideanas, obtenemos: la geometría hiperbólica resulta cuando en una línea hay dos puntos infinitamente distantes llamados puntos ideales y por consiguiente dos paralelas a una misma línea por un punto exterior a ella; la geometría parabólica se obtiene cuando solamente hay en una línea un punto infinitamente distante y la geometría elíptica se presenta cuando no existen en una línea puntos infinitamente distantes y por consiguiente no hay paralelas. De las tres geometrías resulta una cuarta que las coordina a todas llamada proyectiva, que a decir de Klein, es toda la geometría.

Y de todo lo anterior, hay que decirlo con toda franqueza, resulta una con fusión de padre y señor mío porque inmediatamente surge el interrogante Por qué cuando y cómo se tienen estos aspectos totalmente contradictorios? Si un caso de estos es válido no serán falsos los demás ? La respuesta satisfactoria no puede ser inmediata porque partiendo de los teoremas de Menelao Ceva y Desargues con todas sus consecuencias hay que establecer toda la teoría de puntos y líneas armónicas en el plano y en el círculo las 24 razones dobles posibles entre elementos armónicos, la teoría completa de la inversión; los axiomas básicos de la proyectiva de las cónicas; la geometría proyectiva coordenada y la teoría de la transformación Es decir, todo un tratado de tópicos modernos que no se encuentra al alcance de la enseñanza media por la siempre dominante tiranía del tiempo.

No obstante, puede mostrarse algún modelo para poner de presente los artificios de que se han valido los geómetras para establecer sus nuevas teorías. Uno de ellos puede ser el modelo de Klein para el plano hiperbólico real. Este plano cuenta de los puntos interiores de un círculodado C y se llaman puntos hiperbólicos o puntos H. Las cuerdas del círculo se toman como modelos de líneas y se llaman líneas H. Los puntos exteriores al círculo se fingen ignorar.



Puesto que dos puntos interiores determinan una cuerda y puesto que dos cuerdas se intercectan en uno y solo un punto dos puntos H determinan una línea H y dos líneas H se cortan en un plano H-

Todos los axiomas de Euclides y los de Hilbert se cumplen en este mode lo, excepto el de las paralelas. La distancia en el modelo se da por la definición $d(AB) = c \log (OU, AB)$ en donde $C = 1$ y (OU, AB) significa una igualdad de razones. Los puntos O y U son puntos ideales de AB, o infinitamente distantes. Los puntos O y U son puntos ideales de AB, o infinitamente distantes. Todos los puntos ideales están en la circunferencia C. La línea es entonces un conjunto abierto y contínuo de puntos, en el cual se cumplen los axiomas de orden y los de continuidad.

Las paralelas se definen como líneas que se encuentran en puntos infinitamente distantes o puntos ideales.

Entonces las líneas XO y XU son paralelas a AB.

La presentación de este modelo, no obstante ser el más sencillo y que se tomó de la Geometría Moderna de Adler, muestra las dificultades que hay que vencer para hacer una materia completamente lógica.

CONCLUSIONES

Creemos que la idea de los planeadores de los INEM, de tratar las geometrías no Euclideanas desde el punto de vista informativo y global como lo hemos hecho, es la forma más adecuada de presentar el tópico, porque pretender hacerlo desde el punto de vista demostrativo, es meterse en camisa de once varas, como ya lo hemos hecho traslucir. También afirmamos que las Geometrías de Euclides es un modelo suficientemente formativo; porque si bien es cierto que los críticos modernos han encontrado ciertos lunares, con esto pasa lo que en los rostros de algunas damas, en los cuales los lunares y pecas realzan más bién que opacan su belleza.