

INTERPRETACIONES GEOMETRICA Y MATRICIAL DEL ULTIMO TEOREMA DE FERMAT

Ramón E. Fandiño Arbeláez

INTRODUCCION.

En este artículo, daremos una interpretación geométrica y otra matricial del último Teorema de Fermat estudiando la función

$$z = (x^n + y^n)^{1/n}$$

cuando x , y y n toman valores enteros positivos, lo que pensamos, es de por sí interesante. Para esto necesitaremos un orden para matrices, además de trabajar con las curvas de Lamé⁽¹⁾ ($[2]$, $[3]$), unas superficies que llamaremos "de

(1) Gabriel Lamé: Físico Francés del Siglo XIX. ($[2]$, $[3]$).

Lamé" y matrices palíndromes [1].

Agradezco al Dr. Victor Albis su invaluable ayuda en la corrección de los primeros manuscritos y la redacción final del presente trabajo así como sus recomendaciones muy acertadas sin las cuales no hubiera sido posible llevarlo a feliz término.

1. PRELIMINARES.

Dadas dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, m por n , con elementos en \mathbb{R} , definimos

$$A \leq B \Leftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij}, \quad \forall (i, j), \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n. \end{array}$$

Es fácil ver que esta relación es un orden parcial. La definición anterior puede generalizarse a matrices infinitas, centradas en el origen de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, como sigue: si

$$A = [a_{ij}]_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}, \quad B = [b_{ij}]_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}},$$

$a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$, definimos:

$$A \leq B \Leftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Nuevamente es fácil verificar que se tiene una relación de orden parcial.

Si ahora consideramos una matriz $A = [a_{ij}]$, m por n , con elementos en \mathbb{R} , definimos la matriz $A^{RH} = [a_{i, n-j+1}]$ como el *reflejo horizontal* de A y la matriz $A^{RV} = [a_{m-i+1, j}]$ como el *reflejo vertical* de A .

Con estas operaciones es posible introducir la noción de *palíndromía*. Más precisamente: decimos que una matriz $m \times n$, con elementos en \mathbb{R} , es:

a) Palíndrome horizontal si $A = A^{RH}$. Es decir, si es simétrica con respecto a la mediana vertical.

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

son matrices palíndromes horizontales.

b) Palíndrome vertical si $A = A^{RV}$. Es decir, si es simétrica con respecto a la mediana horizontal.

Por ejemplo, las traspuestas de las matrices en a) son palíndromes verticales.

c) Palíndrome doble si $A = A^{RH} = A^{RV}$.

d) *Tetrasimétrica* si $A = A^{RH} = A^{RV} = A^T$.

Es claro que estas definiciones se extienden fácilmente a las matrices infinitas

$$[a_{ij}](i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

centradas en el origen de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. En este trabajo nos interesan especialmente las matrices tetrasimétricas infinitas.

2. CURVAS Y SUPERFICIES DE LAMÉ.

Una *curva u óvalo de Lamé* es una curva cerrada plana definida por la ecuación

$$\frac{|x|^v}{a^v} + \frac{|y|^v}{b^v} = 1, \quad |x| \leq a, \quad |y| \leq b,$$

donde $v \in \mathbb{R}$, $v > 0$. Por analogía con la ecuación de una elipse, los números reales $a > 0$, $b > 0$ se llaman los *semiejes de la curva*; el número v se llama el *grado o parámetro* de la misma. La siguiente propiedad resulta de la definición:

Sí $v \geq 2$ la curva es suave. Sí $0 < v < 2$, la curva presenta puntos de retroceso en los vértices:

$$(a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, -b).$$

La curva se dice un *romboide* si $0 < \nu < 1$. Si $\nu = 1$, se ve fácilmente que representa a un *rombo*. Si $1 < \nu < 2$, se dice que la curva es una *subelipse* o *subcircunferencia*. Si $\nu = 2$, estamos ante una *circunferencia* o una *elipse*. Si $\nu > 2$, decimos que la curva es una *superelipse* o una *supercircunferencia*. Estas denominaciones se deben a Piet Hein, arquitecto y diseñador sueco, de este siglo [3], quien ha usado las curvas de Lamé para $\nu = 2,5$, $\nu = 2,71828$ y $\nu = 3,162038$ en edificios y muebles ([2], [3]).

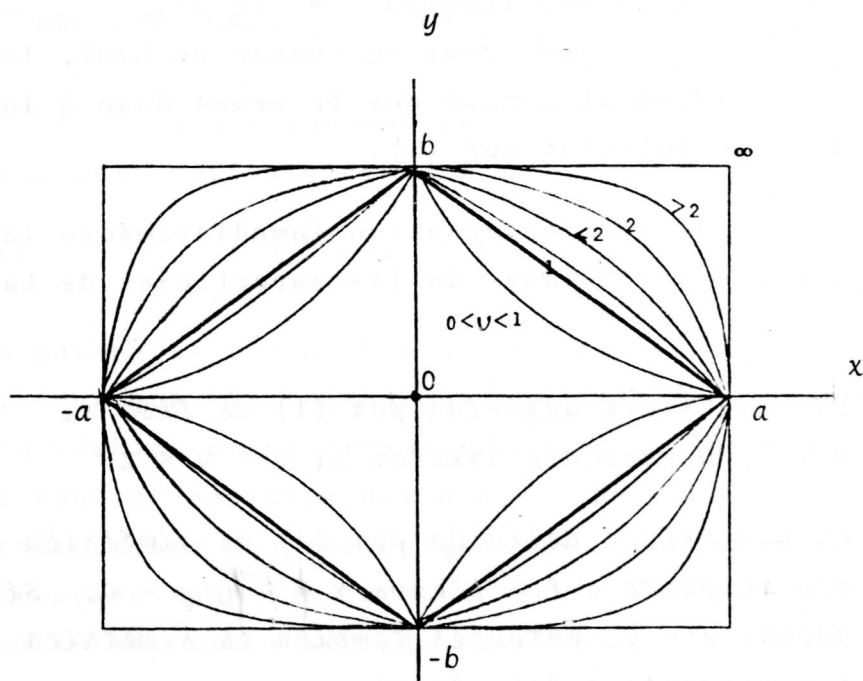


Figura 1

Ahora introducimos la noción de *superficie de Lamé*:

$$(1) \quad f_v(x, z) = z^v = \frac{|x|^v}{a^v} + \frac{|y|^v}{b^v}, \quad |x| \leq a, \quad |y| \leq b.$$

El número $v > 0$ se llama también el *grado* o *parámetro de la superficie*. Las curvas de nivel de esta superficie son de la forma

$$(2) \quad c = \frac{|x|^v}{a^v} + \frac{|y|^v}{b^v}, \quad (c \geq 0)$$

que mediante la sustitución $x = \sqrt[v]{c} \, x'$, $y = \sqrt[v]{c} \, y'$, se convierten en curvas de Lamé, lo cual justifica el nombre que le hemos dado a la superficie definida por (1).

De la definición resultan inmediatamente las siguientes propiedades de las superficies de Lamé:

- 1) La superficie definida por (1) es lisa si $v \geq 2$, y presenta aristas si $0 < v < 2$.
- 2) La superficie definida por (1) es simétrica con respecto a los planos $x = 0$ y $y = 0$. Si además $a = b$, entonces también es simétrica con respecto a los planos $x = y$ y $x = -y$.

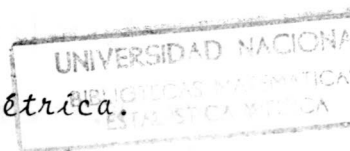
Con cada superficie de Lamé, de parámetro v , es posible asociar una matriz infinita:

$$(3) \quad A_v = [a_{ij}]_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}, \quad a_{ij} = \delta_v(i, j),$$

la cual llamamos *matriz asociada a la superficie de Lamé* $\delta_v(x, y)$. Por lo anterior, esta matriz tiene las siguientes propiedades:

La matriz infinita A_v es *políndrome doble*, centrada en el origen de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Si además $a = b$, A_v es *tetrasimétrica*.



3. LAS FUNCIONES $z_n = (|x|^n + |y|^n)^{1/n}$.

Para cada n entero positivo, tenemos la siguiente superficie de Lamé

$$(4) \quad z_n = (|x|^n + |y|^n)^{1/n},$$

de parámetro $v = n$. Sin dificultad se puede verificar que (4) representa una *superficie cónica*, con vértice en el origen $(0, 0, 0)$, que se abre en el sentido positivo del eje Oz . En efecto, sus generatrices son rectas que pasan por el origen y reposan sobre la curva $c_0 = (|x|^n + |y|^n)^{1/n}$, que se encuentra situada en el plano $z = c_0 > 0$.

La sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ formada por las curvas definidas por (4) tiene las siguientes propiedades:

PROPOSICION 1. (a) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente,
 (b) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a la función
 $L(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$, pero no uniformemente.

La demostración de esta proposición la haremos en el Apéndice. En virtud de (3), con cada $n = 1, 2, \dots$ podemos asociar una matriz infinita:

$$A_n = [(|i|^n + |j|^n)^{1/n}]$$

donde $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la cual, hemos visto, es tetrasimétrica y, en virtud de la Proposición 1, la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y convergente a la matriz $\Lambda = [\max\{|i|, |j|\}]$.

$$\Lambda = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \end{array}$$

4. EL ULTIMO TEOREMA DE FERMAT.

Esta famosa conjetura se suele enunciar así:

No existe terna alguna (x, y, z) de números enteros positivos que satisfaga la ecuación diofántica

$$(5) \quad x^n + y^n = z^n,$$

para n entero mayor que 2.

Es claro que esta ecuación diofántica está relacionada con las superficies de Lamé, pues de (5) obtenemos:

$$(6) \quad z = (x^n + y^n)^{1/n},$$

x y y positivos. Al reflejar (6) con respecto de los planos $x = 0$, $y = 0$ y con respecto al eje z obtenemos la superficie de Lamé

$$z = (|x|^n + |y|^n)^{1/n},$$

a la cual corresponde la matriz

$$A_n = [(|i|^n + |j|^n)^{1/n}] \quad (i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Observamos que el conjunto $F = \{(x^n + y^n)^{1/n}; x, y, z \text{ enteros positivos}\}$ coincide con los valores que toman los elementos de los elementos de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Es decir, el último teorema de Fermat es equivalente al siguiente enunciado:

Los elementos de F son números irracionales para todo entero n mayor que 2.

o también,

Todos los elementos de las matrices A_n (salvo los de las medianas) son irracionales cuando n es un entero mayor que 2.

O también:

Basta que un elemento de A_n , $n \geq 3$ (exceptuando los de las medianas), sea racional para que la conjetura de Fermat no sea verdadera.

Ya hemos dicho que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente, pero no uniformemente, a $L(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$. Supongamos por un momento que esta convergencia fuese uniforme, de modo que dado $\varepsilon = 1$, existiría un natural $N(\varepsilon)$, que no dependería del punto (x,y) para el cual se cumpliría:

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - L(x,y)| < 1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Pero, como $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, $L(x,y) = \inf z_n$; por tanto

$$L(x, y) < z_n < L(x, y) + 1$$

para $n \geq N(\varepsilon)$ y para todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En particular, si $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, entonces $L(x, y)$ y $L(x, y) + 1$ son dos enteros consecutivos (recuérdese que $L(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$), esto implica que si $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, z_n no es entero para $n \geq N(\varepsilon)$. Es decir, la *conjetura de Fermat sería correcta para casi todo n* . Lo anterior puede interpretarse geométricamente diciendo que *para casi todo n , las superficies z_n estarían comprendidas entre las dos superficies paralelas $L(x, y)$ y $L(x, y) + 1$* . Desafortunadamente, repetimos, la *convergencia no es uniforme*.

Desde el punto de vista histórico, es muy posible que la relación que hemos indicado entre el último teorema de Fermat y las superficies y curvas que hoy llamamos de Lamé, no le fuese desconocida a este último, pues son bien conocidos los intentos de Lamé para demostrar el último teorema de Fermat (Ver L. Dickson, *History of the theory of numbers*). Sin embargo, aquí, que sepamos, es la primera vez que ella se hace explícita.

5. ALGUNAS OTRAS PROPIEDADES DE $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ Y $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$

Empecemos con $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Podemos considerar cada una de estas matrices como una "tajada" o una "sección recta" del conjunto F . Cada tajada presenta como ya lo vimos una configuración tetrasimétrica lo que nos permite tener una visión muy clara de cómo es F para cada n , o mejor, cómo son los elementos de F para cada n ; pues cada vez que fijamos un $n = n_0$ este corte nos permite "ver" la estructura interna de F . (ver Figuras 2 y 3).

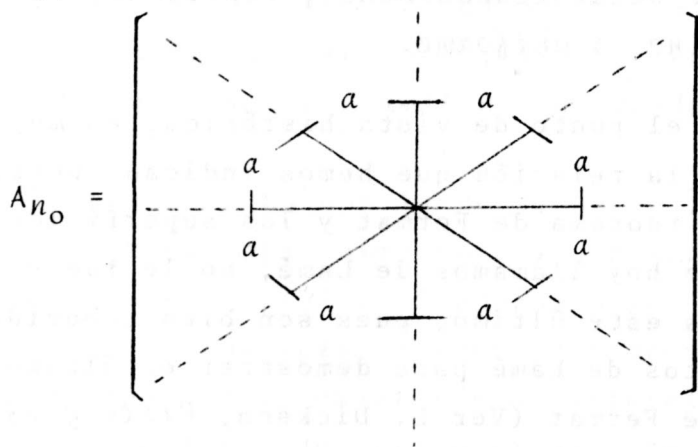


Figura 2

$$a \in F.$$

También podemos fijar un punto $(x, y) = (x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y hacer variar $n = 1, 2, 3, \dots$

y en este caso tendríamos una "muestra longitudinal" o "prueba longitudinal" del conjunto F . Esta "muestra" sería la sucesión de números reales $\{(|x_0|^n + |y_0|^n)^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$ decreciente y convergente al número entero $\max\{|x_0|, |y_0|\}$ que no es otro que el elemento $\ell_{(x_0, y_0)}$ de la matriz límite Λ .

En la página siguiente veremos la gráfica del conjunto F .

Veamos ahora con más detalle la sucesión

$$\{(|x|^n + |y|^n)^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}, \text{ con } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

El primer elemento de esta sucesión, o sea la función $z = |x| + |y|$ es una pirámide con vértice en el origen y se abre en el sentido positivo del eje z , sus curvas de nivel son curvas de Lamé de grado $v = 1$, es decir rombos.

Esta pirámide también es una superficie de Lamé con parámetro $v = 1$.

El segundo elemento de esta sucesión, o sea la función $z = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2}$ es un cono circular recto con vértice en el origen y se abre en el sentido positivo del eje z , como es obvio sus curvas de nivel son curvas de Lamé de grado $v = 2$,

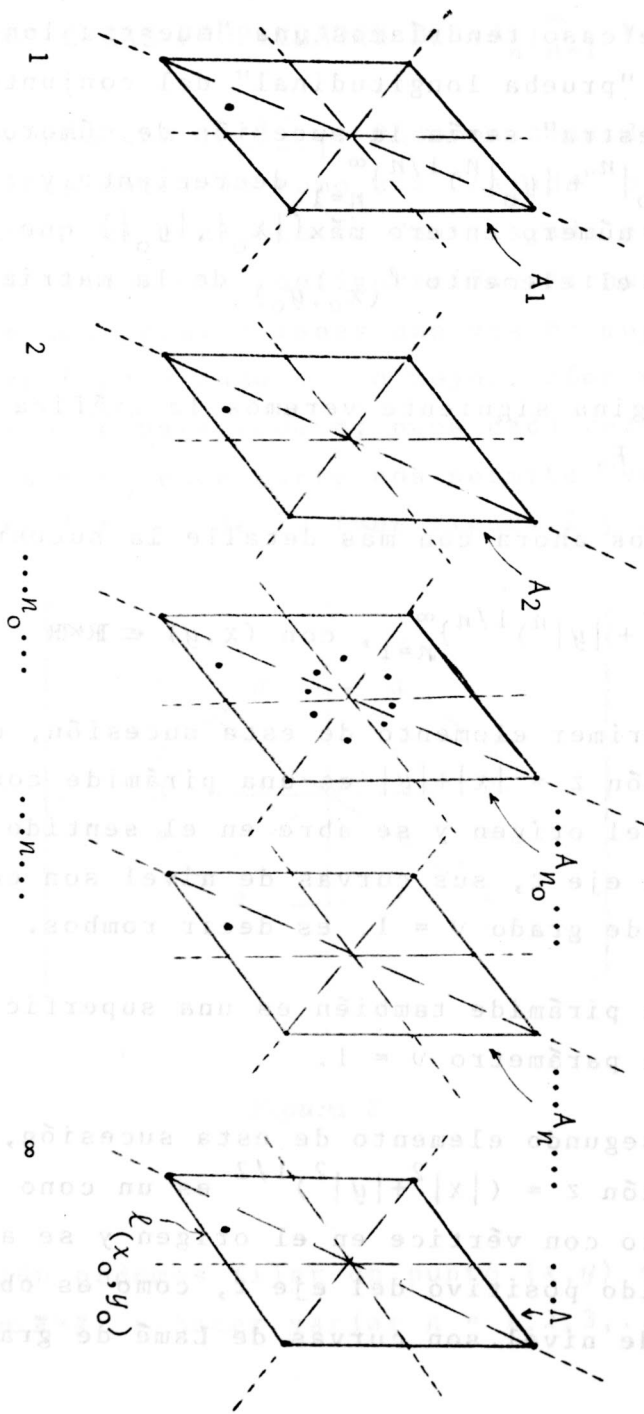


Figura 3

es decir circunferencias.. Este cono también es una superficie de Lamé de grado $v = 2$.

Para n a partir de 3, las funciones $z = (|x|^n + |y|^n)^{1/n}$ son conos rectos con vértices en el origen y se abren en el sentido positivo del eje z , sus curvas de nivel son curvas de lamé de grado $v = n$, es decir supercircunferencias.

Desde luego que todos estos conos son superficies de Lamé con parámetro $v = n$.

La función límite o superficie límite $L(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$ es una pirámide con vértice en el origen y se abre en el sentido positivo del eje z , sus curvas de nivel también son curvas de Lamé pero en el caso extremo $v = \infty$, es decir cuadrados.

Es claro entonces que todas las superficies cónicas para n a partir de 2 se encuentran entre los espacios bastante estrechos que hay entre las dos pirámides: $z = |x| + |y|$ y $z = \max\{|x|, |y|\}$.

Esta sucesión de superficies cónicas se puede ver como una flor cuyos pétalos de adentro hacia afuera son: pirámide, cono circular, cono supercircular, cono supercircular, ...pirámide.

Al cortar todas estas superficies por el plano $z = c_0 > 0$ obtenemos las curvas de nivel, así:

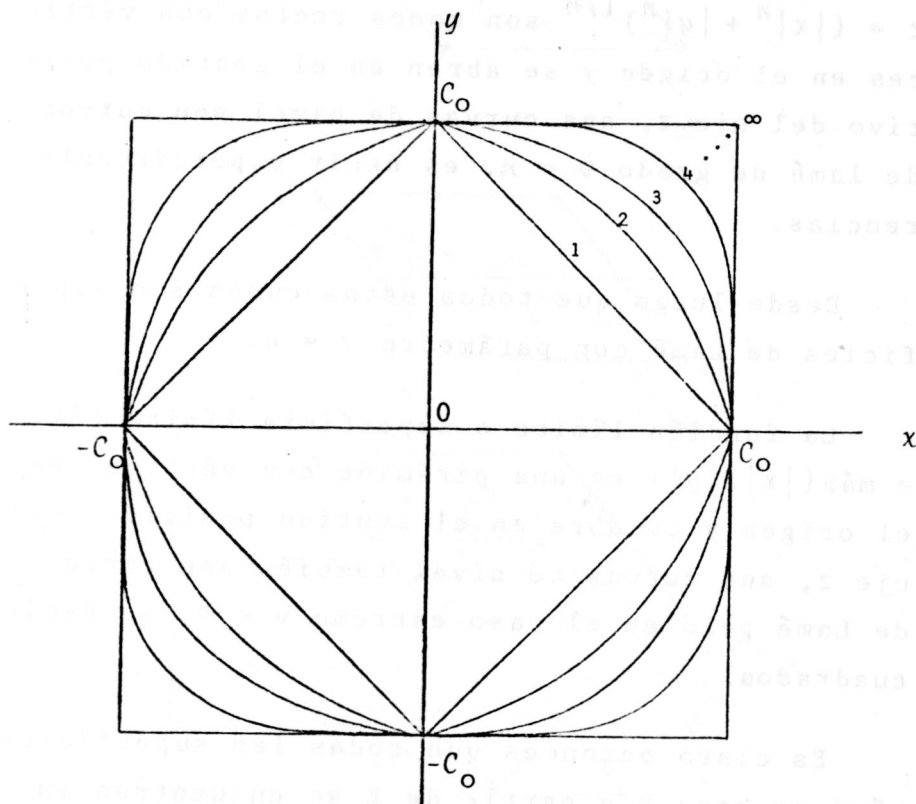


Figura 4

6. APENDICE.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 1.

- 1) La sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente.

En efecto, veamos que $-\frac{\partial z_n}{\partial n}$ es negativa para todo $x > 0$, todo $y > 0$ y todo n (o por lo menos a partir de un N).

$$\text{Sea} \quad \log z_n = \frac{1}{n} \log(x^n + y^n).$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n}(\log z_n) &= \frac{1}{z_n} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial n} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} + \log(x^n + y^n) \left(-\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{\partial z_n}{\partial n} = \frac{(x^n + y^n)^{1/n}}{n} \left(\frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} - \frac{1}{n} \log(x^n + y^n) \right)$$

Como $\frac{(x^n + y^n)^{1/n}}{n} > 0$ para $x > 0$, $y > 0$ y $n > 0$,

basta que:

$$\frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} < \frac{1}{n} \log(x^n + y^n)$$

para $x > 0$, $y > 0$ y $n > 0$.

Se cumple, pues si $0 < x < y$, el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} \right) = \log y$$

y $\frac{1}{n} \log(x^n + y^n) > \log y$ para $x > 0$, $y > 0$ y $n > 0$.

Luego:

$$\frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} < \frac{1}{n} \log(x^n + y^n)$$

si $0 < x < y$ y para $n \geq N_0$.

Si $0 < y < x$, el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} \right) = \log x$$

y $\frac{1}{n} \log(x^n + y^n) > \log x$ para $x > 0$, $y > 0$ y $n > 0$.

Luego:

$$\frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} < \frac{1}{n} \log(x^n + y^n)$$

si $0 < y < x$ y para $n \geq N_1$.

Sea $N = \max\{N_0, N_1\}$.

Luego: $\frac{\partial z_n}{\partial n} < 0$ para $x > 0$, $y > 0$ y $n \geq N$.

Luego la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente (a partir de N).

2) La sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a la función $L(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$ pero no uniformemente.

Tomamos el logaritmo natural de $(x^n + y^n)^{1/n}$ y aplicamos la regla de l'Hôpital.

Así:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log(x^n + y^n)^{1/n} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\log(x^n + y^n)}{n} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n}}{1} \right] = \begin{cases} \log y & \text{en } 1 < x < y \\ \log x & \text{en } 1 < y < x \end{cases} \end{aligned}$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + y^n)^{1/n} = \begin{cases} y & \text{en } 1 < x < y \\ x & \text{en } 1 < y < x \end{cases}$$

De donde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + y^n)^{1/n} = \max\{x, y\} \text{ para } x > 1 \text{ y } y > 1.$$

Por simetría:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|x|^n + |y|^n)^{1/n} = \max\{|x|, |y|\} \text{ para } |x| > 1 \text{ y } |y| > 1.$$

La convergencia no es uniforme pues el N grande

depende de x y de y .

En efecto:

$$|(x^n + y^n)^{1/n} - \max\{x, y\}| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < (x^n + y^n)^{1/n} - \max\{x, y\} < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + \max\{x, y\} < (x^n + y^n)^{1/n} < \varepsilon + \max\{x, y\}$$

$$\log(-\varepsilon + \max\{x, y\}) < \frac{1}{n} \log(x^n + y^n) < \log(\varepsilon + \max\{x, y\})$$

$$\frac{\log(-\varepsilon + \max\{x, y\})}{\log(x^n + y^n)} < \frac{1}{n} < \frac{\log(\varepsilon + \max\{x, y\})}{\log(x^n + y^n)}.$$

Luego

$$\frac{\log(x^n + y^n)}{\log(\varepsilon + \max\{x, y\})} < n < \frac{\log(x^n + y^n)}{\log(-\varepsilon + \max\{x, y\})}$$

como se ve, de esta desigualdad, N depende de (x, y) luego la convergencia no es uniforme.

* *

BIBLIOGRAFIA

- [1] Fandiño, R.E., *Reflexión de Matrices y Palindromía con resultados estadísticos*. Tesis de Magister. Universidad Nacional, Bogotá.

tá, 1984.

[2] Gardner, Martin., *Carnaval Matemático*, Alianza Editorial, Madrid, 1980.

[3] Gridgeman, Norman T., "Lamé Ovals", Math. Gazette, 54, 31-37, 1970.

* *

El presente artículo contiene solo algunos de los múltiples contextos en los cuales encuentra interpretación el último Teorema de Fermat. El lector interesado puede referirse, entre otros, a Brenner, J.L. y J. de Pillis Fermat's Equation $A^P + B^P = C^P$ for matrices of integers. Mathematics Magazine (Jan-Feb., 1982) pág. 12-15.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
BOGOTA. D.E.