

LA TOPOLOGIA C DE \mathbb{R}^*

I. Mantilla, J. M. Muñoz Q., Yu Takeuchi

RESUMEN. En [4] se estudió la topología del orden de los reales no estándar \mathbb{R}^* , la más natural desde el punto de vista del principio de transferencia. En [1] se trabajó con una segunda topología de \mathbb{R}^* menos fina que la anterior, que se denominó la *microtopología* y se denotó por \mathcal{B} . Nos proponemos en este artículo analizar una tercera topología de \mathbb{R}^* a la cual llamaremos \mathcal{C} , menos fina que la microtopología; estableceremos algunas relaciones entre estas dos últimas y, para los reales no estándar finitos \mathbb{R}_f^* , caracterizaremos sus subconjuntos abiertos, cerrados y compactos para la topología \mathcal{C} . Además compararemos la continuidad con respecto a las diferentes topologías.

DEFINICION 1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^*$. Decimos que A es C -abierto si para todo $\tau \in A$, existe $\kappa > 0$ (real) tal que:

$$(\tau - \kappa, \tau + \kappa)^* \subseteq A. \quad (1)$$

La colección C de todos los C -abiertos de \mathbb{R}^* es una topología para \mathbb{R}^* .

En efecto:

$$(i) \quad \emptyset, \mathbb{R}^* \in C.$$

(ii) Sean A y B C -abiertos y tomemos $\tau \in A \cap B$; entonces existen κ_A y κ_B reales positivos tales que:

$$(\tau - \kappa_A, \tau + \kappa_A)^* \subseteq A \quad \text{y} \quad (\tau - \kappa_B, \tau + \kappa_B)^* \subseteq B.$$

Escojamos un real κ que cumpla:

$$0 < \kappa < \min\{\kappa_A, \kappa_B\}.$$

En tal caso,

$$(\tau - \kappa, \tau + \kappa)^* \subseteq A \cap B$$

por lo tanto $A \cap B$ es C -abierto.

(1) $(\tau - \kappa, \tau + \kappa)^* = \{\alpha \in \mathbb{R}^* \mid \tau - \kappa < \alpha < \tau + \kappa\}$. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $(a, b)^*$ coincide con la extensión elemental a \mathbb{R}^* del intervalo (a, b) de \mathbb{R} .

(iii) Si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de C -abiertos y $\tau \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\tau \in A_\lambda$ y por tanto existe un real $\epsilon > 0$ tal que $(\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)^* \subseteq A_\lambda$.

Se sigue que $(\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)^* \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Esto significa que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es C -abierto.

EJEMPLO 1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^*$ y consideremos la micro-vecindad de α , $E(\alpha) = \{\tau \in \mathbb{R}^* \mid \tau \approx \alpha\}$.

Puesto que, para todo real positivo ϵ , se tiene que $\alpha + \epsilon \neq \alpha$, concluimos que $E(\alpha)$ no es C -abierto.

EJEMPLO 2. Ningún intervalo no-estándar es C -abierto. Comprobémoslo para el intervalo $(\alpha, \beta)^*$, con $\alpha \neq \beta$ (el caso $\alpha \approx \beta$ es trivial).

Sea ϵ un infinitesimal positivo y

$$\tau = \alpha + \epsilon \in (\alpha, \beta)^*.$$

Si suponemos que $(\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)^* \subseteq (\alpha, \beta)^*$ para algún real $\epsilon > 0$, entonces tenemos que:

$$\alpha < \tau - \epsilon < \tau; \quad \text{con} \quad \tau \approx \alpha$$

En tal caso, $\tau - \epsilon \approx \tau$, es decir, $\epsilon = 0$; lo cual es absurdo.

EJEMPLO 3. Si a un intervalo no-estándar cualquiera le quitamos las micro-vecindades de sus extremos, obtenemos un C -abierto. Así, por ejemplo, el conjunto

$$A = (\alpha, \beta)^* - \{E(\alpha) \cup E(\beta)\} \text{ es } C\text{-abierto.}$$

En efecto, para $\tau \in A$, tenemos que $\tau \neq \alpha$ y $\tau \neq \beta$. Por lo tanto, existen reales positivos κ_0 y κ_1 tales que:

$$\tau - \alpha \geq \kappa_0 \quad \text{y} \quad \beta - \tau \geq \kappa_1$$

o sea,

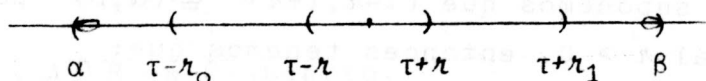
$$\alpha \leq \tau - \kappa_0 \quad \tau + \kappa_1 \leq \beta.$$

Si κ es un real tal que

$$0 < \kappa < \min\{\kappa_0, \kappa_1\},$$

entonces

$$\alpha < \tau - \kappa \quad \text{y} \quad \tau + \kappa < \beta.$$



Es decir, $(\tau - \kappa, \tau + \kappa)^* \subseteq (\alpha, \beta)^*$. Pero $\tau - \kappa \neq \alpha$, pues en caso contrario tendríamos que $\tau - \kappa_0 \approx \tau - \kappa$ y entonces $\kappa_0 \approx \kappa$ (absurdo!). De manera similar, $\tau + \kappa \neq \beta$, y podemos entonces concluir que:

$$(\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)^* \subseteq A. \blacktriangle$$

Obsérvese que si α y β son finitos y $a = \text{Est } \alpha$, $b = \text{Est } \beta$, entonces el conjunto A del último ejemplo puede expresarse como unión de las micro-vecindades de los reales pertenecientes al intervalo real (a, b) . Es decir,

$$A = \bigcup_{x \in (a, b)} E(x)$$

Comprobemos este hecho:

(i) Si $\tau \in A$, entonces $\alpha < \tau < \beta$ con $\tau \neq \alpha$, $\tau \neq \beta$.

Llamemos $x = \text{Est } \tau$. Se tiene entonces que $a < x < b$ y $\tau \in E(x)$; lo cual significa que

$$\tau \in \bigcup_{x \in (a, b)} E(x).$$

Así

$$A \subseteq \bigcup_{x \in (a, b)} E(x).$$

(ii) Si existe $x \in (a, b)$ tal que $\tau \approx x$, entonces

$$a < x = \text{Est } \tau < b,$$

Por lo tanto, $\alpha < \tau < \beta$. Pero $\tau \neq \alpha$; pues en caso contrario, $\alpha \approx x$, o sea, $a = x$ (absurdo!).

De la misma forma, $\tau \neq \beta$, luego:

$$\tau \in (\alpha, \beta)^* - \{E(\alpha) \cup E(\beta)\} = A$$

esto es,

$$\bigcup_{x \in (a,b)} E(x) \subseteq A.$$

Usando los resultados de (i) y (ii) concluimos que:

$$A = \bigcup_{x \in (a,b)} E(x).$$

Se deduce también que para todo $\alpha \in \mathbb{R}^*$ y todo real $\epsilon > 0$,

$$\bigcup_{x \in (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}} E(\alpha+x) = (\alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon)^* - \{E(\alpha-\epsilon) \cup E(\alpha+\epsilon)\}$$

De esta forma, podemos afirmar que las uniones de microvecindades sobre intervalos reales abiertos son C -abiertos. Nótese también que la extensión elemental de cualquier intervalo abierto de \mathbb{R} , omitiendo las micro-vecindades de sus extremos, es C -abierto, ya que

$$(a,b)^* - \{E(a) \cup E(b)\} = \bigcup_{\substack{a < x < b \\ x \in \mathbb{R}}} E(x)$$

Conceptos topológicos tales como C -conexidad, C -compacidad, C -continuidad, etc., se definen de manera natural; así por ejemplo, un conjunto es C -cerrado si su complemento es C -abierto, y no es difícil ver entonces que si a un intervalo no-estándar cualquiera agregamos las micro-

vecindades de sus extremos, obtenemos un C -cerrado.

PROPOSICION 1. La topología C de \mathbb{R}^* , es menos fina que la micro-topología B ($C \leq B$).

Demostración. Sea A un C -abierto. Si $\tau \in A$, existe un real $\epsilon > 0$ tal que:

$$(\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)^* \subseteq A;$$

luego, para todo $\sigma \approx \tau$ se tiene que

$$\sigma \in (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)^* \subseteq A.$$

Es decir, $\sigma \in A$ y, por lo tanto, A es micro-abierto. ▲

Usando esta proposición podemos establecer la siguiente relación entre las tres topologías conocidas de \mathbb{R}^* :

$$C \leq B \leq O.$$

Es conveniente observar la presencia de conjuntos abiertos y cerrados, diferentes de \emptyset y \mathbb{R}^* , en las tres topologías. Así por ejemplo, el conjunto de los números no-estándar finitos \mathbb{R}_f^* , es C -abierto, C -cerrado, micro-abierto, micro-cerrdo, O -abierto⁽²⁾ y O -cerrado. La misma situación se presenta con el conjunto de los números no-

estándar infinitos \mathbb{R}_I^* .

Merece resaltarse también el hecho de que \mathbb{R}^* no es un conjunto conexo en ninguna de estas topologías.

DEFINICION 2. Sean $S \subseteq \mathbb{R}^*$ y (S_n) una sucesión de subconjuntos de \mathbb{R} . Diremos que S es generado por (S_n) si

$$S = \{\tau = [(x_n)] \in \mathbb{R}^* / x_n \in S_n \text{ para casi todo } n\}$$

En tal caso, escribiremos $S = \text{gen}(S_n)$ o simplemente $S \in G$.

Por ejemplo, los intervalos no-estándar son conjuntos generados.

PROPOSICION 2. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^*$, $S = \text{gen}(S_n)$. τ es un punto C -interior⁽³⁾ de S ($\tau \in \overset{\circ}{S}^C$) si y sólo si τ es un punto microinterior de S ($\tau \in \overset{\circ}{S}^B$).

Demostración. \Rightarrow) Inmediato, ya que $C \leq B$.

(2) \emptyset -abierto quiere decir, abierto para la topología de orden \emptyset .

(3) τ es C -interior de S , si existe un C -abierto G tal que $\tau \in G \subseteq S$. Se deduce que S es C -abierto, si y sólo si todo punto de S es C -interior de S . Especialmente,

$$(\alpha, \beta)^* - \{E(\alpha) \cup E(\beta)\} = (\overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{\beta})^*$$

\Leftarrow) Tomemos $\tau = [(x_n)] \in \overset{\circ}{S}^B$. Entonces $E(\tau) \subseteq S$.
 Llamemos $\mathcal{D} = \{\alpha \mid (\alpha, \tau)^* \subseteq S\}$.
 Es fácil ver que \mathcal{D} es un conjunto generado; además $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ya que $\tau \in \overset{\circ}{S}^B$.

Ahora bien, veamos que existe un real $\kappa > 0$ tal que $(\tau - \kappa, \tau]^* \subseteq S$. Podemos suponer que \mathcal{D} es acotado inferiormente, pues en caso contrario la situación es evidente. En tal caso, existe el extremo inferior de \mathcal{D} .

Sea $\alpha(\tau) = \inf \mathcal{D}$.

Obsérvese que si $\alpha(\tau) \approx \tau$, entonces para todo infinitesimal positivo ε , se tiene que

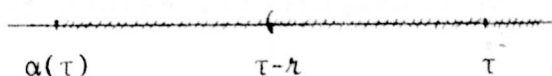
$$(\alpha(\tau) - \varepsilon, \tau)^* \subseteq E(\tau) \subseteq S;$$

es decir, $(\alpha(\tau) - \varepsilon) \in \mathcal{D}$ (absurdo!). Por lo tanto, $\alpha(\tau) \neq \tau$.

Escojamos entonces un real positivo κ que cumpla:

$$0 < \kappa < \tau - \alpha(\tau);$$

evidentemente se tiene que $(\tau - \kappa, \tau]^* \subseteq S$



Mediante un procedimiento análogo, se puede mostrar que existe $\kappa' > 0$ (real) tal que $[\tau, \tau + \kappa')^* \subseteq S$. Usando estos dos resultados, tenemos que

$$(\tau - \kappa, \tau + \kappa') \subseteq S;$$

por lo tanto

$$\tau \in \overbrace{(\tau - \kappa, \tau + \kappa')^*}^{\circ C} \subseteq \overset{\circ}{S} \overset{\circ}{C}. \quad \blacktriangle$$

La proposición anterior nos permite concluir que si S es generado y micro-abierto, entonces S es C -abierto; o sea, las topologías C y B son equivalentes para el caso de conjuntos generados.

PROPOSICIÓN 3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}_F^*$ un C -abierto. $\tau \in A$ si y sólo si $\text{Est}\tau \in A_0$, donde $A_0 = \{\text{Est}\tau \mid \tau \in A\}$. En consecuencia se tiene que $A_0 = A \cap \mathbb{R}$.

Demostración. \Rightarrow) Trivial.

\Leftarrow) Si $\text{Est}\tau \in A_0$, existe $\sigma \in A$ con $\sigma \approx \tau$. Puesto que $C < B$, entonces $\tau \in A$. \blacktriangle

COROLARIO. Si $A \subseteq \mathbb{R}_F^*$ es C -abierto, entonces A_0 es abierto en \mathbb{R} con la topología usual.

Demostración. Si $x \in A_0$, entonces $x = \text{Est}x \in A_0$, luego $x \in A$; por consiguiente, existe $\kappa > 0$ real, tal que

$$(x - \kappa, x + \kappa)^* \subseteq A,$$

entonces

$$(x-h, x+h)^* \cap \mathbb{R} \subseteq A \cap \mathbb{R} = A_0.$$

Por lo tanto A_0 es abierto. \blacktriangle

TEOREMA 1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}_F^*$.

A es C -abierto si y sólo si existe A_0 abierto en \mathbb{R} tal que:

$$A = \bigcup_{x \in A_0} E(x).$$

Demostración. \Leftarrow) Si $\tau \in A$, existe $x_0 \in A_0$ tal que $\tau \in E(x_0)$; y por tanto existe $h > 0$ (real) tal que:

$$\mathbb{R} \supseteq (x_0-h, x_0+h) \subseteq A_0 \quad \text{y} \quad x_0 = \text{Est}\tau.$$

En tal caso,

$$\tau \in \bigcup_{\substack{|x-x_0|<h \\ x \in \mathbb{R}}} E(x) \subseteq \bigcup_{x \in A_0} E(x) = A$$

Puesto que $\bigcup_{x \in (x_0-h, x_0+h) \subseteq \mathbb{R}} E(x)$ es C -abierto,

se sigue que τ es un punto C -interior de A y, por lo tanto, A es C -abierto.

\Rightarrow) Si A es C -abierto, entonces por el corolario de la proposición 3, $A_0 = \{\text{Est}\tau \mid \tau \in A\}$ es abierto en \mathbb{R} y

$$A = \bigcup_{x \in A_0} E(x). \quad \blacktriangle$$

Como consecuencia del teorema anterior se tiene un resultado similar para C -cerrados.

PROPOSICION 4. $S \subseteq \mathbb{R}_F^*$ es C -cerrado si y sólo si existe un cerrado S_0 de \mathbb{R} , tal que

$$S = \bigcup_{x \in S_0} E(x).$$

Demostración. \Rightarrow) Puesto que \mathbb{R}_F^* es un conjunto C -cerrado y también C -abierto, entonces $\mathbb{R}_F^* - S$ es C -abierto. Si se tiene en cuenta que

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}} E(x) = \mathbb{R}_F^*,$$

del teorema anterior se sigue que

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}} E(x) - S = \bigcup_{x \in A_0} E(x)$$

para algún abierto A_0 de \mathbb{R} , luego

$$S = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} E(x) - \bigcup_{x \in A_0} E(x) = \bigcup_{x \in \mathbb{R} - A_0} E(x),$$

ya que $E(x) \cap E(y) = \emptyset$ para todo $x \neq y$.

Llamando $S_0 = \mathbb{R} - A_0$, se concluye lo deseado.

\Leftarrow) Supongamos que $S = \bigcup_{x \in S_0} E(x)$, con S_0 un cerrado

do de \mathbb{R} . Es claro que $\mathbb{R}-S_0$ es un abierto de \mathbb{R} y que:

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}-S_0} E(x) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} E(x) - \bigcup_{x \in S_0} E(x)$$

es C -abierto, es decir, \mathbb{R}_F^*-S es C -abierto. En tal caso, $\mathbb{R}^*-S = \mathbb{R}_I^* \cup (\mathbb{R}_F^*-S)$ es C -abierto, pues \mathbb{R}_I^* lo es. Por lo tanto, S es C -cerrado. \blacktriangle

Obsérvese además que si $S \subseteq \mathbb{R}_F^*$ es C -cerrado entonces $S_0 = \{\text{Est} \tau \mid \tau \in S\}$ es cerrado de \mathbb{R} y además:

$$S = \bigcup_{x \in S_0} E(x).$$

PROPOSICION 5. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $E(\alpha)$ es el más pequeño C -cerrado que contiene a α .

Demostración. En primer lugar, veamos que $E(\alpha)$ es C -cerrado. Si $\tau \notin E(\alpha)$, entonces $\tau \neq \alpha$ y, por lo tanto, existe un real $\epsilon > 0$ tal que $|\tau - \alpha| \geq \epsilon$. En tal caso, $(\tau - \epsilon/2, \tau + \epsilon/2)^* \subseteq \{E(\alpha)\}^C$, de donde $\{E(\alpha)\}^C$ es C -abierto y concluimos que $E(\alpha)$ es C -cerrado.

Si A es un C -cerrado que contiene a α y $\tau \notin A$, entonces existe un real positivo ϵ tal que

$$(\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)^* \subseteq A^C \quad (= \text{complemento del conjunto } A).$$

Por lo tanto, $\tau \neq \alpha$, de donde,

$$E(\alpha) \subseteq A.$$

EJEMPLO 4. Sea α un número no-estándar arbitrario y consideremos el conjunto unitario $A = \{\alpha\}$. De la proposición anterior se desprende que A no es \mathcal{C} -cerrado; sin embargo, podemos pensar en encontrar el conjunto de puntos de acumulación de A , o derivado de A , que notaremos $\mathcal{D}(A)$.

Es obvio que $\alpha \notin \mathcal{D}(A)$; veamos qué sucede con los números que son infinitamente próximos a α :

Si $\alpha \neq \tau \approx \alpha$, entonces cualquier \mathcal{C} -abierto G que contenga a τ , debe contener un intervalo no-estándar abierto, de radio real, con centro en τ y éste necesariamente contiene a α . Por lo tanto, los puntos infinitamente próximos a α son puntos de acumulación de A es decir,

$$E(\alpha) - \{\alpha\} \subseteq \mathcal{D}(A). \quad (I)$$

Examinemos ahora los puntos que no son infinitamente próximos a α .

Si $\tau \neq \alpha$ y $n = \text{Est}|\tau - \alpha|^{(4)}$, entonces, llamando G al \mathcal{C} -abierto definido por

(4) Se puede suponer que $|\tau - \alpha|$ es finito; en caso contrario, n puede ser cualquier real.

$$G = (\tau - \eta/2, \tau + \eta/2)^* - \{E(\tau - \eta/2) \cup E(\tau + \eta/2)\}.$$

tenemos que

$$(G - \{\tau\}) \cap A = \emptyset.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{D}(A) \subseteq E(\alpha) - \{\alpha\}. \quad (II)$$

De (I) y (II) concluimos que

$$\mathcal{D}(A) = E(\alpha) - \{\alpha\}. \quad \blacktriangle$$

EJEMPLO 5. Examinemos a \mathbb{R} como subconjunto de \mathbb{R}^* .

Recordemos que los reales son puntos aislados en \mathbb{R}^* con la topología de orden y con la micro-topología, sin embargo esto no sucede con la topología \mathcal{C} . En efecto, si $x \in \mathbb{R}$, entonces para todo \mathcal{C} -abierto G que contenga a x como elemento, existe $\eta > 0$ (real) tal que $(x - \eta, x + \eta)^* \subseteq G$.

En tal caso,

$$[(x - \eta, x + \eta)^* - \{x\}] \cap \mathbb{R} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto

$$(G - \{x\}) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset.$$

Es evidente que los números no-estándar infinitos no son puntos de acumulación de \mathbb{R} y que, si $\alpha \in \mathbb{R}_F^*$, entonces $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, de donde,

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_F^*$$

Podemos entonces concluir que \mathbb{R} no es C -cerrado.

DEFINICION 3. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^*$. Decimos que S es C -compacto, si de todo cubrimiento de S con C -abiertos, se puede extraer un cubrimiento finito.

PROPOSICION 6. Sean, $K \subseteq \mathbb{R}_F^*$, $K_0 = \{\text{Est} \tau \mid \tau \in K\}$ y $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de C -abiertos.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $A_{\lambda,0} = \{\text{Est} \tau \mid \tau \in A_\lambda\}$. Entonces $K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, si y sólo si $K_0 \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda,0}$.

Demostración. \Rightarrow) Si $x \in K_0$, entonces $x = \text{Est} \tau$ para algún $\tau \in K$ y $K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Luego, $x = \text{Est} \tau$ y $\tau \in A_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$. Esto significa que $x \in A_{\lambda,0}$ para algún $\lambda \in \Lambda$; es decir, $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda,0}$. Por lo tanto $K_0 \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda,0}$.

\Leftarrow) Si $\tau \in K$, entonces $\text{Est} \tau \in K_0 \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda,0}$ y, en tal caso, $\text{Est} \tau \in A_{\lambda,0}$ para algún $\lambda \in \Lambda$.

Como A_λ es C -abierto, $\tau \in A_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$, y se sigue que $K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. \blacktriangle

TEOREMA 2. $K \subseteq \mathbb{R}_F^*$ es C -compacto si y sólo si $K_0 = \{\text{Est} \tau \mid \tau \in K\}$ es compacto en \mathbb{R} .

Demostración. \Rightarrow) Supongamos que $\{G_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de K_0 .

Para cada $i \in I$, definimos $A_i = \{\tau \mid \text{Est} \tau \in G_i\}$. Entonces, A_i es C -abierto para cada $i \in I$ y, según la proposición 6,

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

Como K es C -compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Por lo tanto, de la proposición anterior, tenemos que

$$K_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_i$$

\Leftarrow) Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un cubrimiento de K por C -abiertos. Entonces $\{A_{\lambda,0}\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un cubrimiento abierto de K_0 . Puesto que K_0 es compacto, existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, tales que $K_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_{\lambda_i,0}$.

Usando nuevamente la proposición anterior, concluimos que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_{\lambda_i}. \blacktriangle$$

COROLARIO. Si $K \subseteq \mathbb{R}_F^*$ es C -compacto, entonces K es acotado con una cota finita.

Demostración. Si K es C -compacto, entonces K_0 es compacto en \mathbb{R} y por lo tanto acotado en \mathbb{R} . Luego, si M es una cota de K_0 , entonces $M+1$ lo es de K . \blacktriangle

El recíproco de este corolario no es cierto. Es decir, la acotación finita no es una condición suficiente para la C -compacidad.

$A = (0,1)^* - \{E(0) \cup E(1)\} \subseteq \mathbb{R}_F^*$ es acotado por $1 \in \mathbb{R}_F^*$ y no es C -compacto, pues, si lo fuera, $A_0 = (0,1)^* \cap \mathbb{R}$ (= intervalo real $(0,1)$) sería compacto en \mathbb{R} .

Es de anotar también que el hecho de que un conjunto sea C -compacto, no implica que sea C -cerrado, como es el caso de los conjuntos unitarios de \mathbb{R}^* . Así mismo, un conjunto C -cerrado y acotado, no necesariamente es C -compacto. Por ejemplo, \mathbb{R}_F^* es C -cerrado y acotado por cualquier número no-es tándar infinito. Sin embargo no es C -compacto, pues si lo fuera, del Teorema 2 tendríamos que \mathbb{R} sería compacto, lo cual es absurdo.

PROPOSICION 7. Si $K \subseteq \mathbb{R}_F^*$ es C -cerrado y de acotación finita, entonces K es C -compacto.

Demostración. Si K es C -cerrado, entonces

$$K = \bigcup_{x \in K_0} E(x),$$

donde $K_0 = \{\text{Est} \tau \mid \tau \in K\}$.

Puesto que K_0 es cerrado y acotado en \mathbb{R} , ya que K es C -cerrado y de acotación finita, se tiene

que K_0 es compacto en \mathbb{R} . Por lo tanto, según el Teorema 2, K es C -compacto.

EJEMPLO 6. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_F^*$, entonces:

$A = (\alpha, \beta)^* \cup \{E(\alpha) \cup E(\beta)\}$ es C -compacto.

DEFINICION 4. Sea $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$. Decimos que f es C -continua en α , si para todo conjunto B de \mathbb{R}^* tal que $f(\alpha) \in B^{\circ C}$, se tiene que $\alpha \in f^{-1}(B)^{\circ C}$.

PROPOSICION 8. $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ es C -continua en α si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ (real), existe $h > 0$ (real) tal que

$$|\tau - \alpha| < h \text{ implica } |f(\tau) - f(\alpha)| < \epsilon.$$

Demostración. \Leftarrow) Sea $B \subseteq \mathbb{R}^*$ tal que $f(\alpha) \in B^{\circ C}$; esto quiere decir que existe un C -abierto G tal que $f(\alpha) \in G \subseteq B$. En tal caso, existe un real positivo ϵ tal que

$$(f(\alpha) - \epsilon, f(\alpha) + \epsilon)^* \subseteq G \subseteq B.$$

Para este ϵ , existe un real $h > 0$, tal que si $|\tau - \alpha| < h$, entonces $|f(\tau) - f(\alpha)| < \epsilon$. Por lo tanto, si $\tau \in (\alpha - h, \alpha + h)^*$, entonces $f(\tau) \in B$; osea, $\tau \in f^{-1}(B)$. Se sigue entonces que

$$(\alpha - h, \alpha + h)^* \subseteq f^{-1}(B),$$

y finalmente $\alpha \in \overset{\circ}{f^{-1}(B)}$.

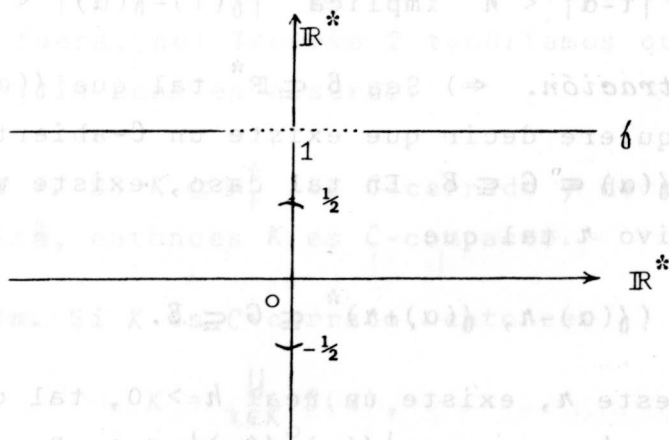
\Rightarrow) Sea ϵ un real positivo, y sea $B = (f(\alpha) - \epsilon, f(\alpha) + \epsilon)^*$. Entonces $f(\alpha) \in B^{\circ}$. Puesto que f es C -continua, $\alpha \in \overset{\circ}{f^{-1}(B)}$, lo cual implica la existencia de un real positivo h que satisface

$$(\alpha - h, \alpha + h)^* \subseteq \overset{\circ}{f^{-1}(B)}.$$

Así, si $|\tau - \alpha| < h$, entonces $f(\tau) \in B$; es decir, $|\tau - \alpha| < h$ implica $|f(\tau) - f(\alpha)| < \epsilon$.

EJEMPLO 7. Sea $f(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{si } \tau \neq 0 \\ 0, & \text{si } \tau = 0 \end{cases}$

cuya gráfica es



Nótese que f es una función micro-continua y 0 -continua en cualquier punto de \mathbb{R}^* . Pero f no es C -continua en $\tau = 0$. En efecto, si llamamos

$B = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^*$, tenemos:

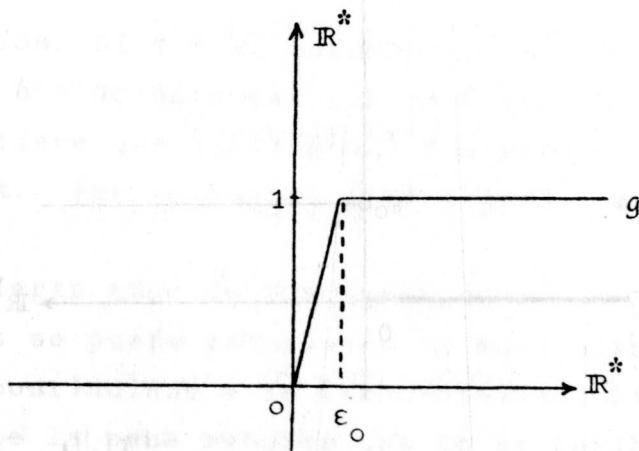
$$0 = f(0) \in \overset{\circ}{B}^C \text{ y } f^{-1}(B) = E(0);$$

por lo tanto, $\overset{\circ C}{f^{-1}(B)} = \emptyset$; con lo cual $0 \notin \overset{\circ C}{f^{-1}(B)}$

EJEMPLO 8. Sea

$$g(\tau) = \begin{cases} 0 & ; \tau \leq 0 \\ 1/\varepsilon_0 \tau & ; 0 < \tau < \varepsilon_0, \\ 1 & ; \tau \geq \varepsilon_0 \end{cases}$$

donde ε_0 es un infinitesimal positivo.



Obsérvese que g no es micro-continua en $\tau = 0$, aunque sí es 0 -continua en este punto.

Examinemos la C -continuidad de g .

Nuevamente llamemos $B = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^*$; así,

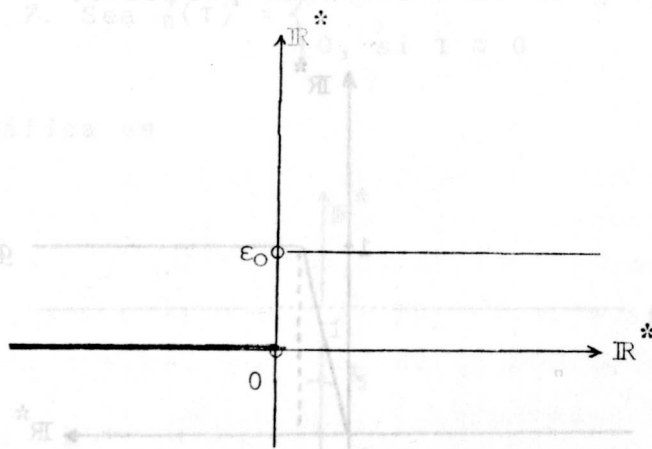
$$0 = g(0) \in \overset{\circ}{B}^C \text{ y } g^{-1}(B) = (-\infty, \varepsilon_0/2)^*$$

Puesto que $g^{-1}(\overset{\circ}{B}) = (-\infty, 0)^* - E(0)$, tenemos que $0 \in g^{-1}(\overset{\circ}{B})$. Por lo tanto, g no es C -continua en $\tau = 0$.

EJEMPLO 9. Consideremos la función $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, definida por

$$h(\tau) = \begin{cases} \varepsilon_0, & \tau > 0 \\ 0, & \tau \leq 0 \end{cases}$$

donde ε_0 es un infinitesimal positivo.



h es una función micro-continua, aunque no es 0 -continua en $\tau = 0$. Veamos que h es C -continua en $\tau = 0$.

Para todo conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^*$ tal que $h(0) \in \overset{\circ}{B}$, se tiene que $h^{-1}(B) = \mathbb{R}^*$, ya que cualquier C -abierto que contenga a $\tau = 0$, contiene también

a ε_0 . Por lo tanto, h es una función C -continua en $\tau = 0$.

Los ejemplos anteriores muestran que la micro-continuidad de una función no implica la C -continuidad; sin embargo, el recíproco de esta afirmación es cierto. Obsérvese también que la micro-continuidad y la 0 -continuidad no tienen ninguna relación.

PROPOSICION 9. Si $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ es una función C -continua en α , entonces f es micro-continua en α .

Demostración. Si $\tau \approx \alpha$, entonces $|\tau - \alpha| < h$ para todo real $h > 0$; entonces por la C -continuidad de f , se tiene que $|f(\tau) - f(\alpha)| < \varepsilon$ para todo real positivo ε . Por lo tanto, $f(\tau) \approx f(\alpha)$. \blacktriangle

Hay cierto tipo de funciones de \mathbb{R}^* en \mathbb{R}^* para las cuales se puede establecer la equivalencia de la micro-continuidad y la C -continuidad. Sin embargo, vale la pena señalar que no es posible establecer ningún tipo de relación entre la micro-continuidad y la 0 -continuidad de estas funciones.

DEFINICION 5. Una función $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ se dice generada, si existe una sucesión (f_n) de funciones reales tal que:

$$f(\tau) = [(f_n(x_n))_n], \text{ para } \tau = [(x_n)].$$

En tal caso escribimos $f = \text{gen}(f_n)$ o simplemente $f \in G$.

PROPOSICION 10. Sea $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ una función generada. Si f es micro-continua en α , entonces f es C -continua en α .

Demostración. Sean $B \subseteq \mathbb{R}^*$ y $f(\alpha) \in {}^{\circ}B^C$. Entonces existe $\epsilon > 0$ (real) tal que

$$(f(\alpha) - \epsilon, f(\alpha) + \epsilon)^* \subseteq B.$$

Llamemos $A = (f(\alpha) - \epsilon, f(\alpha) + \epsilon)^*$.

Se tiene que $f(\alpha) \in A^{\circ C}$; y como A es un conjunto generado, entonces $f(\alpha) \in A^{\circ B}$.

Puesto que f es micro-continua en α , tenemos que

$$\alpha \in \overbrace{f^{-1}(A)}^{\circ B}$$

Pero si f es una función generada y A es un conjunto generado, entonces $f^{-1}(A)$ es también un conjunto generado, de donde podemos concluir que

$$\alpha \in \overbrace{f^{-1}(A)}^{\circ C}. \quad \blacktriangle$$

Como una consideración final, puede observarse que con la topología C , \mathbb{R}^* no cumple los axiomas de separación; es decir, \mathbb{R}^* no es T_0 , T_1 ni T_2 .

Basta observar que dos puntos diferentes α y β , con $\alpha \approx \beta$ no pueden separarse por medio de C -abiertos. Sin embargo, \mathbb{R}^* resulta regular y normal con esta topología; es decir, es un conjunto regular que no es T_3 y un conjunto normal que no es T_4 .

PROPOSICION 11. \mathbb{R}^* es normal con la topología C .

Demostración. Sean H y F C -cerrados disyuntos de \mathbb{R}^* .

Para cada $\tau \in H$, existe $\lambda(\tau) > 0$ (real) tal que $(\tau - \lambda(\tau), \tau + \lambda(\tau))^* \subseteq \mathbb{R}^* - F$.

Llamemos

$$A = \bigcup_{\tau \in H} \overbrace{(\tau - \frac{\lambda(\tau)}{2}, \tau + \frac{\lambda(\tau)}{2})^*}^{oC}$$

Entonces, $H \subseteq A$ y A es C -abierto.

De la misma forma, para cada $\sigma \in F$, existe $\lambda(\sigma) > 0$ (real) tal que

$$(\sigma - \lambda(\sigma), \sigma + \lambda(\sigma))^* \subseteq \mathbb{R}^* - H$$

Si llamamos $B = \bigcup_{\sigma \in F} \overbrace{(\sigma - \frac{\lambda(\sigma)}{2}, \sigma + \frac{\lambda(\sigma)}{2})^*}^{oC}$, tenemos que

$F \subseteq B$, donde B es C -abierto.

Comprobemos que $A \cap B = \emptyset$.

Si existiera $\rho \in A \cap B$, existirían $\tau \in H$ y $\sigma \in F$ tales que

$$\rho \in \overbrace{\left(\tau - \frac{\kappa(\tau)}{2}, \tau + \frac{\kappa(\tau)}{2}\right)}^{oC} \cap \overbrace{\left(\sigma - \frac{\kappa(\sigma)}{2}, \sigma + \frac{\kappa(\sigma)}{2}\right)}^{oC} *$$

$$\text{luego } \rho \in \left(\tau - \frac{\kappa(\tau)}{2}, \tau + \frac{\kappa(\tau)}{2}\right) * \cap \left(\sigma - \frac{\kappa(\sigma)}{2}, \sigma + \frac{\kappa(\sigma)}{2}\right) *$$

En tal caso,

$$|\tau - \sigma| \leq |\tau - \rho| + |\rho - \sigma| < \frac{\kappa(\tau)}{2} + \frac{\kappa(\sigma)}{2}.$$

Si $\kappa(\tau) \leq \kappa(\sigma)$; entonces, de lo anterior tendríamos que

$$|\tau - \sigma| < \kappa(\sigma),$$

es decir, que

$$\tau \in (\sigma - \kappa(\sigma), \sigma + \kappa(\sigma)) * \subseteq \mathbb{R}^* - H$$

Luego, $\tau \notin H$ (absurdo!).

De manera similar, si $\kappa(\tau) > \kappa(\sigma)$, $\sigma \notin F$ (absurdo!). Por consiguiente $A \cap B = \emptyset$. ▲

COROLARIO. \mathbb{R}^* es regular con la topología C .

Si F es un C -cerrado y $\alpha \notin F$, entonces para todo $\tau \in F$, $\alpha \neq \tau$ (por la Proposición 5).

Por lo tanto, $E(\alpha)$ y F son C -cerrados disjuntos. De la proposición anterior, concluimos lo deseado.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Takeuchi, Y. y Mantilla, I., "La Micro-topología de \mathbb{R}^* "; Boletín de Matemáticas, Vol. XVIII N^{os}.1,2,3; 1984. pp.157-169.
- [2] Takeuchi, Y., *Teoría de Funciones No-estándar*; U. Nal. 1983.
- [3] Takeuchi, Y., "Funciones Generadas en \mathbb{R}^* ", Matemática.Enseñanza Universitaria, N^o 36, Sep. 1985; pp. 1-37.
- [4] Takeuchi, Y., "Estructuras topológicas de \mathbb{R}^* "; Boletín de Matemáticas, Vol.XVIII N^{os}.1, 2,3; 1984. pp.36-72.
- [5] Takeuchi, Y., "Conjuntos Generados"; Matemática.Enseñanza Universitaria, N^o 35, Junio 1985. pp. 18-43.
- [6] Valderrama, J., *Conjuntos Generados*, Tesis de Magister en Matemáticas, Universidad Nacional, 1985.

* *

Profesores Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional
BOGOTÁ. D.E. Colombia.