

*Boletín de Matemáticas*

Vol. XX, Nº 1 (1986)

**APUNTES**

## INTERPRETACIONES GEOMETRICA Y MATRICIAL DEL ULTIMO TEOREMA DE FERMAT

Ramón E. Fandino Arbelaez

### INTRODUCCION.

En este artículo, daremos una interpretación geométrica y otra matricial del último Teorema de Fermat estudiando la función

$$z = (x^n + y^n)^{1/n}$$

cuando  $x$ ,  $y$  y  $n$  toman valores enteros positivos, lo que pensamos, es de por sí interesante. Para esto necesitaremos un orden para matrices, además de trabajar con las curvas de Lamé<sup>(1)</sup> ( $[2]$ ,  $[3]$ ), unas superficies que llamaremos "de

(1) Gabriel Lamé: Físico Francés del Siglo XIX. ( $[2]$ ,  $[3]$ ).

Lamé" y matrices palíndromes [1].

Agradezco al Dr. Victor Albis su invaluable ayuda en la corrección de los primeros manuscritos y la redacción final del presente trabajo así como sus recomendaciones muy acertadas sin las cuales no hubiera sido posible llevarlo a feliz término.

## 1. PRELIMINARES.

Dadas dos matrices  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$ ,  $m$  por  $n$ , con elementos en  $\mathbb{R}$ , definimos

$$A \leq B \Leftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij}, \quad \forall (i, j), \quad 1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n.$$

Es fácil ver que esta relación es un orden parcial. La definición anterior puede generalizarse a matrices infinitas, centradas en el origen de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , como sigue: si

$A = [a_{ij}]_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ ,  $B = [b_{ij}]_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ , al  $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ , definimos:

$$A \leq B \Leftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Nuevamente es fácil verificar que se tiene una relación de orden parcial.

Si ahora consideramos una matriz  $A = [a_{ij}]$ ,  $m$  por  $n$ , con elementos en  $\mathbb{R}$ , definimos la matriz  $A^{RH} = [a_{i, n-j+1}]$  como el *reflejo horizontal* de  $A$  y la matriz  $A^{RV} = [a_{m-i+1, j}]$  como el *reflejo vertical* de  $A$ .

Con estas operaciones es posible introducir la noción de *palíndromía*. Más precisamente: decimos que una matriz  $m \times n$ , con elementos en  $\mathbb{R}$ , es:

- a) *Palíndrome horizontal* si  $A = A^{RH}$ . Es decir, si es simétrica con respecto a la mediana vertical.

Por ejemplo,

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \text{y} \quad \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

son matrices palíndromes horizontales.

- b) *Palíndrome vertical* si  $A = A^{RV}$ . Es decir, si es simétrica con respecto a la mediana horizontal.

Por ejemplo, las traspuestas de las matrices en a) son palíndromes verticales.

- c) *Palíndrome doble* si  $A = A^{RH} = A^{RV}$ .

d) Tetrasimétrica si  $A = A^{RH} = A^{RV} = A^T$ .

Es claro que estas definiciones se extienden fácilmente a las matrices infinitas

$$[a_{ij}]_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$$

centradas en el origen de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . En este trabajo nos interesan especialmente las matrices tetrasimétricas infinitas.

## 2. CURVAS Y SUPERFICIES DE LAME.

Una curva u óvalo de Lamé es una curva cerrada plana definida por la ecuación

$$\frac{|x|^v}{a^v} + \frac{|y|^v}{b^v} = 1, \quad |x| \leq a, \quad |y| \leq b,$$

donde  $v \in \mathbb{R}$ ,  $v > 0$ . Por analogía con la ecuación de una elipse, los números reales  $a > 0$ ,  $b > 0$  se llaman los semiejes de la curva; el número  $v$  se llama el grado o parámetro de la misma. La siguiente propiedad resulta de la definición:

Si  $v \geq 2$  la curva es suave. Si  $0 < v < 2$ , la curva presenta puntos de retroceso en los vértices:

$$(a,0), (-a,0), (0,b), (0,-b).$$

La curva se dice un-*romboide* si  $0 < v < 1$ . Si  $v = 1$ , se ve fácilmente que representa a un *rombo*. Si  $1 < v < 2$ , se dice que la curva es una *subellipse* o *subcircunferencia*. Si  $v = 2$ , estamos ante una *circunferencia* o una *elipse*. Si  $v > 2$ , decimos que la curva es una *superellipse* o una *supercircunferencia*. Estas denominaciones se deben a Piet Hein, arquitecto y diseñador sueco, de este siglo [3], quien ha usado las curvas de Lamé para  $v = 2,5$ ,  $v = 2,71828$  y  $v = 3,162038$  en edificios y muebles ([2], [3]).

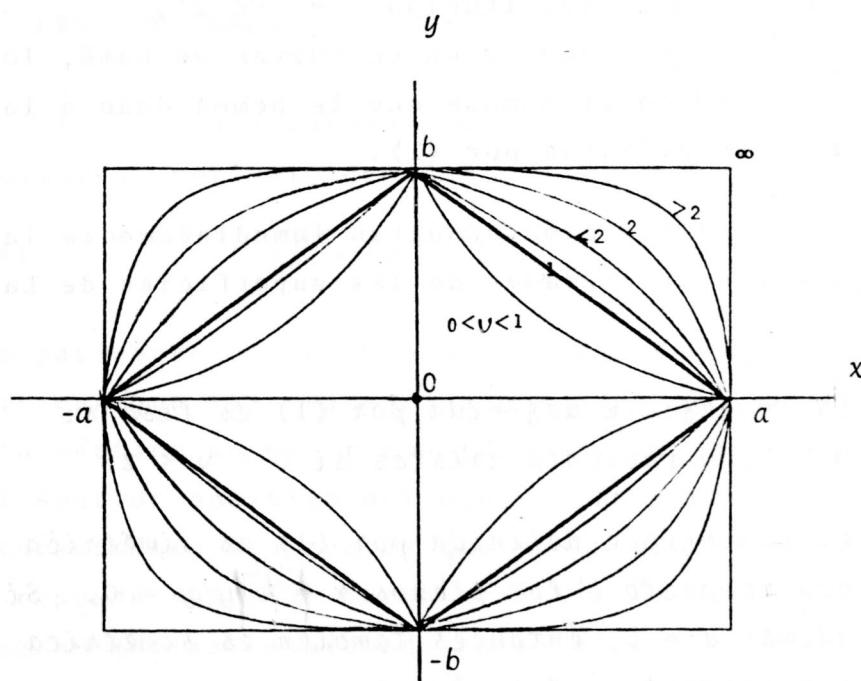


Figura 1

Ahora introducimos la noción de *superficie de Lamé*:

$$(1) \quad f_v(x, z) = z^v = \frac{|x|^v}{a^v} + \frac{|y|^v}{b^v}, \quad |x| \leq a, |y| \leq b.$$

El número  $v > 0$  se llama también el *grado o parámetro de la superficie*. Las curvas de nivel de esta superficie son de la forma

$$(2) \quad c = \frac{|x|^v}{a^v} + \frac{|y|^v}{b^v}, \quad (c \geq 0)$$

que mediante la sustitución  $x = \sqrt[v]{c} x'$ ,  
 $y = \sqrt[v]{c} y'$ , se convierten en curvas de Lamé, lo cual justifica el nombre que le hemos dado a la superficie definida por (1).

De la definición resultan inmediatamente las siguientes propiedades de las superficies de Lamé:

- 1) La superficie definida por (1) es lisa si  $v \geq 2$ , y presenta aristas si  $0 < v < 2$ .
- 2) La superficie definida por (1) es simétrica con respecto a los planos  $x = 0$  y  $y = 0$ . Si además  $a = b$ , entonces también es simétrica con respecto a los planos  $x = y$  y  $x = -y$ .

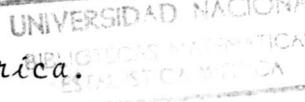
Con cada superficie de Lamé, de parámetro  $v$ , es posible asociar una matriz infinita:

$$(3) \quad A_v = [a_{ij}]_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}, \quad a_{ij} = f_v(i, j),$$

la cual llamamos matriz asociada a la superficie de Lamé  $f_v(x, y)$ . Por lo anterior, esta matriz tiene las siguientes propiedades:

La matriz infinita  $A_v$  es políndrome doble, centrada en el origen de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Si además  $a = b$ ,  $A_v$  es tetrasimétrica.



### 3. LAS FUNCIONES $z_n = (|x|^n + |y|^n)^{1/n}$ .

Para cada  $n$  entero positivo, tenemos la siguiente superficie de Lamé

$$(4) \quad z_n = (|x|^n + |y|^n)^{1/n},$$

de parámetro  $v = n$ . Sin dificultad se puede verificar que (4) representa una superficie cónica, con vértice en el origen  $(0, 0, 0)$ , que se abre en el sentido positivo del eje  $Oz$ . En efecto, sus generatrices son rectas que pasan por el origen y reposan sobre la curva  $c_0 = (|x|^n + |y|^n)^{1/n}$ , que se encuentra situada en el plano  $z = c_0 > 0$ .

La sucesión  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  formada por las curvas definidas por (4) tiene las siguientes propiedades:

**PROPOSICION 1.** (a)  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  es decreciente,  
 (b)  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge puntualmente a la función  $L(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$ , pero no uniformemente.

La demostración de esta proposición la haremos en el Apéndice. En virtud de (3), con cada  $n = 1, 2, \dots$  podemos asociar una matriz infinita:

$$A_n = [(|i|^n + |j|^n)^{1/n}]$$

donde  $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , la cual, hemos visto, es tetra simétrica y, en virtud de la Proposición 1, la sucesión  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  es decreciente y convergente a la matriz  $\Lambda = [\max\{|i|, |j|\}]$ .

$$\Lambda = \begin{pmatrix} & & & & & & \\ & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

#### 4. EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT.

Esta famosa conjetura se suele enunciar así:

No existe terna alguna  $(x, y, z)$  de números enteros positivos que satisfaga la ecuación diofántica

$$(5) \quad x^n + y^n = z^n,$$

para  $n$  entero mayor que 2.

Es claro que esta ecuación diofántica está relacionada con las superficies de Lamé, pues de (5) obtenemos:

$$(6) \quad z = (x^n + y^n)^{1/n},$$

$x$  y  $y$  positivos. Al reflejar (6) con respecto de los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  y con respecto al eje  $z$  obtenemos la superficie de Lamé

$$z = (|x|^n + |y|^n)^{1/n},$$

a la cual corresponde la matriz

$$A_n = [(|i|^n + |j|^n)^{1/n}] \quad (i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Observamos que el conjunto  $F = \{(x^n + y^n)^{1/n}; x, y, z \text{ enteros positivos}\}$  coincide con los valores que toman los elementos de los elementos de  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Es decir, el último teorema de Fermat es equivalente al siguiente enunciado:

*Los elementos de  $F$  son números irracionales para todo entero  $n$  mayor que 2.*  
o también,

*Todos los elementos de las matrices  $A_n$  (salvo los de las medianas) son irracionales cuando  $n$  es un entero mayor que 2.*  
o también:

*Basta que un elemento de  $A_n$ ,  $n \geq 3$  (exceptando los de las medianas), sea racional para que la conjetura de Fermat no sea verdadera.*

Ya hemos dicho que la sucesión  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge puntualmente, pero no uniformemente, a  $L(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$ . Supongamos por un momento que esta convergencia fuese uniforme, de modo que dado  $\varepsilon = 1$ , existiría un natural  $N(\varepsilon)$ , que no dependería del punto  $(x,y)$  para el cual se cumpliría:

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - L(x,y)| < 1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Pero, como  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  es decreciente,  $L(x,y) = \inf z_n$ ; por tanto

esacional es que sea menor que 1, lo que contradice la uniformidad de la convergencia.

$$L(x, y) < z_n < L(x, y) + 1$$

para  $n \geq N(\varepsilon)$  y para todo  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . En particular, si  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , entonces  $L(x, y)$  y  $L(x, y) + 1$  son dos enteros consecutivos (recuérdese que  $L(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$ ), esto implica que si  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $z_n$  no es entero para  $n \geq N(\varepsilon)$ . Es decir, la conjetura de Fermat sería correcta para casi todo  $n$ . Lo anterior puede interpretarse geométricamente diciendo que para casi todo  $n$ , las superficies  $z_n$  estarían comprendidas entre las dos superficies paralelas  $L(x, y)$  y  $L(x, y) + 1$ . Desafortunadamente, repetimos, la convergencia no es uniforme.

Desde el punto de vista histórico, es muy posible que la relación que hemos indicado entre el último teorema de Fermat y las superficies y curvas que hoy llamamos de Lamé, no le fuese desconocida a este último, pues son bien conocidos los intentos de Lamé para demostrar el último teorema de Fermat (Ver L. Dickson, *History of the theory of numbers*). Sin embargo, aquí, que sepamos, es la primera vez que ella se hace explícita.

## 5. ALGUNAS OTRAS PROPIEDADES DE $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ Y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$

Empecemos con  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Podemos considerar cada una de estas matrices como una "tajada" o una "sección recta" del conjunto  $F$ . Cada tajada presenta como ya lo vimos una configuración tetrasimétrica lo que nos permite tener una visión muy clara de cómo es  $F$  para cada  $n$ , o mejor, cómo son los elementos de  $F$  para cada  $n$ ; pues cada vez que fijamos un  $n = n_0$  este corte nos permite "ver" la estructura interna de  $F$ . (ver Figuras 2 y 3).

$$A_{n_0} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & a & & a & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Figura 2

$$a \in F.$$

También podemos fijar un punto  $(x, y) = (x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y hacer variar  $n = 1, 2, 3, \dots$

y en este caso tendríamos una "muestra longitudinal" o "prueba longitudinal" del conjunto  $F$ . Esta "muestra" sería la sucesión de números reales  $\{(|x_0|^n + |y_0|^n)^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$  decreciente y convergente al número entero  $\max\{|x_0|, |y_0|\}$  que no es otro que el elemento  $\ell_{(x_0, y_0)}$  de la matriz límite  $\Lambda$ .

En la página siguiente veremos la gráfica del conjunto  $F$ .

Veamos ahora con más detalle la sucesión

$$\{(|x|^n + |y|^n)^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}, \text{ con } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

El primer elemento de esta sucesión, o sea la función  $z = |x| + |y|$  es una pirámide con vértice en el origen y se abre en el sentido positivo del eje  $z$ , sus curvas de nivel son curvas de Lamé de grado  $v = 1$ , es decir rombos.

Esta pirámide también es una superficie de Lamé con parámetro  $v = 1$ .

El segundo elemento de esta sucesión, o sea la función  $z = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2}$  es un cono circular recto con vértice en el origen y se abre en el sentido positivo del eje  $z$ , como es obvio sus curvas de nivel son curvas de Lamé de grado  $v = 2$ ,

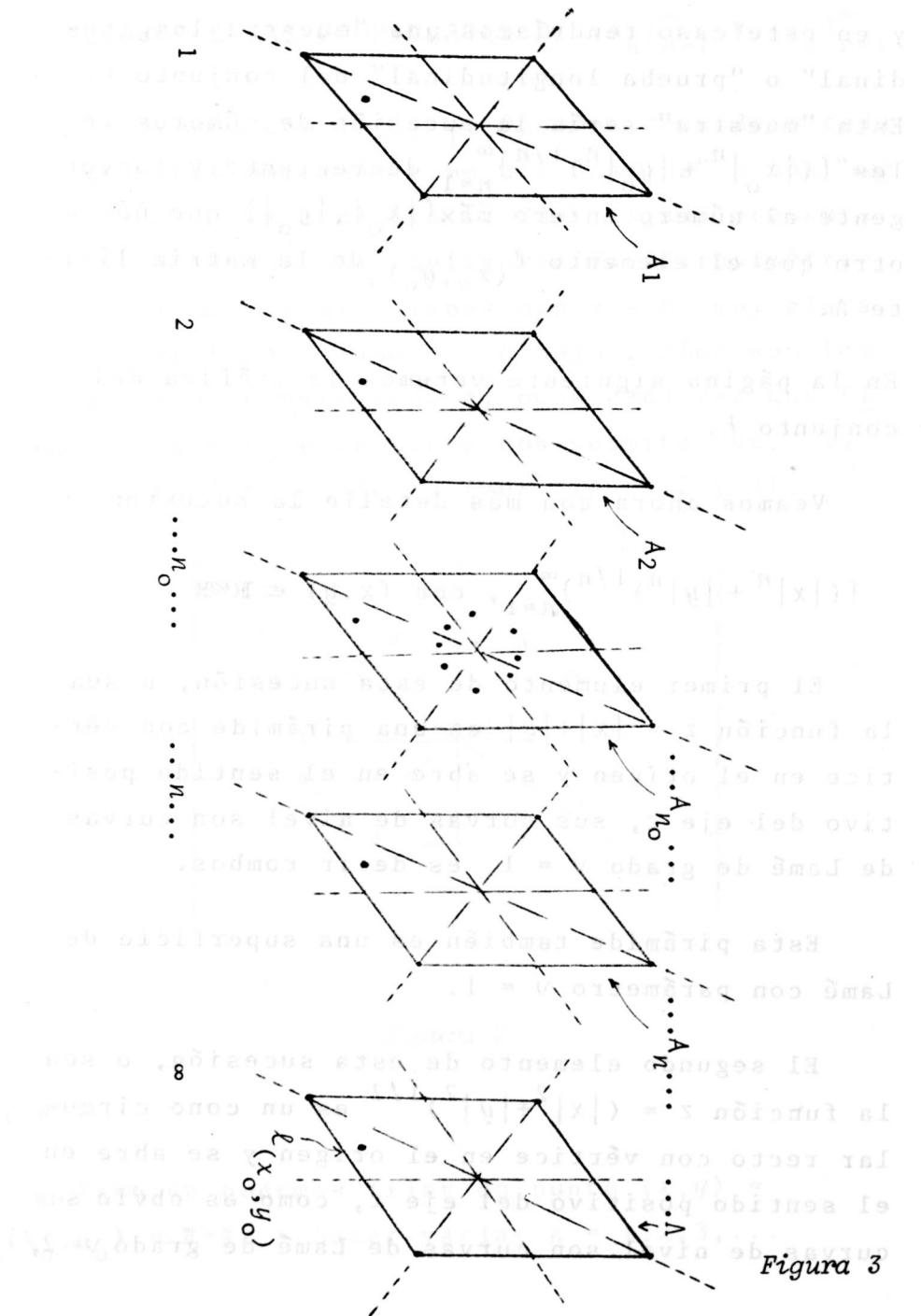


Figura 3

es decir circunferencias.. Este cono también es una superficie de Lamé de grado  $\nu = 2$ .

Para  $n$  a partir de 3, las funciones  $z = (|x|^n + |y|^n)^{1/n}$  son conos rectos con vértices en el origen y se abren en el sentido positivo del eje  $z$ , sus curvas de nivel son curvas de lamé de grado  $\nu = n$ , es decir supercircunferencias.

Desde luego que todos estos conos son superficies de Lamé con parámetro  $\nu = n$ .

La función límite o superficie límite  $L(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$  es una pirámide con vértice en el origen y se abre en el sentido positivo del eje  $z$ , sus curvas de nivel también son curvas de Lamé pero en el caso extremo  $\nu = \infty$ , es decir cuadrados.

Es claro entonces que todas las superficies cónicas para  $n$  a partir de 2 se encuentran entre los espacios bastante estrechos que hay entre las dos pirámides:  $z = |x| + |y|$  y  $z = \max\{|x|,|y|\}$ .

Esta sucesión de superficies cónicas se pue de ver como una flor cuyos pétalos de adentro hacia afuera son: pirámide, cono circular, cono supercircular, cono supercircular,...pirámide.

Al cortar todas estas superficies por el plano  $z = c_0 > 0$  obtenemos las curvas de nivel, así:

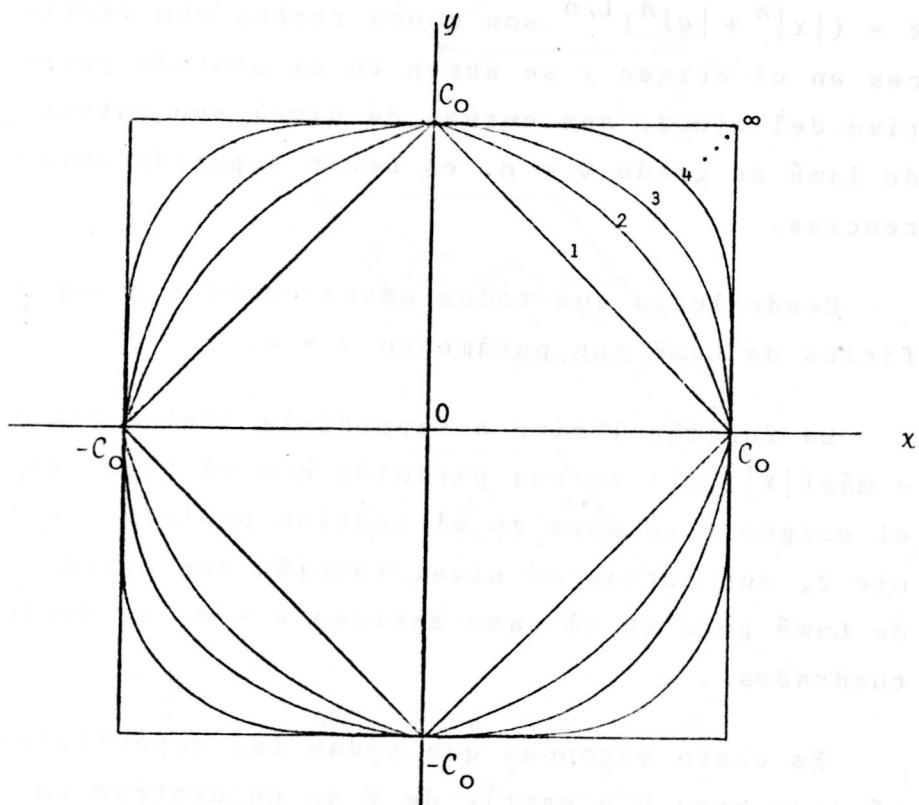


Figura 4

## 6. APENDICE.

### DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 1.

- 1) La sucesión  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  es decreciente.

En efecto, veamos que  $\frac{\partial z_n}{\partial n}$  es negativa para todo  $x > 0$ , todo  $y > 0$  y todo  $n$  (o por lo menos a partir de un  $N$ ).

$$\text{Sea } \log z_n = \frac{1}{n} \log(x^n + y^n).$$

Luego:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}(\log z_n) &= \frac{1}{z_n} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial n} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} + \log(x^n + y^n) \left(-\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{\partial z_n}{\partial n} = \frac{(x^n + y^n)^{1/n}}{n} \left( \frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} - \frac{1}{n} \log(x^n + y^n) \right)$$

$$\text{Como } \frac{(x^n + y^n)^{1/n}}{n} > 0 \text{ para } x > 0, y > 0 \text{ y } n > 0,$$

basta que:

$$\frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} < \frac{1}{n} \log(x^n + y^n)$$

para  $x > 0, y > 0$  y  $n > 0$ .

Se cumple, pues si  $0 < x < y$ , el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} \right) = \log y$$

y  $\frac{1}{n} \log(x^n + y^n) > \log y$  para  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $n > 0$ .

Luego:

$$\frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} < \frac{1}{n} \log(x^n + y^n)$$

si  $0 < x < y$  y para  $n \geq N_0$ .

Si  $0 < y < x$ , el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} \right) = \log x$$

y  $\frac{1}{n} \log(x^n + y^n) > \log x$  para  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $n > 0$ .

Luego:

$$\frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} < \frac{1}{n} \log(x^n + y^n)$$

si  $0 < y < x$  y para  $n \geq N_1$ .

Sea  $N = \max\{N_0, N_1\}$ .

Luego:  $\frac{\partial z_n}{\partial n} < 0$  para  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $n \geq N$ .

Luego la sucesión  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  es decreciente (a partir de  $N$ ).

2) La sucesión  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge puntualmente a la función  $L(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$  pero no uniformemente.

Tomamos el logaritmo natural de  $(x^n+y^n)^{1/n}$  y aplicamos la regla de l'Hôpital.

Así:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\log(x^n + y^n)^{1/n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\log(x^n + y^n)}{n} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^n \log x + y^n \log y}{x^n + y^n} \right] = \begin{cases} \log y & \text{en } 1 < x < y \\ \log x & \text{en } 1 < y < x \end{cases}$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + y^n)^{1/n} = \begin{cases} y & \text{en } 1 < x < y \\ x & \text{en } 1 < y < x \end{cases}$$

De donde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + y^n)^{1/n} = \max\{x, y\} \text{ para } x > 1 \text{ y } y > 1.$$

Por simetría:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|x|^n + |y|^n)^{1/n} = \max\{|x|, |y|\} \text{ para } |x| > 1 \text{ y } |y| > 1.$$

La convergencia no es uniforme pues el  $N$  grande

depende de  $x$  y de  $y$ .

En efecto:

$$|(x^n + y^n)^{1/n} - \max\{x, y\}| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < (x^n + y^n)^{1/n} - \max\{x, y\} < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + \max\{x, y\} < (x^n + y^n)^{1/n} < \varepsilon + \max\{x, y\}$$

$$\log(-\varepsilon + \max\{x, y\}) < \frac{1}{n} \log(x^n + y^n) < \log(\varepsilon + \max\{x, y\})$$

$$\frac{\log(-\varepsilon + \max\{x, y\})}{\log(x^n + y^n)} < \frac{1}{n} < \frac{\log(\varepsilon + \max\{x, y\})}{\log(x^n + y^n)} .$$

Luego

$$\frac{\log(x^n + y^n)}{\log(\varepsilon + \max\{x, y\})} < n < \frac{\log(x^n + y^n)}{\log(-\varepsilon + \max\{x, y\})}$$

como se ve, de esta desigualdad,  $N$  depende de  $(x, y)$  luego la convergencia no es uniforme.

\* \*

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Fandiño, R.E., Reflexión de Matrices y Palindromía con resultados estadísticos. Tesis de Magister. Universidad Nacional, Bogotá

nes de tâ, 1984.

- [2] Gardner, Martin., *Carnaval Matemático*, Alianza Editorial, Plaza Editorial, Madrid, 1980.
- [3] Gridgeman, Norman T., "Lamé Ovals", *Math. Gazette*, 54, 31-37, 1970.

A. Entusiastas matemáticos  
\* \*

Ministerio de Educación Nacional de Colombia

El presente artículo contiene solo algunos de los múltiples contextos en los cuales encuentra interpretación el último Teorema de Fermat. El lector interesado puede referirse, entre otros, a Brenner, J.L.y J. de Pillis "Fermat's Equation  $A^P + B^P = C^P$  for matrices of integers.

*Mathematics Magazine* (Jan-Feb., 1982) pág. 12-15.

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad Nacional de Colombia

BOGOTÁ. D.E.

Ricardo Lozano, profesor de Matemáticas

Jorge Martínez, Director, Centro de Matemáticas

enero de 1984

Jorge Martínez, Director, Centro de Matemáticas

enero de 1984

Jorge Martínez, Director, Centro de Matemáticas

enero de 1984

Jorge Martínez, Director, Centro de Matemáticas

enero de 1984

Jorge Martínez, Director, Centro de Matemáticas