Boletín de Matemáticas
Vol. XX, Nº 1 (1986) **APORTES**

COMPLETADO SECUENCIAL DE R^*

Yu Takeuchi

RESUMEN. Se dice que un conjunto totalmente ordenado X es "*superdenso*" si dados A, B dos subconjuntos enumerables de X no simultáneamente vacíos con $A < B$ (esto es, $a < b$ para todo $a \in A$, $b \in B$) existe siempre $c \in X$ tal que $a < c < b$ para todo $a \in A$, y, para todo $b \in B$. Ver referencias [1], [5]. ▲

Una cortadura de $\mathbb{R}^*$ es una pareja (A,B) de subconjuntos de $\mathbb{R}^*$ tales que

$$A < B, \quad A \cup B = \mathbb{R}^*.$$

Decimos que la cortadura (A,B) es "*regular*" si para todo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ existen $a \in A$, $b \in B$ tales que

$$b - a < \varepsilon.$$

La cortadura (A,B) *no es regular* si existe $\varepsilon_o > 0$, $\varepsilon_o \in \mathbb{R}^*$ tal que

$$y - x \geqslant \varepsilon_o \text{ para "}todo\text{" } x \in A,\ y \in B.$$

Para las cortaduras de $\mathbb{R}^*$ se presentan los siguientes casos:

(i) A tiene máximo, o B tiene mínimo. El máximo de A (ó el mínimo de B) separa a A de B. La cortadura (A,B) es *regular*.

(ii) A es superdenso y B no es superdenso y no tiene elemento mínimo, ó, B es superdenso y A no es superdenso y no tiene elemento máximo. Se demuestra que la cortadura (A,B) *no es regular*.

(iii) A y B son superdensos y (A,B) *no es regular*. (Se construye un ejemplo de tal cortadura).

(iv) A y B son superdensos y (A,B) es *regular*. (Se construye un ejemplo de tal cortadura).

Sea $(\rho(\nu))_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ una hipersucesión *divergente* de Cauchy de elementos en $\mathbb{R}^*$, si

$$A = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \text{existe } \nu_o \text{ tal que } \tau < \rho(\nu) \text{ para todo } \nu > \nu_o\}.$$

$$B = \mathbb{R}^* - A = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \text{existe } \nu_o \text{ tal que } \rho(\nu) < \tau \text{ para todo } \nu > \nu_o\},$$

entonces (A,B) es una *cortadura regular* del tipo (iv). Recíprocamente, a una cortadura (A,B) del tipo (iv) le corresponde una hipersucesión divergente de Cauchy que la determina. Por lo tanto, la existencia de tal cortadura garantiza que "existen hipersucesiones divergentes de Cauchy en $\mathbb{R}^*$". ▲

Solamente las *cortaduras regulares* sirven para extender el cuerpo $\mathbb{R}^*$ a otro cuerpo más amplio en el que todas las hipersucesiones de Cauchy convergen. ▲

Sea $\bar{\mathbb{R}}^*$ la colección de todas las cortaduras *regulares*: tenemos entonces las siguientes propiedades:

(1) $\bar{\mathbb{R}}^*$ es un cuerpo ordenado que contiene a $\mathbb{R}^*$ como subcuerpo propio.

(2) $\mathbb{R}^*$ es denso en $\bar{\mathbb{R}}^*$.

(3) Dado $\tau \in \bar{\mathbb{R}}^*$ existe una hipersucesión de elementos de $\mathbb{R}^*$ que converge a τ.

(4) $\bar{\mathbb{R}}^*$ es superdenso.

(5) Toda hipersucesión de Cauchy converge en $\bar{\mathbb{R}}^*$.

(6) Una hipersucesión converge en $\bar{\mathbb{R}}^*$ si y sólo si ésta es de Cauchy.

(7) $\bar{\mathbb{R}}^*$ es un cuerpo *real cerrado*.

(8) $|\bar{\mathbb{R}}^*| > \not{c}$ (bajo la hipótesis del continuo).

Nota. En el presente artículo se supone siempre la hipótesis del continuo.

(9) Tenemos el siguiente teorema de isomorfismo:

Sea K un cuerpo ordenado tal que

(i) K posee un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}^*$, denso en K,

(ii) toda hipersucesión de Cauchy converge en K, entonces K es isomorfo a $\bar{\mathbb{R}}^*$. ▲

(10) $\bar{\mathbb{R}}^*$ es *algebraicamente completo*, o sea, no existe extensión propia de $\bar{\mathbb{R}}^*$ a un cuerpo ordenado en el cual $\bar{\mathbb{R}}^*$ sea denso.

§1. INTRODUCCION.

En la recta hiperreal $\mathbb{R}^*$ (ó el cuerpo de los números no-estándar) existen muchos "*huecos*" ó "*brechas*"; al llenar algunos de estos "huecos" se obtiene el cuerpo ordenado $\bar{\mathbb{R}}^*$ que satisface, entre otras, las siguientes propiedades:

(i) $\bar{\mathbb{R}}^*$ es una extensión propia de $\mathbb{R}^*$, algebraicamente completo (o sea que no existe extensión propia a un cuerpo ordenado en el cual $\bar{\mathbb{R}}^*$ sea denso).

(ii) $\bar{\mathbb{R}}^*$ es superdenso (ver resumen).

(iii) $\bar{\mathbb{R}}^*$ es un cuerpo real cerrado.

(iv) $\bar{\mathbb{R}}^*$ es secuencialmente cerrado, o sea, toda hipersucesión de Cauchy (Nota 1) converge en $\bar{\mathbb{R}}^*$.

(v) $|\bar{\mathbb{R}}^*| > \mathcal{C}$, bajo la hipótesis del continuo.

Nota 1. Una "*sucesión*" en $\mathbb{R}^*$ es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}^*$, y una hipersucesión en $\mathbb{R}^*$ es una función de $\mathbb{N}^*$ en $\mathbb{R}^*$, donde $\mathbb{N}^*$ es el conjunto de todos los *hipernaturales*. Decimos que una hipersucesión $\sigma:\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^*$ *es de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ existe $\nu_o \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\nu,\mu > \nu_o \quad \text{implica} \quad |\sigma(\nu)-\sigma(\mu)| < \varepsilon. \quad \blacktriangle$$

§2. CORTADURAS DE $\mathbb{R}^*$.

Una cortadura de $\mathbb{R}^*$ es una pareja (A,B) de subconjuntos de $\mathbb{R}^*$ tales que

$$A < B, \quad A \cup B = \mathbb{R}^*.$$

El conjunto A, siendo acotado superiormente, no siempre posee extremo superior; en tal caso la cortadura (A,B) representa un "*hueco*" ó una "*brecha*" en la recta hiperreal $\mathbb{R}^*$; a continuación examinaremos estos "huecos" existentes en

$\mathbb{R}^*$.

El conjunto A *puede ser superdenso o no. Si* A *es superdenso entonces existe una hipersucesión extrictamente creciente que es cofinal con* A. *En efecto (dada la hipótesis del continuo)* A *es isomorfo a* $\mathbb{R}^*$ *(en orden)*, luego existe una inyección $\alpha:\mathbb{N}^* \to A$ estrictamente creciente; evidentemente la hipersucesión $(\alpha(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ es *estrictamente creciente*, y es *cofinal* con A.

Nota 2. Dado un conjunto ordenado X, un subconjunto S de X se llama "cofinal con X" si para todo $x \in X$ existe $s \in S$ tal que $x < s$. Por ejemplo $\mathbb{N}$ es un subconjunto cofinal con $\mathbb{R}$ (propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$), y $\mathbb{N}^*$ es un subconjunto cofinal con $\mathbb{R}^*$ (versión no-estándar de la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}^*$). De la misma manera, un subconjunto T de X se llama "coinicial con X" si para todo $x \in X$ existe $t \in T$ tal que $t < x$.

Recíprocamente, es fácil ver que si existe una hipersucesión estrictamente creciente que es cofinal con A, entonces A es superdenso. Si A no es superdenso, entonces A puede tener número final (máximo), si no existe una "*sucesión*" *cofinal* con A, estrictamente creciente.

De la misma manera, B puede ser superdenso o no. B es superdenso si y sólo si existe una hipersucesión estrictamente decreciente que es *coinicial* con B. Si B no es superdenso entonces B tiene número inicial (mínimo) ó existe una "*sucesión*" *coinicial* con B, estrictamente decreciente.

Si ni A ni B es superdenso, entonces A tiene un subconjunto cofinal enumerable y B tiene un subconjunto coinicial enumerable; por la superdensidad de $\mathbb{R}^*$ existiría un $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $A < \{\lambda\} < B$; pero esto es imposible ya que $A \cup B = \mathbb{R}^*$ (absurdo!). Por lo tanto, A ó B debe ser superdenso; se presentan los siguientes casos:

(i) A tiene máximo, ó B tiene mínimo.

Supongamos que A tiene máximo; sea δ = el máximo de A, entonces

$$A = (-\infty, \delta] = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \leqslant \delta\},$$

$$B = (\delta, +\infty) = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > \delta\}.$$

Se observa que A no es superdenso, que B es superdenso, y que δ es el punto que separa a A de B.

De la misma manera, si B tiene mínimo, entonces A es superdenso y B no lo es, y el mínimo del conjunto B separa a A de B.

(ii) Si A no es superdenso y no tiene *elemento máximo*, entonces B debe ser superdenso.

En este caso, existe una sucesión cofinal con A estrictamente creciente, digamos $(\alpha(k))_{k\in\mathbb{N}}$. Consideremos el siguiente *conjunto contable* de números positivos:

$$\{\alpha(k+1) - \alpha(k) / k \in \mathbb{N}\}.$$

Por la superdensidad del conjunto de todos los números no-estándar positivos, existe $\varepsilon_o > 0$, $\varepsilon_o \in \mathbb{R}^*$ tal que

$$\alpha(k+1) - \alpha(k) > \varepsilon_o \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Sea σ cualquier elemento de A, entonces existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma < \alpha(k_o)$, puesto que $\{\alpha(k)/k \in \mathbb{N}\}$ es cofinal con A, luego:

$$\sigma + \varepsilon_o < \alpha(k_o) + \varepsilon_o < \alpha(k_o+1),$$

o sea que

$$\sigma + \varepsilon_o \in A. \qquad (1)$$

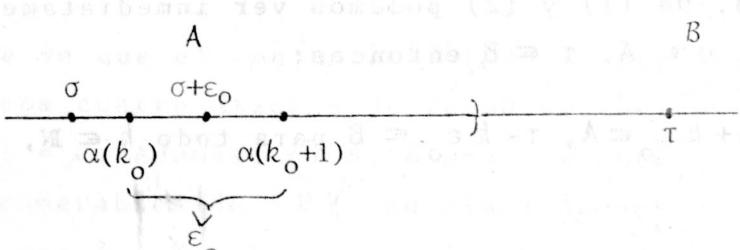

Figura 1

Si $\tau \in B$ entonces:

$$\tau - \varepsilon_o \in \mathcal{B} \qquad (2)$$

puesto que si $\tau-\varepsilon_o \in A$ se tendría que $\tau = (\tau-\varepsilon_o) + \varepsilon_o \in A$ (absurdo!).

De lo anterior, para $\tau \in \mathcal{B}$, $\sigma \in A$ se tiene que (Nota 3):

$$\tau-\sigma = 2\varepsilon_o + (\tau-\varepsilon_o)-(\sigma+\varepsilon_o) > 2\varepsilon_o \qquad (3)$$

o sea que los elementos de A y los elementos de $\mathcal{B}$ *no se acercan*; en tal caso decimos que A y $\mathcal{B}$ *no son contiguos*, o, que la cortadura $(A,\mathcal{B})$ "*no es regular*".

De la misma manera, si el conjunto $\mathcal{B}$ no es superdenso y no tiene elemento mínimo, entonces A debe ser superdenso. Además la cortadura $(A,\mathcal{B})$ *no es regular*.

Nota 3. De (1) y (2) podemos ver inmediatamente que si $\sigma \in A$, $\tau \in \mathcal{B}$ entonces:

$$\sigma+ k\,\varepsilon_o \in A,\ \tau- k\,\varepsilon_o \in \mathcal{B} \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

luego:

$$\tau-\sigma > 2\,k\,\varepsilon_o \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

EJEMPLO 1.

$$A = \{\sigma \in \mathbb{R}^*/\sigma \text{ no es infinito positivo}\},$$

$$\mathcal{B} = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \text{ es infinito positivo}\},$$

ó

$$A = \{\sigma \in \mathbb{R}^* / \sigma < 0, \text{ ó, } \sigma \approx 0\},$$

$$\mathcal{B} = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > 0, \text{ y, } \tau \not\approx 0\}. \blacktriangle$$

(iii) Ambos conjuntos A y $\mathcal{B}$ son superdensos, y la cortadura $(A,\mathcal{B})$ no es regular.

Como no es muy evidente la existencia de tal cortadura en $\mathbb{R}^*$, veamos un ejemplo.

EJEMPLO 2. Sean X un conjunto ordenado (orden $<$) isomorfo a $\mathbb{N}^*$, Y un conjunto ordenado (orden $<$) isomorfo a $\mathbb{N}^*-\mathbb{N}$, con $X \cap Y = \emptyset$, entonces $X \cup Y$ es un conjunto *totalmente ordenado* de acuerdo con el orden establecido en X, en Y, y por la relación

$$x < y \quad \text{si } x \in X, \ y \in Y$$

Se ve que el conjunto $X \cup Y$ satisface los primeros cuatro axiomas de Peano, y que $|X \cup Y| = \mathcal{C}$. Además, si A, $\mathcal{B}$ son dos subconjuntos enumerables de $X \cup Y$, no simultáneamente vacíos, con $A < \mathcal{B}$, entonces evidentemente existe $\lambda \in X \cup Y$ tal que

$a < \lambda \leqslant b$, para todo $a \in A$, y, para todo $b \in B$.

Por lo tanto (bajo la hipótesis del continuo), el conjunto $X \cup Y$ es isomorfo a $\mathbb{N}^*$ (ver Referencia [5]). Es decir, existe una biyección $g: X \cup Y \to \mathbb{N}^*$, estrictamente creciente.

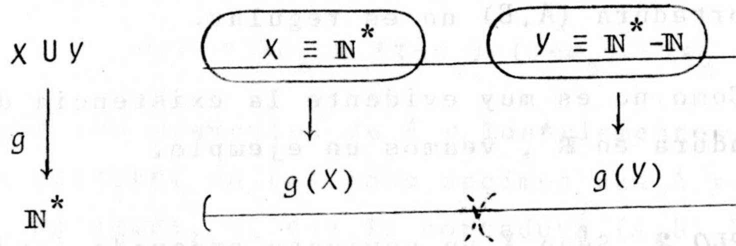

Figura 2

Para $\tau \in \mathbb{R}^*$, denotemos por $\langle\tau\rangle$ "*la parte entera*" de τ; consideremos la siguiente cortadura (A, B) de $\mathbb{R}^*$ dada por:

$$B = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \langle\tau\rangle \in g(Y)\}$$

$$A = \mathbb{R}^* - B = \{\sigma \in \mathbb{R}^* / \sigma < 1, \text{ ó}, \langle\sigma\rangle \in g(X)\},$$

entonces A y B son *superdensos*, ya que $(g(\nu))_{\nu \in X}$ es una hipersucesión cofinal con A, estrictamente creciente; por otra parte el conjunto $g(Y)$ no tiene mínimo, ni posee subconjunto coinicial enumerable.

Si $\beta \in B$ entonces $\langle\beta\rangle \in \mathcal{g}(\mathcal{Y})$, luego: $\langle\beta\rangle - 1 \in \mathcal{g}(\mathcal{Y})$, por lo tanto:

$$\beta - 1 \in B. \tag{4}$$

De la misma manera, si $\alpha \in A$ entonces

$$\alpha + 1 \in A. \tag{5}$$

De (4) y (5) se tiene que

$$\beta-\alpha > 2 \quad \text{para todo } \alpha \in A\ ,\ \beta \in B, \tag{6}$$

o sea que la cortadura (A,B) *no es regular.* ▲

(iv) Los dos conjuntos A y B son superdensos y la cortadura (A,B) es "*regular*", esto es:

dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ cualquiera, existen $\alpha \in A$, $\beta \in B$ tales que

$$\beta - \alpha < \varepsilon.$$

A continuación, daremos un ejemplo de cortadura (A,B) de este tipo.

EJEMPLO 3. Sea

$$\mathbb{Q}^* = \{[(q_n)] \in \mathbb{R}^* / q_n \in \mathbb{Q} \text{ para } \textit{casi todo } n\}$$

la extensión elemental de $\mathbb{Q}$ (Nota 4), entonces

$\mathbb{Q}^*$ es un subcuerpo ordenado de $\mathbb{R}^*$, denso en $\mathbb{R}^*$, y además: $|\mathbb{Q}^*| = \mathcal{c}$. Sea $\mathcal{R}(\mathbb{Q}^*)$ *la clausura real* de $\mathbb{Q}^*$ (el mínimo cuerpo *real cerrado* que contiene a $\mathbb{Q}^*$); ésta está formada por todos los elementos de $\mathbb{R}^*$ que son algebraicos sobre $\mathbb{Q}^*$. Se tiene que $\mathcal{R}(\mathbb{Q}^*) \subsetneq \mathbb{R}^*$; en efecto, como todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}^*$ es "generado" por una sucesión de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$, y, $\pi(\in \mathbb{R})$ es trascendente sobre $\mathbb{Q}$, entonces $\pi(\in \mathbb{R}^*)$ es trascendente sobre $\mathbb{Q}^*$, esto es $\pi \notin \mathcal{R}(\mathbb{Q}^*)$. (ver Referencia [6]).

Como $\mathbb{Q}^*$ es un cuerpo ordenado superdenso cuya cardinalidad es igual a $\mathcal{c}$, entonces también lo es el cuerpo $\mathcal{R}(\mathbb{Q}^*)$ (Nota 5). Por el teorema de isomorfismo de los cuerpo reales no-estándar, (y bajo las hipótesis del continuo) se tiene $\mathcal{R}(\mathbb{Q}^*)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^*$ (Nota 6), o sea, existe una biyección

$$\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathcal{R}(\mathbb{Q}^*)$$

que respeta la estructura de cuerpo ordenado.

Consideremos los subconjuntos A, B de $\mathbb{R}^*$ dados por:

$$A = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \varphi(\tau) < \pi\}$$

$$\mathcal{B} = \{\tau \in \mathbb{R}^* \, / \, \varphi(\tau) > \pi\},$$

entonces $(A,\mathcal{B})$ es una cortadura de $\mathbb{R}^*$ ya que $\pi \notin \mathcal{R}(\mathbb{Q}^*) = \varphi(\mathbb{R}^*)$. La cortadura $(A,\mathcal{B})$ es *regular*, en efecto, dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ sea $\hat{\varepsilon} = \varphi(\varepsilon)$. Como $\mathcal{R}(\mathbb{Q}^*)$ es *denso* en $\mathbb{R}^*$, existen $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}^*)$ tales que

$$\pi - \tfrac{1}{2}\hat{\varepsilon} < \hat{\alpha} < \pi, \qquad \pi < \hat{\beta} < \pi + \tfrac{1}{2}\hat{\varepsilon}$$

Por definición de A, $\mathcal{B}$ se tiene que

$$\alpha = \varphi^{-1}(\hat{\alpha}) \in A, \quad \beta = \varphi^{-1}(\hat{\beta}) \in \mathcal{B}.$$

Como $\hat{\beta} - \hat{\alpha} < \hat{\varepsilon}$ entonces tenemos que

$$\varphi^{-1}(\hat{\beta} - \hat{\alpha}) = \beta - \alpha < \varphi^{-1}(\hat{\varepsilon}) = \varepsilon,$$

lo cual demuestra que cortadura $(A,\mathcal{B})$ es *regular*. ▲

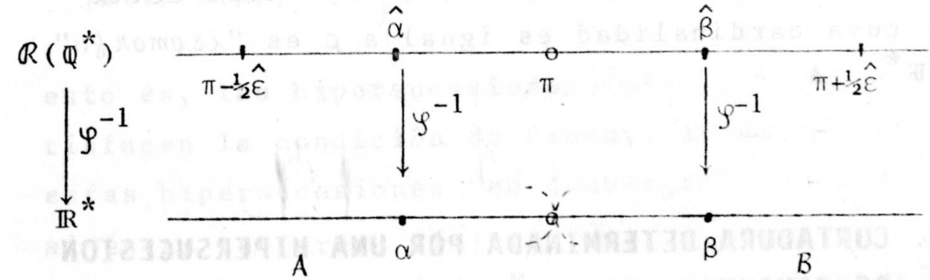

Figura 3

Nota 4. Sea $\mathcal{F}^*$ un ultrafiltro de Frechet en $\mathbb{N}$; dada una sucesión de elementos reales, (a_n), decimos que a_n satisface una propiedad "p" para *casi todo* n si:

$$\{n \in \mathbb{N} / a_n \text{ satisface la propiedad "}p\text{"}\} \in \mathcal{F}^*.$$

Sabemos que:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim$$

donde

$$(a_n) \sim (b_n) \text{ si y sólo si } a_n = b_n$$

para *casi todo* n.

Nota 5. Sea X un conjunto ordenado superdenso; si Y es un subconjunto de X, denso en X, entonces Y también es superdenso.

Nota 6. (Teorema de isomorfismo de los cuerpos ordenados). Bajo la hipótesis del continuo, todo cuerpo ordenado *superdenso* y *real cerrado* cuya cardinalidad es igual a $\mathfrak{c}$ es "*isomorfo*" a $\mathbb{R}^*$. ▲

§3. CORTADURA DETERMINADA POR UNA HIPERSUCESION DE CAUCHY.

Supongamos que una cortadura (A,B) de $\mathbb{R}^*$ es del tipo (iv) (A y B son *superdensos* y *regulares*), entonces existen una hipersucesión $(\alpha(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ *cofinal* con A estrictamente creciente y una hipersucesión $(\beta(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ *coinicial* con B estrictamente decreciente. Además, dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ cualquiera, existe $\nu_o \in \mathbb{N}^*$ tal que $\beta(\nu_o)-\alpha(\nu_o) < \varepsilon$, luego:

$$\beta(\nu)-\alpha(\nu) < \varepsilon, \quad \beta(\mu)-\alpha(\mu) < \varepsilon \text{ para todo } \nu,\mu > \nu_o.$$

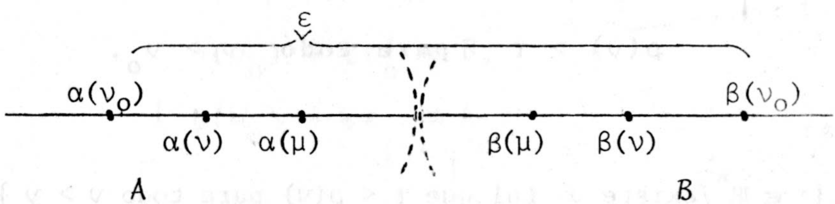

Figura 4

Por lo tanto se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} |\alpha(\nu)-\alpha(\mu)| < \varepsilon \\ |\beta(\nu)-\beta(\mu)| < \varepsilon \end{array}\right\} \text{ para todo } \nu,\mu > \nu_o\,; \qquad (7)$$

esto es, las hipersucesiones $(\alpha(\nu))$, $(\beta(\nu))$ satisfacen la condición de Cauchy. Evidentemente, estas hipersucesiones "*no convergen*"; en efecto, si éstas tuvieran límite, éste sería el punto que separa a A de B, o sea que se tendría el caso de la cortadura de tipo (i) (absurdo!).

Recíprocamente, supongamos que una hipersucesión $(\rho(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ es de Cauchy y que ésta no converge. Dado $\tau \in \mathbb{R}^*$ cualquiera, entonces τ no es límite de la hipersucesión de Cauchy $(\rho(\nu))$, luego existe $\varepsilon_o > 0$ tal que $\rho(\nu) \notin (\tau-\varepsilon_o, \tau+\varepsilon_o)$ para todo $\nu \in \mathbb{N}^*$ a partir de algún $\nu_o \in \mathbb{N}^*$, por lo tanto:

$$\rho(\nu) < \tau \quad \text{para todo} \quad \nu > \nu_o,$$

ó,

$$\rho(\nu) > \tau \quad \text{para todo} \quad \nu > \nu_o.$$

Sean:

$A = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \text{existe } \nu_o \text{ tal que } \tau < \rho(\nu) \text{ para todo } \nu > \nu_o\}$,

$B = \mathbb{R}^* - A = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \text{existe } \nu_o \text{ tal que } \rho(\nu) < \tau \text{ para todo } \nu > \nu_o\}$,

entonces (A,B) es una cortadura de $\mathbb{R}^*$.

A y B son *superdensos*. En efecto, supongamos que A ó B no fuera superdenso, (caso (ii)), luego existiría $\varepsilon_o > 0$ tal que

$$\beta-\alpha > \varepsilon_o \text{ para todo } \alpha \in A,\ \beta \in B. \tag{8}$$

Como $(\rho(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ es una hipersucesión de Cauchy, entonces existe ν_o tal que

$$|\rho(\nu)-\rho(\nu_o)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon_o \quad \text{para todo } \nu > \nu_o.$$

Por la definición de los conjuntos A y B se tiene que

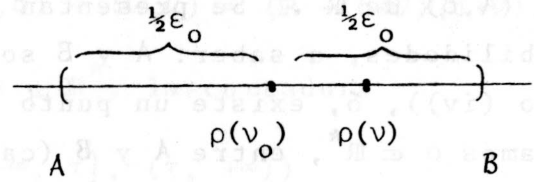

Figura 5

$$\rho(\nu_o) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_o \in B,$$

$$\rho(\nu_o) - \tfrac{1}{2}\varepsilon \in A$$

y

$$(\rho(\nu_o) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_o) - (\rho(\nu_o) - \tfrac{1}{2}\varepsilon_o) = \varepsilon_o,$$

esto contradice a (8) (absurdo!)

También, lo anterior nos muestra que la cortadura (A,B) es *regular*.

En resumen, tenemos:

"Una hipersucesión *divergente* de Cauchy determina una única cortadura regular (A,B) de $\mathbb{R}^*$". La existencia de tal cortadura (Ejemplo 3) implica bajo las hipótesis del continuo que "existen hipersucesiones divergentes de Cauchy en $\mathbb{R}^*$". ▲

§4. COMPLETADO PARCIAL DE $\mathbb{R}^*$.

Sea $\bar{\mathbb{R}}^*$ la colección de todas las cortaduras "regulares" (A,B) de $\mathbb{R}^*$. Se presentan solamente dos posibilidades, a saber: A y B son superdensos (caso (iv)), ó, existe un punto de separación, digamos $\sigma \in \mathbb{R}^*$, entre A y B (caso (i)). En el segundo caso, consideremos que las dos cortaduras correspondientes al mismo punto de separación σ son "*iguales*"; para mayor sencillez supongamos que σ pertenece al conjunto A (esto es, B es superdenso).

Similarmente al caso de las cortaduras de Dedekind de $\mathbb{Q}$, es fácil ver que $\bar{\mathbb{R}}^*$ es un cuerpo ordenado que contiene a $\mathbb{R}^*$ como subcuerpo (① - ⑤).

① $\bar{\mathbb{R}}^*$ es un conjunto totalmente ordenado.

Sean (A,B), $(C,D) \in \bar{\mathbb{R}}^*$, se define el orden "<" como sigue:

$$(A,B) < (C,D) \text{ si y sólo si } A \subset C.$$

Evidentemente, el orden "<" es total. ▲

② Sean (A,B), $(C,D) \in \bar{\mathbb{R}}^*$; consideremos la siguiente cortadura:

$$(\mathbb{R}^* - (B+D),\ B+D),$$

donde $\mathcal{B}+\mathcal{D} = \{\tau+\sigma/\tau \in \mathcal{B},\ \sigma \in \mathcal{D}\}$. Evidentemente esta cortadura pertenece a $\bar{\mathbb{R}}^*$. Se define:

$$(\mathcal{A},\mathcal{B}) + (\mathcal{C},\mathcal{D}) = (\mathbb{R}^* - (\mathcal{B}+\mathcal{D}), \mathcal{B}+\mathcal{D}).$$

(3) Dado $\tau \in \mathbb{R}^*$, la cortadura

$$((-\infty, \tau], (\tau, +\infty))$$

pertenece a $\bar{\mathbb{R}}^*$. Esta cortadura la idenficamos con el número no-estándar τ:

$$\tau = ((-\infty, \tau], (\tau, +\infty)).$$

De esta manera, podemos considerar que

$$\mathbb{R}^* \subseteq \bar{\mathbb{R}}^*. \ \blacktriangle$$

Tenemos entonces:

$$0 + (\mathcal{A},\mathcal{B}) = ((-\infty, 0], (0, +\infty)) + (\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathcal{A},\mathcal{B}). \ \blacktriangle$$

(4) Sea $(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \bar{\mathbb{R}}^*$, se define:

$-(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (-\mathcal{B}, -\mathcal{A})$ donde $-\mathcal{A} = \{-\alpha/\alpha \in \mathcal{A}\}$,

$-\mathcal{B} = \{-\beta/\beta \in \mathcal{B}\}$

entonces:

$$-(\mathcal{A},\mathcal{B}) + (\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0.$$

Nótese que si $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ no fuera regular, entonces no se tendría esto último!

(5) Sean (A,B), $(C,D) \in \bar{\mathbb{R}}^*$ con $(A,B) > 0$, $(C,D) > 0$. Es fácil ver que:

$$(\mathbb{R}^* - B\cdot D, B\cdot D) \in \bar{\mathbb{R}}^* \quad \text{donde}$$

$B\cdot D = \{\beta\cdot\delta / \beta \in B,\ \delta \in D\}$

Se define:

$$(A,B)\cdot(C,D) = (\mathbb{R}^* - B\cdot D, B\cdot D).$$

Si $(A,B) < 0$, $(C,D) > 0$ se define:

$$(A,B)\cdot(C,D) = -((-A,B)),(C,D)).$$

Si $(A,B) < 0$, $(C,D) < 0$ se define:

$$(A,B)\cdot(C,D) = (-(A,B)),(-(C,D)).$$

Sea $\alpha = (A,B) \in \bar{\mathbb{R}}^*$, $\alpha \neq 0$. Para mayor sencillez, supongamos que $\alpha = (A,B) > 0$, entonces existe $x \in A$, $x > 0$. Sean:

$$D = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > 0, \frac{1}{\tau} \in A\},\quad C = \mathbb{R}^* - D,$$

entonces es fácil ver que (C,D) es una cortadura regular de $\mathbb{R}^*$. Si $\tau \in D$ entonces $\frac{1}{\tau} \in A$, luego $\frac{1}{\tau} < \sigma$ para todo $\sigma \in B$, o sea que

$$\tau\cdot\sigma > 1.$$

Como la cortadura (A,B) es regular, dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ cualquiera, existen $a \in A$, $b \in B$ tales que

$$x < a, \quad b-a < \varepsilon x,$$

luego:

$$\frac{1}{a}\cdot b - 1 = \frac{b-a}{a} < \frac{b-a}{x} < \varepsilon ,$$

por lo tanto se tiene que

$$\mathcal{B}\cdot\mathcal{D} = (1, +\infty),$$

esto es:

$$(A,\mathcal{B})\cdot(C,\mathcal{D}) = ((-\infty,1],(1,\infty)) = 1.$$

De esta manera, se ve que $\bar{\mathbb{R}}^*$ es un *cuerpo* que posee a $\mathbb{R}^*$ como subcuerpo ordenado. ▲

6 $\mathbb{R}^*$ es denso en $\bar{\mathbb{R}}^*$.

Sean $\tau = (A,\mathcal{B})$, $\sigma = (C,\mathcal{D}) \in \bar{\mathbb{R}}^*$ con $\tau < \sigma$, entonces

$$A \subsetneqq C.$$

Existe $\beta \in \mathbb{R}^*$ con $\beta \in C$, $\beta \notin A$. Como el conjunto $\mathcal{B}$ no tiene mínimo, existe $\theta \in \mathcal{B}$, $\theta < \beta$, por lo tanto se tiene que

$$\tau = (A,\mathcal{B}) < \theta = ((-\infty,\theta], (\theta,+\infty)) < \sigma = (C,\mathcal{D})$$

o sea que $\mathbb{R}^*$ es denso en $\bar{\mathbb{R}}^*$. ▲

⑦ Sea $\tau \in \bar{\mathbb{R}}^*$, entonces existe una hipersucesión de elementos en $\mathbb{R}^*$ que converge a τ.

En efecto, existen $\theta(\nu) \in \mathbb{R}^*$ tales que

$$\tau - \frac{1}{\nu} < \theta(\nu) < \tau + \frac{1}{\nu} \quad \text{para todo } \nu \in \mathbb{N}^*,$$

evidentemente: $\theta(\nu) \to \tau$. ▲

⑧ $\bar{\mathbb{R}}^*$ es superdenso, puesto que $\mathbb{R}^*$ es superdenso y denso en $\bar{\mathbb{R}}^*$. ▲

⑨ Toda hipersucesión de Cauchy converge en $\bar{\mathbb{R}}^*$.

En efecto, sea $(\rho(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ una hipersucesión de Cauchy de elementos en $\bar{\mathbb{R}}^*$. Como $\mathbb{R}^*$ es denso en $\bar{\mathbb{R}}^*$, existen $\theta(\nu) \in \mathbb{R}^*$ tales que

$$\rho(\nu) - \frac{1}{\nu} < \theta(\nu) < \rho(\nu) + \frac{1}{\nu} \quad \text{para todo } \nu \in \mathbb{N}^* \qquad (9)$$

Evidentemente, $(\theta(\nu))_{\nu \mathbb{N}^*}$ es una hipersucesión de Cauchy de elementos en $\mathbb{R}^*$, luego ésta determina una cortadura regular $\theta = (A, B) \in \bar{\mathbb{R}}^*$. Dado $\varepsilon \in \bar{\mathbb{R}}^*$, $\varepsilon > 0$ existe $\varepsilon_o \in \mathbb{R}^*$ tal que

$$0 < \varepsilon_o < \varepsilon \qquad \text{(ya que } \mathbb{R}^* \text{ es denso en } \bar{\mathbb{R}}^*\text{)}.$$

Como (A, B) es regular, existen $\alpha \in A$, $\beta \in B$ tales que

$$\beta - \alpha < \varepsilon_o.$$

Como la hipersucesión $(\theta(\nu))$ determina la cortadura (A,B), entonces existe $\nu_o \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\alpha < \theta(\nu) < \beta \quad \text{para todo } \nu > \nu_o,$$

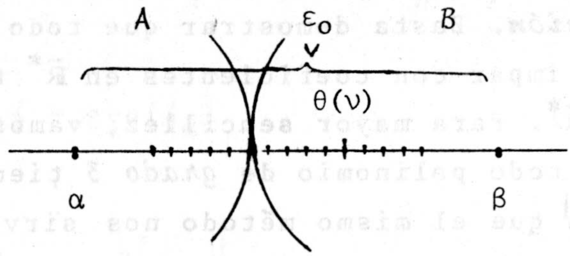

Figura 6

por lo tanto se tiene que

$$|\theta(\nu)-\theta| < \varepsilon_o < \varepsilon \quad \text{para todo } \nu > \nu_o,$$

o sea que $\theta(\nu) \to \theta$ en $\bar{\mathbb{R}}^*$. De (9), se tiene que

$$\rho(\nu) \to \theta \text{ en } \bar{\mathbb{R}}^*. \blacktriangle$$

(10) Una hipersucesión converge en $\bar{\mathbb{R}}^*$ si y sólo si es de Cauchy.

(11) $\bar{\mathbb{R}}^*$ es un cuerpo real, esto es, si $\tau \in \bar{\mathbb{R}}^*$ con $\tau > 0$ entonces $\sqrt{\tau} \in \bar{\mathbb{R}}^*$. En efecto, sea $(\theta(\nu))_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ una hipersucesión de elementos en $\mathbb{R}^*$ que converge a τ. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\theta(\nu) > 0$

para todo $\nu \in \mathbb{N}^*$. Evidentemente, la hipersucesión $(\sqrt{\theta(\nu)})_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ es de Cauchy, luego ésta converge a un límite en $\bar{\mathbb{R}}^*$, el cual es igual a $\sqrt{\tau}$. ▲

(12) $\bar{\mathbb{R}}^*$ es un cuerpo *real cerrado*.

Demostración. Basta demostrar que todo polinomio de grado impar con coeficientes en $\bar{\mathbb{R}}^*$ tiene un cero en $\bar{\mathbb{R}}^*$. Para mayor sencillez, vamos a demostrar que todo polinomio de *grado 3* tiene un cero en $\bar{\mathbb{R}}^*$, ya que el mismo método nos sirve para el caso general.

(i) Primero, consideremos una ecuación polinómica de grado 3 con coeficientes reales:

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0, \quad a,b,c \in \mathbb{R}; \tag{1}$$

sabemos que ésta tiene tres raíces complejas. (contamos raíces múltiples como varias raíces). Sean $s_k(a,b,c)$ $(k = 1,2,3)$ las partes reales de las raíces de la ecuación (1), ordenadas por:

$$s_1(a,b,c) \leqslant s_2(a,b,c) \leqslant s_3(a,b,c),$$

y, $t_k(a,b,c)$ $(k = 1,2,3)$ sus partes imaginarias ordenadas por

$$t_1(a,b,c) \leqslant t_2(a,b,c) \leqslant t_3(a,b,c).$$

Sabemos que $s_k(a,b,c)$, $t_k(a,b,c)$ $(k = 1,2,3)$ son *funciones continuas* (de variable (a,b,c)) en $\mathbb{R}^3$.

(ii) Sea

$$\mathfrak{f}(\tau) = \tau^3 + \alpha\cdot\tau^2 + \beta\cdot\tau + \gamma = 0, \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}^* \qquad (2)$$

una ecuación polinómica de grado 3 con coeficientes en $\mathbb{R}^*$, si $\alpha = [(a_n)]$, $\beta = [(b_n)]$, $\gamma = [(c_n)]$ entonces:

$$\mathfrak{f} = \text{gen}(\mathfrak{f}_n) \qquad \text{(Nota 6)}$$

donde

$$\mathfrak{f}_n(x) = x^3 + a_n\cdot x^2 + b_n\cdot x + c_n \qquad (n = 1,2,3\ldots). \quad (3)$$

La ecuación (2) tiene tres raíces en $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^*(\sqrt{-1})$. Las partes reales e imaginarias de estas raíces son $\sigma_k(\alpha,\beta,\gamma)$, $\theta_k(\alpha,\beta,\gamma)$ $(k = 1,2,3)$ donde:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_k(\alpha,\beta,\gamma) &= [(s_k(a_n,b_n,c_n))_n] = s_k^*(\alpha,\beta,\gamma) \\ \theta_k(\alpha,\beta,\gamma) &= [(t_k(a_n,b_n,c_n))_n] = t_k^*(\alpha,\beta,\gamma) \end{aligned}\right\} \quad (k = 1,2,3).$$

Además, éstas satisfacen:

$$\sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \sigma_3 \;; \quad \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_3.$$

Nótese que s_k^*, t_k^* son "*extensiones elementales*" de las funciones reales s_k, t_k respectivamente.

Como $s_k(a,b,c)$, $t_k(a,b,c)$ $(k = 1,2,3)$ son *continuas* en $\mathbb{R}^3$, entonces las funciones no-estándar σ_k $(= s_k^*)$, θ_k $(= t_k^*)$ son topológicamente continuas en $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$. Aún más, para cualquier $M > 0$, $M \in \mathbb{R}^*$, las funciones no-estándar σ_k, θ_k son "*uniformemente*" top-continuas en $[-M,M]^3$ $(\subset (\mathbb{R}^*)^3)$.

(iii) Ahora, consideremos la ecuación con coeficientes en $\bar{\mathbb{R}}^*$:

$$\tau^3 + \bar{\alpha}\cdot\tau^2 + \bar{\beta}\cdot\tau + \bar{\gamma} = 0, \quad \bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma} \in \bar{\mathbb{R}}^* \tag{4}$$

Por 7 existen hipersucesiones $(\alpha(\nu))$, $(\beta(\nu))$, $(\gamma(\nu))$ tales que

$$\alpha(\nu) \to \bar{\alpha}\ , \quad \beta(\nu) \to \bar{\beta}\ , \quad \gamma(\nu) \to \bar{\gamma} \quad (\nu \to \infty)$$

con

$$\alpha(\nu),\ \beta(\nu),\ \gamma(\nu) \in \mathbb{R}^*.$$

Tomemos $M > 0$ tal que

$$\alpha(\nu),\ \beta(\nu),\ \gamma(\nu) \in [-M,M] \quad \text{para todo } \nu \in \mathbb{N}^*$$

Como $\sigma_k(\alpha,\beta,\gamma)$ y $\theta_k(\alpha,\beta,\gamma)$ son "*uniformemente*" top-continuas en $[-M,M]^3$, entonces las hipersucesiones de elementos en $\mathbb{R}^*$:

$$(\sigma_k(\alpha(\nu),\beta(\nu),\gamma(\nu)))_{\nu\in\mathbb{N}^*}\ ,$$

$$(\theta_k(\alpha(\nu),\beta(\nu),\gamma(\nu)))_{\nu\in\mathbb{N}^*}$$

son de Cauchy, luego son convergentes en $\bar{\mathbb{R}}^*$;

sean:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_k(\alpha(\nu),\beta(\nu),\gamma(\nu)) \to \bar{\sigma}_k \\ \theta_k(\alpha(\nu),\beta(\nu),\gamma(\nu)) \to \bar{\theta}_k\end{array}\right\} \quad (k = 1,2,3).$$

Como la ecuación (2) es de grado impar, entonces una raíz está en $\mathbb{R}^*$, luego:

$$\theta_1(\alpha,\beta,\gamma)\cdot\theta_2(\alpha,\beta,\gamma)\cdot\theta_3(\alpha,\beta,\gamma) = 0$$

$$\text{para todo } (\alpha,\beta,\gamma) \in (\mathbb{R}^*)^3,$$

esto es:

$$\theta_1(\alpha(\nu),\beta(\nu),\gamma(\nu))\cdot\theta_2(\alpha(\nu),\beta(\nu),\gamma(\nu))\cdot\theta_3(\alpha(\nu),\beta(\nu),\gamma(\nu))$$

$$= 0 \quad \text{para todo } \nu \in \mathbb{N}^*,$$

por lo tanto:

$$\bar{\theta}_1\cdot\bar{\theta}_2\cdot\bar{\theta}_3 = 0,$$

o sea que $\bar{\theta}_k = 0$ para "*algún*" k. Entonces para algún k, $\bar{\sigma}_k$ es una raíz de la ecuación (4), puesto que la función $\tau^3 + \bar{\alpha}\cdot\tau^2 + \bar{\beta}\cdot\tau + \bar{\gamma}$ es el límite de $\tau^3 + \alpha(\nu)\cdot\tau^2 + \beta(\nu)\cdot\tau + \gamma(\nu)$ cuando $\nu \to \infty$. ▲

Nota 6. Dada $(\mathfrak{f}_n)$ una sucesión de "funciones rea les", $f = \text{gen}(f_n)$ es una *función no-estándar* de $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}^*$ definida por:

$$f(\tau) = [(f_n(x_n))] \quad \text{para } \tau = [(x_n)] \in \mathbb{R}^*. \quad \blacktriangle$$

13 $|\bar{\mathbb{R}}^*| > c$. En efecto bajo la hipótesis del continuo $|\bar{\mathbb{R}}^*| \geqslant c$. Si $|\bar{\mathbb{R}}^*| = c$ entonces $\bar{\mathbb{R}}^*$ sería *isomorfo* a $\mathbb{R}^*$ y esto contradice la existencia de la cortadura regular (A, B) tal que A y B son superdensos (absurdo!). $\blacktriangle$

14 Sea K un *cuerpo ordenado* tal que (i) K posee un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}^*$, *denso* en K.
(ii) Toda hipersucesión de Cauchy converge en K, entonces K es isomorfo a $\bar{\mathbb{R}}^*$.

Demostración. Dado $x \in K$, sean

$$A_x = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \leqslant x\}, \quad B_x = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > x\},$$

entonces evidentemente (A_x, B_x) es una *cortadura regular* de $\mathbb{R}^*$, puesto que $\mathbb{R}^*$ es denso en K. Si $x, y \in K$, $x \neq y$ entonces $(A_x, B_x) \neq (A_y, B_y)$. En efecto, si $x < y$ entonces existe $\tau \in \mathbb{R}^*$ tal que $x < \tau < y$. Se tiene que

$$\tau \in B_x, \quad \tau \notin B_y,$$

esto es, $(A_x, B_x) < (A_y, \tilde{B}_y)$.

De lo anterior, existe una inyección $\varphi: K \to \bar{\mathbb{R}}^*$, estrictamente creciente.

φ es sobre, o sea que φ es una *biyección*. En efecto, sea $\gamma \in \bar{\mathbb{R}}^*$, entonces existe una hipersucesión $(\alpha(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ con $\alpha(\nu) \in \mathbb{R}^*$ que converge a γ. Como $(\alpha(\nu))$ es de Cauchy en $\mathbb{R}^*$ por densidad de $\mathbb{R}^*$ en K también es de Cauchy en K. Entonces $(\alpha(\nu))$ *converge* en K; o sea $(\alpha(\nu)) \to c$ (en K). Supongamos que $\gamma > \varphi(c) = (A_c, B_c)$, entonces existiría $\sigma \in \mathbb{R}^*$ con $\varphi(c) < \sigma < \gamma$. Como $(\alpha(\nu)) \to \gamma$ en $\bar{\mathbb{R}}^*$, entonces existe $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\alpha(\nu) > \sigma \quad \text{para todo } \nu > \nu_0,$$

luego:

$$c \geqslant \sigma ,$$

así:

$$(A_c, B_c) = \varphi(c) \geqslant \sigma ,$$

esto es:

$$\varphi(c) < \sigma \leqslant \varphi(c) = (A_c, B_c) \quad \text{(absurdo!)}.$$

Por lo tanto, se tiene que $\gamma \leqslant \varphi(c)$. De la misma manera se demuestra que $\gamma \geqslant \varphi(c)$, por lo tanto se tiene que $\gamma = \varphi(c)$.

La biyección φ respeta la estructura algebraica del cuerpo. En efecto, sean $\rho,\mu \in \bar{\mathbb{R}}^*$ entonces existen hipersucesiones $(\alpha(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}^*}$, $(\beta(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ tales que

$$\alpha(\nu),\beta(\nu) \in \mathbb{R}^*, \quad (\alpha(\nu)) \to \rho, \ (\beta(\nu)) \to \mu \quad (\text{en } \bar{\mathbb{R}}^*).$$

Tenemos:

$$(\alpha(\nu)+\beta(\nu)) \to \rho+\mu\ , \quad (\alpha(\nu)\cdot\beta(\nu)) \to \rho\cdot\mu \qquad (\text{en } \bar{\mathbb{R}}^*)$$

También:

$$(\alpha(\nu)) \to \varphi^{-1}(\rho), \quad (\beta(\nu)) \to \varphi^{-1}(\mu) \qquad (\text{en } K),$$

y

$$(\alpha(\nu)+\beta(\nu)) \to \varphi^{-1}(\rho)+\varphi^{-1}(\mu), \quad (\alpha(\nu)\cdot\beta(\nu)) \to \varphi^{-1}(\rho)\cdot\varphi^{-1}(\mu) \qquad (\text{en } K),$$

por lo tanto tenemos que:

$$\varphi^{-1}(\rho+\mu) = \varphi^{-1}(\rho)+\varphi^{-1}(\mu), \quad \varphi^{-1}(\rho\cdot\mu) = \varphi^{-1}(\rho)\cdot\varphi^{-1}(\mu). \ \blacktriangle$$

15 $\bar{\mathbb{R}}^*$ es un cuerpo *algebraicamente* completo, esto es, no existe una extensión propia de $\bar{\mathbb{R}}^*$ a un cuerpo ordenado en el cual $\bar{\mathbb{R}}^*$ es denso.

Demostración. Sea K una extensión del cuerpo ordenado $\bar{\mathbb{R}}^*$ tal que $\bar{\mathbb{R}}^*$ es denso en K. Como $\mathbb{R}^*$ es denso en $\bar{\mathbb{R}}^*$, entonces $\mathbb{R}^*$ es denso en K.

Si $k \in K$ entonces es fácil ver que la cortadura (A,B) dada por:

$$A = \{\tau \in \mathbb{R}^*/\tau \leqslant k\}, \qquad B = \{\tau \in \mathbb{R}^*/\tau > k\}$$

es una cortadura regular de $\mathbb{R}^*$, luego $\sigma = (A,B)$ pertenece a $\bar{\mathbb{R}}^* \subset K$.

Si $\sigma < k$ entonces existe $\tau \in \mathbb{R}^*$ con $\sigma < \tau < k$, o sea que $\tau \in A$, luego $\tau \leqslant \sigma$ (absurdo!), por lo tanto se tiene que $\sigma \geqslant k$. De la misma manera, se tiene que $\sigma \leqslant k$, por lo tanto: $\sigma = k$, esto es:

$$K = \bar{\mathbb{R}}^*. \quad \blacktriangle$$

*

REFERENCIAS

[1] Gillman y Jerison, *Anillos de Funciones Continuas*, Van Nostrand, 1960.

[2] Serge, Lang., *Algebra*, Addison Wesley, 1969.

[3] Dana Scott, *On Completing Orderd Fields*, *Applications of Model Theory to Algebra*, *Analysis and Probability*. W. A.J. Luxemburg, Ed. Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[4] Y. Takeuchi, "Qué son los números no-estándard", Mat.Ens.Univ. N° 33, 1984.

[5] Y. Takeuchi, "Analisis No-estándar, conjuntos Generados", Mat. Ens. Univ. Nº 35, 1985.

[6] Y. Takeuchi, "Micro-cálculo para funciones generadas", Mat. Ens.Univ. Nº 36, Nº 37, 1985.

[7] Y. Takeuchi, "Hipersucesiones y Suma hiperfinita", Apuntes de Seminario, 1985.

* *

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
BOGOTA. D.E.