DE LAS CATEGORIAS

por

JEAN LOIC BATUDE

§ 1. **Recordemos :**

Una aplicación f enviando a un conjunto A en un conjunto B

$$f: A \to B$$

será notada (A, f, B).

Por definición $(A, f, B) = (C, g, D)$ si y solo si $A = C$

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \quad A = C \quad \text{y} \quad B = D.$$

Una ley de composición interna sobre un conjunto E, es una aplicación $(E \times E, \pi, E)$.

Se dice que un conjunto E tiene una estructura de grupo relativamente a una ley $(E \times E, \pi, E)$ si esta ley es asociativa, tiene un elemento neutro y si cada elemento tiene un inverso.

§ 2. **Definiciones preliminares.**

Para evitar ciertos problemas de lógica, reemplazaremos la palabra conjunto por la palabra clase con la idea de que clase es un concepto más general que el de Conjunto.

Sea $\mathscr{C}$ una clase y S una subclase de $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$. Sea $(S, \pi, \mathscr{C})$ una aplicación. Notaremos $\pi(g, f) = g \circ f$; $g \cdot f$ se llama el compuesto de g por f. Entonces la aplicación $(S, \pi, \mathscr{C})$ determina una ley de composición parcialmente definida en $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}$ provista de esta ley, se llama clase multiplicativa.

Ejemplo : Consideramos la clase de las aplicaciones (A, f, B) entre conjuntos $\mathscr{E}$. Consideramos la subclase de $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$.

§ 4. Fuente, meta, flecha.

Proposición. Las unidades asociadas a un elemento f de una categoría son únicos.

Consecuencia. Notaremos las unidades a derecha y a izquierda de f por $e_d = \alpha(f)$ $e_i = \beta(f)$

$\alpha(f)$ se llama la fuente de f, $\beta(f)$ su meta.

Se dice que f es una flecha o un morfismo de fuente $\alpha(f)$ y de meta $\beta(f)$.

Podemos definir así dos aplicaciones $\alpha, \beta : C \to C_o$ que se llamará aplicación fuente y aplicación meta.

Propiedades de las aplicaciones fuente y meta.

(1.) α y β son epiyectivas

(2.) $\alpha / \mathscr{C}_o = \beta / \mathscr{C}_o = id\ \mathscr{C}_o$

(3.) $\alpha \circ \alpha = \beta \circ \alpha = \alpha$

$\alpha \circ \beta = \beta \circ \beta = \beta$

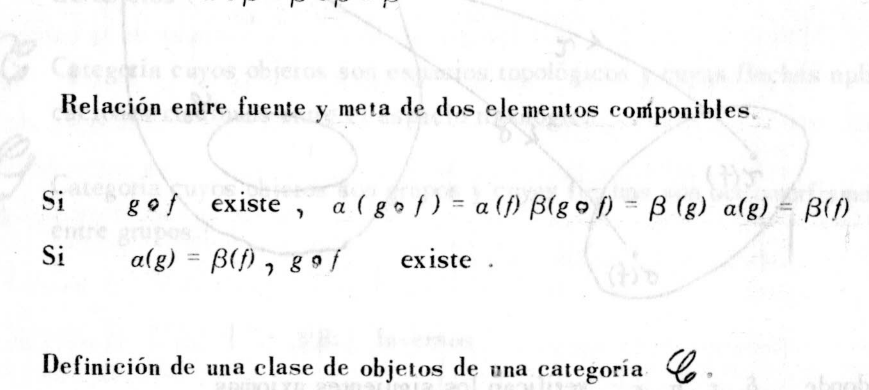
Relación entre fuente y meta de dos elementos componibles.

Si $g \circ f$ existe , $\alpha (g \circ f) = \alpha (f)\ \beta(g \circ f) = \beta (g)\ \ \alpha(g) = \beta(f)$

Si $\alpha(g) = \beta(f)$, $g \circ f$ existe .

Definición de una clase de objetos de una categoría $\mathscr{C}$.

Llamaremos así toda clase 0 tal que existe una biyección de 0 hacia $\mathscr{C}_o$



§ 5. Segundo punto de vista. Segunda definición de categorías.

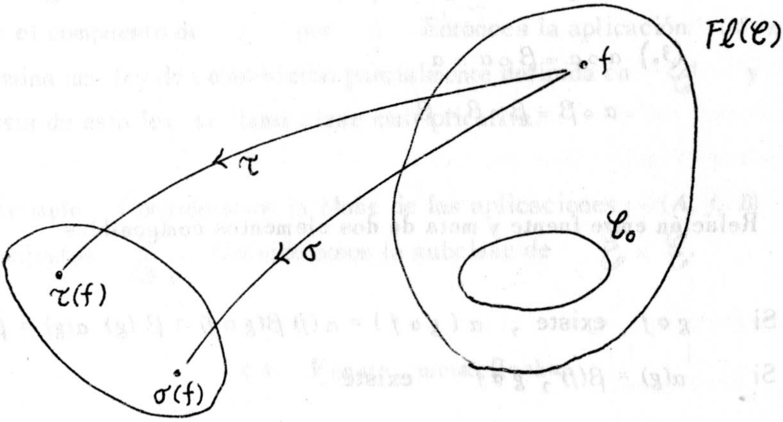
Se puede definir una categoría a partir de dos clases $Ob\ (\mathscr{C})$. $Fl(\mathscr{C})$ y de cuatro aplicaciones δ, τ, π, ϵ

δ τ envían $Fl\ (\mathscr{C})$ en $Ob\ (\mathscr{C})$

π envía $S = \{ (g\ \ f) \mid \delta (g) = \tau (f) \}$ en $Fl\ (\mathscr{C})$. Notamos

$$\pi\ (g \circ f) = g \circ f$$

ϵ envía $Ob(\epsilon)$ en $Fl(\mathcal{C})$



donde $\delta, \tau, \pi, \epsilon$ verifican los siguientes axiomas

$\mathcal{C}_1$ si $(g \,.\, f) \in S$, $\sigma(g \circ f) = \sigma(f)$ $\tau(g \circ f) = \tau(g)$

$\mathcal{C}_2$ si $h \,.\, (g \,.\, f)$ o $(h \,.\, g) \,.\, f$ existe el otro existe por $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ dice que son iguales.

$\mathcal{C}_3$ cualquiera sea $x \in Ob(\mathcal{C})$, $\sigma \circ E(x) = \tau \circ \epsilon(x) = x$

$\mathcal{C}_4$ para todo $f \in Fl(\mathcal{C})$ $f \,.\, [(\epsilon \circ \delta)(f)] = [(\epsilon \circ \tau)(f)] \circ f = f$.

§ 6. Teorema Fundamental.

Las definiciones $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ son equivalentes.

Notación. Notaremos $Hom(x, y)$ la clase de las flechas de fuente x y de meta y.

§ 7. Ejemplos.

$\mathscr{E}$ categoría cuyos objetos son espacios y cuyas flechas aplicaciones entre objetos.

$\mathscr{C}$ Categoría cuyos objetos son espacios topológicos y cuyas flechas aplicaciones contínuas entre el espacio topológico.

$\mathscr{G}$ Categoría cuyos objetos son grupos y cuyas flechas son homomorfismos entre grupos.

§ 8. Inversos

Se dice que una flecha f tiene un inverso a la derecha si existe una flecha g componible con f a la derecha tal que $f \circ g$ sea igual a la unidad a la izquierda de f, $\beta(f)$:

$$f \circ g = \beta(f).$$

De la misma manera se define un inverso a la izquierda.

Proposición. Si una flecha tiene un inverso a la derecha y un inverso a la izquierda, entonces los dos son iguales.

Una tal flecha es llamada isomorfismo.

§ 9. Objeto inicial.

Se dice que un objeto a de una categoría $\mathscr{C}$ es un objeto inicial si para todo $x \in Ob(\mathscr{C})$ $Hom(a, x)$ tiene solo un èlemento.

Proposición. Dos objetos iniciales son isomorfos.

§ 10. Funtores

Sean C y D dos categorías, un funtor covariante de la categoría C en la categoría D es dado por una aplicación de $Ob\,(C)$ en $Ob\,(D)$ y una aplicación de $Fl\,(C)$ en $Fl\,(D)$. Ambos se notan F porque la aplicación entre $Ob\,(C)$ y $Ob\,(D)$ es inducida por la aplicación entre $Fl\,(C)$ y $Fl\,(D)$ con las aplicaciones $\mathcal{E}_C, \mathcal{E}_D$.

F verifica los dos axiomas siguientes :

F_1 la fuente de la imagen es igual a la imagen de la fuente, la meta de la imagen es igual a la imagen de la meta.

F_2 La imagen de un compuesto es el compuesto de la imagen.