

AXIOMA DE COMPLETEZ

Yu Takeuchi

§1. INTRODUCCION.

En la mayoría de los libros del análisis real, se adopta, como el axioma de completez (o completitud) la existencia del Sup y del Inf para todo subconjunto no vacío y acotado de \mathbb{R} , y luego se estudian algunas propiedades de \mathbb{R} derivadas de dicho axioma. Por lo general no se aclara la equivalencia entre estas propiedades y por esta razón, solamente muy pocos profesores y es tudiantes conocen las otras maneras de enunciar lo. En el presente trabajo se trata de dar, en forma sistemática, los axiomas equivalentes al de completez.

Una estructura matemática K es un "cuerpo ordenado" si existen en K las cuatro operacio-

nes algebraicas "+, \times , -, \div " con sus respectivas propiedades bien conocidas, y el orden (o desigualdad) "<" compatible con las cuatro operaciones, es decir, si $a < b$ entonces $a+c < b+c$; $a \cdot c < b \cdot c$ para $c > 0$ y $b \cdot c < a \cdot c$ para $c < 0$. La estructura de orden nos permite definir en K el valor absoluto en la forma usual, y en consecuencia conceptos topológicos tales como "conjuntos abiertos", "conjuntos cerrados", "conjuntos compactos", "puntos de acumulación", "convergencia de sucesiones", etc.

Para un cuerpo ordenado K son equivalentes las siguientes seis propiedades:

- (1) Todo subconjunto no-vacío y acotado superiormente de K posee extremo superior en K (Axioma de Completitud).
- (2) Toda sucesión creciente y acotada superiormente converge en K (Teorema de Weierstrass).
- (3) Todo subconjunto infinito y acotado de K , tiene por lo menos un punto de acumulación en K (Teorema de Bolzano-Weierstrass).
- (4) Dada una sucesión decreciente de subconjuntos acotados, cerrados y no vacíos de K , la intersección total no es vacía (Teorema de encaje de Cantor).
- (5) Todo subconjunto acotado y cerrado de K es

compacto (Teorema de Heine-Borel).

(6) Si (A, B) es una cortadura de K (Nota 1), entonces A tiene máximo o B tiene mínimo.

NOTA 1. Una pareja (A, B) de subconjuntos no-vacios de K se llama una cortadura de K si (i) $A < B$ (esto es, $a < b$ para todo $a \in A$, $b \in B$), (ii) $A \cup B = K$.

Sea e el elemento neutro para la multiplicación en K , entonces $e+e (=2e)$, $e+e+e (=3e)$, ... pertenecen a K , o sea que K contiene un subconjunto **isomorfo** al conjunto de los números naturales $(\mathbb{N})^{(*)}$. En consecuencia, K contiene un cuerpo ordenado isomorfo al conjunto de todos los números racionales (\mathbb{Q}) . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer siempre que K contiene a \mathbb{Q} .

Además de las seis propiedades antes mencionadas, el axioma de completitud "implica" las siguientes tres propiedades:

(7) K es **arquimédiano**; esto es, para cada $x \in K$ con $x > 0$ existe un número natural n tal que $x < n$.

(*) Esto se tiene porque todo cuerpo ordenado es de característica cero, de manera que ninguno de los elementos $e+e$... $e+e$ será cero; se sigue que todo cuerpo de característica cero tiene un subcuerpo isomorfo a los racionales ([3]) p.77).

(8) \mathbb{Q} es denso en K ; esto es, para todo $x, y \in K$ con $x < y$ existe $q \in \mathbb{Q}$ comprendido entre x, y .

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ (en K), es decir, dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in K$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ para todo $n > N_0$.

Obsérvese que ε es cualquier elemento positivo de K .

Nótese que estas tres últimas propiedades son equivalentes mutuamente (Nota 2), pero evidentemente éstas no son equivalentes a las primeras seis propiedades; en efecto, \mathbb{Q} es arquimediano pero \mathbb{Q} no satisface el axioma de completéz. El axioma de completéz es equivalente a las siguientes propiedades:

(10) K es arquimediano y, toda sucesión de Cauchy converge en K .

Decimos que un cuerpo ordenado K es "algebraicamente completo" si no existe una extensión propia de K a otro cuerpo ordenado donde K sea denso.

El axioma de completéz es también equivalente a:

(11) K es arquimediano y algebraicamente completo.

Citamos como ejemplo el libro "Análisis Matemático" de T.M. Apostol (2a. Edición, Ed. Reverte, 1976), donde se adopta la propiedad (1) como axioma de completez para \mathbb{R} (p.11, Axioma 10), y luego se demuestran solamente las siguientes implicaciones:

(1) \Rightarrow (7) (Teorema 1-18, p.13).

(1) \Rightarrow (3) (Teorema 3-24, p.66).

(3) \Rightarrow (4) (Teorema 3-25, p.68).

(4),(8) \Rightarrow (5) (Teorema 3-29, p.70).

(3) \Rightarrow (10) (Teorema 4-8, p.88).

(1) \Rightarrow (2) (Teorema 8-6, p.225).

En el siguiente párrafo daremos demostraciones de las implicaciones: (2) \Rightarrow (1), (10) \Rightarrow (1), (1) \Rightarrow (6), (6) \Rightarrow (2), (5) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (2), (4) \Rightarrow (8), (2) \Rightarrow (11), (11) \Rightarrow (1), las cuales, junto con las implicaciones mencionadas en el libro de T. Apostol, garantizan la equivalencia de las 8 propiedades (1)–(6), (10) y (11) para un cuerpo ordenado K .

NOTA 2. (Equivalencia de (7), (8) y (9)).

(8) \Rightarrow (7). Sea $x \in K$, $x > 0$; por la propiedad (8) existen $n, k \in \mathbb{N}$ tales que

$$x < \frac{n}{k} < x + 1,$$

apuntes

luego:

$$0 < \frac{1}{n}x < \frac{n}{k} \leq n \quad (\text{propiedad (7)}).$$

(7) \Rightarrow (9) Dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in K$ existe N_0 tal que

$$N_0 > \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{por la propiedad (7)}),$$

por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > N_0$ se tiene que

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} < \varepsilon \quad (\text{propiedad (9)}).$$

(9) \Rightarrow (8) Sean $x, y \in K$, para mayor sencillez supongamos que $0 \leq x < y$ (en los otros casos la demostración es similar).

Por la propiedad (9) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < y - x$$

Aplicando nuevamente la propiedad (9) existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{ny}, \text{ o sea, } y \leq \frac{k}{n}$$

esto es, el conjunto $I = \{k \in \mathbb{N} / \frac{k}{n} \geq y\}$ no es vacío. Sea $m = \text{Mínimo de } I$, entonces

$$\frac{m}{n} \geq y, \quad \frac{m-1}{n} < y,$$

luego:

$$\frac{m-1}{n} - x = \frac{m}{n} - x - \frac{1}{n} \geq y - x - \frac{1}{n} > 0 ,$$

esto es:

$$x < \frac{m-1}{n} < y \quad (\text{propiedad (8)}).$$

§2. DEMOSTRACIONES.

(i) (2) \Rightarrow (1). Supongamos (2). Evidentemente, toda sucesión decreciente e inferiormente acotada también converge en K .

- Primero, demostremos que K es arquimediano (o lo que es lo mismo, la propiedad (9)). Por hipótesis la sucesión $(\frac{1}{n})$ converge:

$$(\frac{1}{n}) \rightarrow c (> 0).$$

Si $c > 0$ existiría $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\frac{1}{n} - c| < \frac{1}{2}c \quad \text{para todo } n > N.$$

o sea,

$$\frac{1}{2}c < \frac{1}{n} < c + \frac{1}{2}c = \frac{3}{2}c \quad \text{para todo } n > N.$$

Como $4n > n > N$ se tendría que

$$\frac{1}{2}c < \frac{1}{4n} \quad \text{o sea, } 2c < \frac{1}{n}$$

$$\text{luego: } 2c < \frac{1}{n} < \frac{3}{2}c.$$

absurdo!

Por lo tanto se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

- Supongamos ahora que A es un subconjunto de K no-vacío y acotado superiormente; sean $x_1 \in A$, $y_1 =$ una cota superior de A , y consideremos el punto $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$.

- Si $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$ es una cota superior de A , sean

$$x_2 = x_1 ; \quad y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1).$$

- Si $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$ no es una cota superior de A , sean

$$x_2 \in A, \quad x_2 > \frac{1}{2}(x_1 + y_1); \quad y_2 = y_1.$$

Así sucesivamente se obtienen dos sucesiones monótonas (x_n) , (y_n) , la primera creciente y la segunda decreciente tales que

$$x_n \in A, \quad y_n \text{ es una cota superior de } A,$$

$$0 < y_n - x_n \leq \frac{1}{2}(y_{n-1} - x_{n-1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(y_1 - x_1). \quad (1)$$

Por la hipótesis (2) las sucesiones (x_n) , (y_n) convergen en K . Sean:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0, \quad x_0, y_0 \in K$$

Por la propiedad arquimediana del cuerpo ordenado K se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (y_1 - x_1) = 0,$$

luego: $x_0 = y_0$. Evidentemente se tiene que x_0 es cota superior de A y que si M es otra cota superior de A entonces $x \leq M$, por lo tanto:

$$x_0 = y_0 = \text{Sup } A.$$

(ii) (10) \Rightarrow (1). Sea A un subconjunto de K , no vacío y acotado superiormente. En la demostración anterior las sucesiones (x_n) , (y_n) son de Cauchy ya que, por (1) se tiene que para todo $k \geq n$:

$$0 \leq y_n - x_k \leq y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (y_1 - x_1),$$

además, por la propiedad arquimediana de K :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (y_1 - x_1) \rightarrow 0 \quad (\text{cuando } n \rightarrow \infty).$$

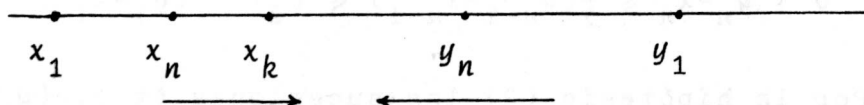


Fig. 1

Por la hipótesis (10) las sucesiones (x_n) , (y_n) convergen, y, $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ es el supremo

mo del conjunto A .

(iii) $(1) \Rightarrow (6)$. Supongamos (1) , evidentemente todo conjunto no vacío y acotado inferiormente tiene extremo inferior.

Sea (A, B) una cortadura de K ; para todo $a \in A$, $b \in B$ tenemos: $a < b$, luego:

$$\sup A \leq b \quad \text{para todo } b \in B,$$

por lo tanto

$$\sup A \leq \inf B.$$

Como $A \cup B = K$ entonces hay dos posibilidades:

- $\sup A \in A$; en este caso A tiene máximo.
- $\sup A \in B$; en este caso $\inf B \in B$, luego B tiene mínimo.

Nótese que en cualquier caso se debe tener que $\sup A = \inf B$ ya que $A \cup B = K$.

(iv) $(6) \Rightarrow (2)$. Sea (a_n) una sucesión creciente y acotada, si

$$A = \{x \in K / x \leq a_n \text{ para algún } n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in K / x \leq a_n\}$$

$$B = \{x \in K / x > a_n \text{ para todo } n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in K / x > a_n\}$$

entonces $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ ya que la sucesión (a_n) es creciente y acotada. Evidentemente $A < B$, y, $A \cup B = K$, luego (A, B) es una cortadura de K . Por la hipótesis (6), A tiene máximo ó B tiene mínimo. Supongamos que A tiene máximo M ; como $M \in A$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $M \leq a_m$. Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, $M + \varepsilon \in B$, luego:

$$a_n < M + \varepsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto:

$$M \leq a_n < M + \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq m,$$

esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M.$$

De la misma manera se demuestra que (a_n) converge en K para el caso en que B tiene mínimo.

(v) (5) \Rightarrow (3). Sea S un subconjunto de K , acotado e infinito. Primero, como S es acotado existe un intervalo $[a, b] = \{x \in K / a \leq x \leq b\}$ que contiene a S . Dado $x \in K$, si x no es punto de acumulación del conjunto S , entonces existe una vecindad de x , digamos $V(x; \delta(x)) = (x - \delta(x), x + \delta(x))$, que contiene un número "finito" de puntos de S . Es evidente que

$$[a, b] \subset K \subseteq \bigcup_{x \in K} V(x; \delta(x))$$

Por la *compacidad* del intervalo $[a, b]$ (hipótesis (5)) existen x_1, x_2, \dots, x_m tales que

$$S \subset [a, b] \subset \bigcup_{k=1}^m V(x_k; \delta(x_k))$$

esta última contención implicaría que S es un conjunto "*finito*" (**absurdo!**)

Por lo tanto, algún punto de K debe ser punto de acumulación del conjunto S .

(vi) $(3) \Rightarrow (2)$. Sea (a_n) una sucesión creciente y acotada superiormente. Si el conjunto $\{a_n/n \in \mathbb{N}\}$ es "*finito*" entonces la sucesión es "*constante*" a partir de algún término y por lo tanto converge. Si el conjunto $\{a_n/n \in \mathbb{N}\}$ es "*infinito*", entonces tiene por lo menos un punto de acumulación (por la hipótesis (3)) el cual es evidentemente el límite de la sucesión (a_n) .

En el libro de T.M. Apostol se demuestra que a partir de (4) (teorema del encaje de Cantor), utilizando *adicionalmente* el teorema de Lindelöf (que es una consecuencia de la propiedad arquimediante (8), *Nota 4*), se obtiene el teorema de Heine-Borel (propiedad (5)). Con el fin de obtener *directamente* la implicación $(4) \Rightarrow (5)$ es *necesario* demostrar que (8) es una consecuencia de (4).

(vii) (4) \Rightarrow (8). Supongamos (4); si K no fuera arquimediano existiría $b \in K$ tal que $b > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto acotado:

$$S = \{x \in K / x \leq n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in K / x \leq n\}$$

entonces S es un conjunto cerrado. En efecto, $x \in K-S$ entonces:

$$x > n+1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

luego

$$x-1 > n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

esto es

$$(x-1, x+1) \subset K-S,$$

por lo tanto, $K-S$ es abierto, luego S es cerrado.

Sean

$$S_n = S \cap \{x \in K / x \geq n\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

entonces (S_n) es una sucesión decreciente de subconjuntos de K . Además, $S_n \neq \emptyset$ ya que $n \in S_n$. S_n es "cerrado" por ser intersección de dos subconjuntos cerrados de K ; además S_n es acotado.

Por la hipótesis (4):

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset$$

Pero, se tiene que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{x \in K / x \geq n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \cap$$

$$\{x \in K / x \leq n \text{ para algún } n\} = \emptyset$$

(absurdo!). Por lo tanto, K debe ser arquimediana, o sea que \mathbb{Q} es denso en K .

(viii) (2) \Rightarrow (11). Recordemos que la hipótesis (2) garantiza la propiedad *arquimediana* del cuerpo ordenado K . Sea F una extensión del cuerpo ordenado K tal que K es *denso* en F , entonces \mathbb{Q} es *denso* en F (esto es, F es arquimediano). Dado $x \in F$ existe una sucesión creciente (a_n) de elementos en K tal que

$$x - \frac{1}{n} < a_n \leq x \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

o sea que $(a_n) \rightarrow x$ (en F). Por la hipótesis (2), la sucesión (a_n) converge en K , digamos $(a_n) \rightarrow a$ (en K). Como K es denso en F entonces se tiene que: $(a_n) \rightarrow a$ (en F), luego $x = a \in K$, esto es $F = K$. Por lo tanto, K es algebraicamente completo.

Antes de demostrar la implicación (11) \Rightarrow (1), recordemos que el sistema numérico real \mathbb{R} , construido por cortaduras de \mathbb{Q} , ó, por sucesiones de Cauchy en \mathbb{Q} , es un cuerpo ordenado que satisface el axioma de completéz. Tenemos el siguiente lema:

LEMA. Todo cuerpo arquimediano K es un subcuerpo ordenado de \mathbb{R} (en el sentido de isomorfismo).

En efecto, como \mathbb{Q} es denso en K , entonces dado $x \in K$ existe una sucesión (r_n) de elementos en \mathbb{Q} que converge a x (en K). La sucesión (r_n) es de Cauchy en \mathbb{Q} , luego (r_n) converge en \mathbb{R} , digamos $(r_n) \rightarrow y$ (en \mathbb{R}). Es fácil ver que " y " no depende de la escogencia de la sucesión (r_n) que tiende a " x " en K , esto es, tenemos una función de K en \mathbb{R} que hace corresponder $x \in K$ a $y \in \mathbb{R}$. Evidentemente, esta función es uno a uno y respeta las operaciones algebraicas y el orden del cuerpo ordenado. De esta manera, se ve que \mathbb{R} posee un subcuerpo ordenado "isomorfo" a K .

(ix) (11) \Rightarrow (1). Supongamos que K es un cuerpo arquimediano y algebraicamente completo; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{R}$ (por el lema anterior). Si $K \neq \mathbb{R}$ entonces \mathbb{R} es una *extensión propia* del cuerpo ordenado K donde K es denso en \mathbb{R} , luego K no es algebraicamente completo. Por lo tanto, la hipótesis (11) implica que K es isomorfo al cuerpo real \mathbb{R} , esto es, K satisface el axioma de completitud.

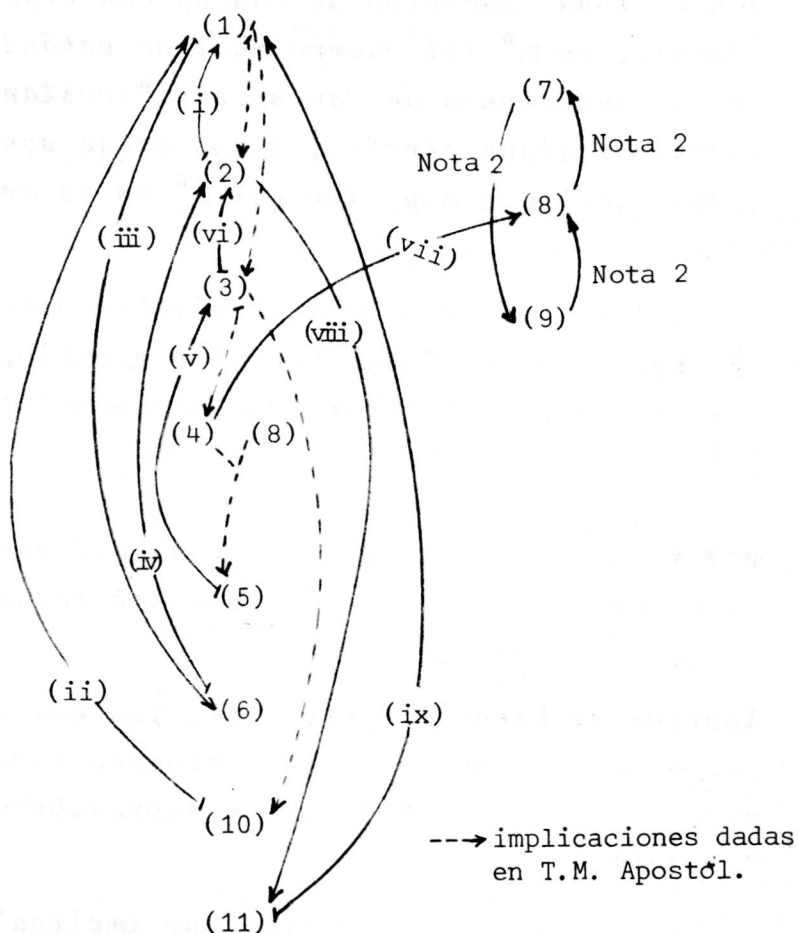


Fig. 2

NOTA 3. Las propiedades (1) a (6) implican la propiedad arquimediana del cuerpo ordenado K . Sin embargo, anotamos:

- Existen cuerpos ordenados "no arquimedianos"

donde "toda" sucesi3n de Cauchy converge. Por ejemplo, en \mathbb{R}^* (el cuerpo real no-est3ndar) las 3nicas sucesiones de Cauchy son "constantes" a partir de algun t3rmino, luego estas son convergentes. Sabemos muy bien que \mathbb{R}^* no es arquimediano.

- Existen cuerpos ordenados algebraicamente completos, y no arquimedianos. Por ejemplo, el completado $\overline{\mathbb{R}^*}$ de \mathbb{R}^* es algebraicamente completo (ver [2])

NOTA 4. La propiedad arquimediana del cuerpo K "implica" el siguiente teorema del recubrimiento de Lindel3f.

Teorema de Lindel3f. (Apostol, Teorema 3-28, p.70)
Sea S un subconjunto de K , entonces todo recubrimiento abierto de S posee un subrecubrimiento "contable".

Sin embargo, esto 3ltimo "no implica" la propiedad arquimediana del cuerpo K . Por ejemplo, consideremos en \mathbb{R}^* un subcuerpo $K = \mathbb{Q}(\lambda)$ donde λ es un infinito positivo, entonces K es un cuerpo ordenado "contable", por lo tanto en K se satisface el teorema de Lindel3f. Evidentemente, K no es arquimediano.

REFERENCIAS

- [1] Apostol, T.M., *Análisis Matemático*, 2a. Edición, Editorial Reverté, España, 1976.
- [2] Herstein, I.N., *Algebra Moderna*, Ed. Trillas, Mexico, 1976.
- [3] Lang, Serge, *Algebra*, Adison Wesley Reading, 1969.
- [4] Linero T., L.A., *Enunciados equivalentes al axioma de completez en un campo ordenado*, Tesis de Magister en Docencia Matemática, U.P.N., 1984.
- [5] Takeuchi, Y., "Completado Secuencial de \mathbb{R}^* ", Bol. de Mat., Vol. XX, N° 1, 1986, U.Nal...

Profesor Departamento de Matemáticas y Estadística
 Universidad Nacional
 BOGOTÁ. D.E. Colombia.