

AXIOMA DE COMPLETEZ

Yu Takeuchi

§1. INTRODUCCION.

En la mayoría de los libros del análisis real, se adopta, como el axioma de completez (o completitud) la existencia del Sup y del Inf para todo subconjunto no vacío y acotado de \mathbb{R} , y luego se estudian algunas propiedades de \mathbb{R} derivadas de dicho axioma. Por lo general no se aclara la equivalencia entre estas propiedades y por esta razón, solamente muy pocos profesores y estudiantes conocen las otras maneras de enunciarlo. En el presente trabajo se trata de dar, en forma sistemática, los axiomas equivalentes al de completez.

Una estructura matemática K es un "cuerpo ordenado" si existen en K las cuatro operacio-

aportes

nes algebraicas "+, ×, -, ÷" con sus respectivas propiedades bien conocidas, y el orden (o desigualdad) " $<$ " compatible con las cuatro operaciones, es decir, si $a < b$ entonces $a+c < b+c$; $a \cdot c < b \cdot c$ para $c > 0$ y $b \cdot c < a \cdot c$ para $c < 0$. La estructura de orden nos permite definir en K el valor absoluto en la forma usual, y en consecuencia conceptos topológicos tales como "conjuntos abiertos", "conjuntos cerrados", "conjuntos compactos", "puntos de acumulación", "convergencia de sucesiones", etc.

Para un cuerpo ordenado K son equivalentes las siguientes seis propiedades:

- (1) Todo subconjunto no-vacío y acotado superiormente de K posee extremo superior en K (Axioma de Completoz).
- (2) Toda sucesión creciente y acotada superiormente converge en K (Teorema de Weierstrass).
- (3) Todo subconjunto infinito y acotado de K , tiene por lo menos un punto de acumulación en K (Teorema de Bolzano-Weierstrass).
- (4) Dada una sucesión decreciente de subconjuntos acotados, cerrados y no vacíos de K , la intersección total no es vacía (Teorema de encaje de Cantor).
- (5) Todo subconjunto acotado y cerrado de K es

compacto (Teorema de Heine-Borel).

(6) Si (A, B) es una cortadura de K (Nota 1), entonces A tiene máximo o B tiene mínimo.

NOTA 1. Una pareja (A, B) de subconjuntos no-vacios de K se llama una cortadura de K si (i) $A < B$ (esto es, $a < b$ para todo $a \in A$, $b \in B$), (ii) $A \cup B = K$.

Sea e el elemento neutro para la multiplicación en K , entonces $e+e (=2e)$, $e+e+e (=3e)$, ... pertenecen a K , o sea que K contiene un subconjunto **isomorfo al conjunto de los números naturales (\mathbb{N})**^(*). En consecuencia, K contiene un cuerpo ordenado isomorfo al conjunto de todos los números racionales (\mathbb{Q}). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer siempre que K contiene a \mathbb{Q} .

Además de las seis propiedades antes mencionadas, el axioma de completez "implica" las siguientes tres propiedades:

(7) K es arquimediano; esto es, para cada $x \in K$ con $x > 0$ existe un número natural n tal que $x < n$.

(*) Esto se tiene porque todo cuerpo ordenado es de característica cero, de manera que ninguno de los elementos $e+e+e+\dots+e$ será cero; se sigue que todo cuerpo de característica cero tiene un subcuerpo isomorfo a los racionales ([3]) p.77).

(8) \mathbb{Q} es denso en K ; esto es, para todo $x, y \in K$ con $x < y$ existe $q \in \mathbb{Q}$ comprendido entre x, y .

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ (en K), es decir, dado $\epsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ para todo $n > N_0$.

Obsérvese que ϵ es cualquier elemento positivo de K .

Nótese que estas tres últimas propiedades son equivalentes mutuamente (*Nota 2*), pero evidentemente éstas no son equivalentes a las primeras seis propiedades; en efecto, \mathbb{Q} es arquimediano pero \mathbb{Q} no satisface el axioma de completez. El axioma de completez es equivalente a las siguientes propiedades:

(10) K es arquimediano y, toda sucesión de Cauchy converge en K .

Decimos que un cuerpo ordenado K es "algebraicamente completo" si no existe una extensión propia de K a otro cuerpo ordenado donde K sea denso.

El axioma de completez es también equivalente a:

(11) K es arquimediano y algebraicamente completo.

Citamos como ejemplo el libro "Análisis Matemático" de T.M. Apostol (2a. Edición, Ed. Reverte, 1976), donde se adopta la propiedad (1) como axioma de complejidad para \mathbb{R} (p.11, Axioma 10), y luego se demuestran solamente las siguientes implicaciones:

$$(1) \Rightarrow (7) \quad (\text{Teorema 1-18, p.13}).$$

$$(1) \Rightarrow (3) \quad (\text{Teorema 3-24, p.66}).$$

$$(3) \Rightarrow (4) \quad (\text{Teorema 3-25, p.68}).$$

$$(4), (8) \Rightarrow (5) \quad (\text{Teorema 3-29, p.70}).$$

$$(3) \Rightarrow (10) \quad (\text{Teorema 4-8, p.88}).$$

$$(1) \Rightarrow (2) \quad (\text{Teorema 8-6, p.225}).$$

En el siguiente párrafo daremos demostraciones de las implicaciones: $(2) \Rightarrow (1)$, $(10) \Rightarrow (1)$, $(1) \Rightarrow (6)$, $(6) \Rightarrow (2)$, $(5) \Rightarrow (3)$, $(3) \Rightarrow (2)$, $(4) \Rightarrow (8)$, $(2) \Rightarrow (11)$, $(11) \Rightarrow (1)$, las cuales, junto con las implicaciones mencionadas en el libro de T. Apostol, garantizan la equivalencia de las 8 propiedades $(1) \rightarrow (6)$, (10) y (11) para un cuerpo ordenado K .

NOTA 2. (Equivalencia de (7), (8) y (9)).

$(8) \Rightarrow (7)$. Sea $x \in K$, $x > 0$; por la propiedad (8) existen $n, k \in \mathbb{N}$ tales que

$$x < \frac{n}{k} < x + 1,$$

Por lo tanto se tiene que

$$0 < \frac{1}{n} < x < n \cdot \frac{1}{n} \quad (\text{propiedad (7)}).$$

Supongamos ahora que ε es un subconjunto de K no-

(7) \Rightarrow (9) Dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in K$ existe N_0 tal que

$$N_0 > \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{por la propiedad (7)}),$$

por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > N_0$ se tiene que

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} < \varepsilon \quad (\text{propiedad (9)}).$$

(9) \Rightarrow (8) Sean $x, y \in K$, para mayor sencillez supongamos que $0 \leq x < y$ (en los otros casos la demostración es similar).

Por la propiedad (9) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < y - x$$

Aplicando nuevamente la propiedad (9) existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{ny}, \text{ o sea, } y \leq \frac{k}{n}$$

esto es, el conjunto $I = \{k \in \mathbb{N} / \frac{k}{n} \geq y\}$ no es vacío. Sea $m = \text{Mínimo de } I$, entonces

$$\frac{m}{n} \geq y, \quad \frac{m-1}{n} < y,$$

luego:

Entonces como siendo el límite de la sucesión $\frac{m-1}{n} - x = \frac{m}{n} - x - \frac{1}{n} > y - x - \frac{1}{n} > 0$, esto es:

$$x < \frac{m-1}{n} < y \quad (\text{propiedad (8)}).$$

§2. DEMOSTRACIONES.

(i) (2) \Rightarrow (1). Supongamos (2). Evidentemente, toda sucesión decreciente e inferiormente acotada también converge en K .

- Primero, demostremos que K es arquimediano (\circ lo que es lo mismo, la propiedad (9)). Por hipótesis la sucesión $(\frac{1}{n})$ converge:

$$\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow c (c > 0).$$

Si $c > 0$ existiría $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{1}{n} - c \right| < \frac{1}{2}c \quad \text{para todo } n > N.$$

o sea,

$$\frac{1}{2}c < \frac{1}{n} < c + \frac{1}{2}c = \frac{3}{2}c \quad \text{para todo } n > N.$$

Como $4n > n > N$ se tendría que

$$\frac{1}{2}c < \frac{1}{4n} \quad \text{o sea,} \quad 2c < \frac{1}{n}$$

luego: $2c < \frac{1}{n} < \frac{3}{2}c$. **absurdo!**

Por lo tanto se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

- Supongamos ahora que A es un subconjunto de K no-vacio y acotado superiormente; sean $x_1 \in A$, y_1 = una cota superior de A , y consideremos el punto $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$.

- Si $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$ es una cota superior de A , sean

$$x_2 = x_1 ; \quad y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1).$$

- Si $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$ no es una cota superior de A , sean

$$x_2 \in A, \quad x_2 > \frac{1}{2}(x_1 + y_1); \quad y_2 = y_1.$$

Así sucesivamente se obtienen dos sucesiones monótonas (x_n) , (y_n) , la primera creciente y la segunda decreciente tales que

$x_n \in A$, y_n es una cota superior de A ,

$$0 < y_n - x_n \leq \frac{1}{2}(y_{n-1} - x_{n-1}) \leq (\frac{1}{2})^{n-1}(y_1 - x_1). \quad (1)$$

Por la hipótesis (2) las sucesiones (x_n) , (y_n) convergen en K . Sean:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0, \quad x_0, y_0 \in K$$

Por la propiedad arquimediana del cuerpo ordenado K se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (y_1 - x_1) = 0,$$

luego: $x_o = y_o$. Evidentemente se tiene que x_o es cota superior de A y que si M es otra cota superior de A entonces $x \leq M$, por lo tanto:

$$x_o = y_o = \text{Sup } A.$$

(ii) (10) \Rightarrow (1). Sea A un subconjunto de K , no vacío y acotado superiormente. En la demostración anterior las sucesiones (x_n) , (y_n) son de Cauchy ya que, por (1) se tiene que para todo $k \geq n$:

$$0 \leq y_n - x_k \leq y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (y_1 - x_1),$$

además, por la propiedad arquimediana de K :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (y_1 - x_1) \rightarrow 0 \quad (\text{cuando } n \rightarrow \infty).$$

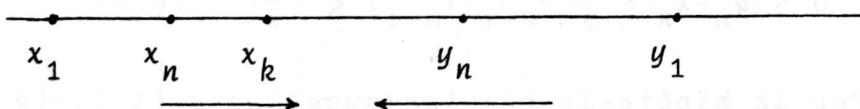


Fig. 1

Por la hipótesis (10) las sucesiones (x_n) , (y_n) convergen, y, $x_o = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ es el supre-

mo del conjunto A .

(iii) $(1) \Rightarrow (6)$. Supongamos (1), evidentemente todo conjunto no vacío y acotado inferiormente tiene extremo inferior.

Sea (A, B) una cortadura de K ; para todo $a \in A$, $b \in B$ tenemos: $a < b$, luego:

$$\sup A \leq b \quad \text{para todo } b \in B,$$

por lo tanto

$$\sup A \leq \inf B.$$

Como $A \cup B = K$ entonces hay dos posibilidades:

- $\sup A \in A$; en este caso A tiene máximo.
- $\sup A \in B$; en este caso $\inf B \in B$, luego B tiene mínimo.

Nótese que en cualquier caso se debe tener que $\sup A = \inf B$ ya que $A \cup B = K$.

(iv) $(6) \Rightarrow (2)$. Sea (a_n) una sucesión creciente y acotada, si

$$A = \{x \in K / x \leq a_n \text{ para algún } n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in K / x \leq a_n\}$$

$$B = \{x \in K / x > a_n \text{ para todo } n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in K / x > a_n\}$$

entonces $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ ya que la sucesión (a_n) es creciente y acotada. Evidentemente $A < B$, y, $A \cup B = K$, luego (A, B) es una cortadura de K . Por la hipótesis (6), A tiene máximo ó B tiene mínimo. Supongamos que A tiene máximo M ; como $M \in A$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $M \leq a_m$. Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, $M + \varepsilon \in B$, luego:

$$a_n < M + \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto:

$$M \leq a_n < M + \varepsilon \text{ para todo } n \geq m,$$

esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M.$$

De la misma manera se demuestra que (a_n) converge en K para el caso en que B tiene mínimo.

(v) (5) \Rightarrow (3). Sea S un subconjunto de K , acotado e infinito. Primero, como S es acotado existe un intervalo $[a, b] = \{x \in K / a \leq x \leq b\}$ que contiene a S . Dado $x \in K$, si x no es punto de acumulación del conjunto S , entonces existe una vecindad de x , digamos $V(x; \delta(x)) = (x - \delta(x), x + \delta(x))$, que contiene un número "finito" de puntos de S . Es evidente que

$$[a, b] \subset K \subseteq \bigcup_{x \in K} V(x; \delta(x))$$

Por la *compacidad* del intervalo $[a, b]$ (hipótesis (5)) existen x_1, x_2, \dots, x_m tales que

$$S \subset [a, b] \subset \bigcup_{k=1}^m V(x_k; \delta(x_k))$$

esta última contenencia implicaría que S es un conjunto "*finito*" (*absurdo!*)

Por lo tanto, algún punto de K debe ser punto de acumulación del conjunto S .

(vi) $(3) \Rightarrow (2)$. Sea (a_n) una sucesión creciente y acotada superiormente. Si el conjunto $\{a_n/n \in \mathbb{N}\}$ es "*finito*" entonces la sucesión es "*constante*" a partir de algún término y por lo tanto converge. Si el conjunto $\{a_n/n \in \mathbb{N}\}$ es "*infinito*", entonces tiene por lo menos un punto de acumulación (por la hipótesis (3)) el cual es evidentemente el límite de la sucesión (a_n) .

En el libro de T.M. Apostol se demuestra que a partir de (4) (teorema del encaje de Cantor), utilizando *adicionalmente* el teorema de Lindelöf (que es una consecuencia de la propiedad arquimediana (8), *Nota 4*), se obtiene el teorema de Heine-Borel (propiedad (5)). Con el fin de obtener *directamente* la implicación $(4) \Rightarrow (5)$ es *necesario* demostrar que (8) es una consecuencia de (4).

(vii) $(4) \Rightarrow (8)$. Supongamos (4); si K no fuera arquimediano existiría $b \in K$ tal que $b > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto acotado:

$$S = \{x \in K / x \leq n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in K / x \leq n\}$$

entonces S es un *conjunto cerrado*. En efecto, si $x \in K-S$ entonces:

$$x > n+1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

luego

$$x-1 > n \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

estos son los *conjuntos abiertos* de K , por lo tanto, $K-S$ es *abierto*, luego S es *cerrado*.

Sean $S_n = S \cap \{x \in K / x \geq n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$),

entonces (S_n) es una sucesión *decreciente* de subconjuntos de K . Además, $S_n \neq \emptyset$ ya que $n \in S_n$.

S_n es "*cerrado*" por ser intersección de dos subconjuntos cerrados de K ; además S_n es acotado.

Por la hipótesis (4):

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset$$

Pero, se tiene que: $\bigcup_{x \in K} V(x; \delta(x))$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{x \in K / x > n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \cap$$

$$\{x \in K / x \leq n \text{ para algún } n\} = \emptyset$$

(absurdo!). Por lo tanto, K debe ser arquimediana, o sea que \mathbb{Q} es denso en K .

(viii) $(2) \Rightarrow (11)$. Recordemos que la hipótesis (2) garantiza la propiedad *arquimediana* del cuerpo ordenado K . Sea F una extensión del cuerpo ordenado K tal que K es *denso* en F , entonces \mathbb{Q} es *denso* en F (esto es, F es arquimediano). Dado $x \in F$ existe una sucesión creciente (a_n) de elementos en K tal que

$$x - \frac{1}{n} < a_n \leq x \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

o sea que $(a_n) \rightarrow x$ (en F). Por la hipótesis (2), la sucesión (a_n) converge en K , digamos $(a_n) \rightarrow a$ (en K). Como K es denso en F entonces se tiene que: $(a_n) \rightarrow a$ (en F), luego $x = a \in K$, esto es $F = K$. Por lo tanto, K es algebraicamente completo.

Antes de demostrar la implicación $(11) \Rightarrow (1)$, recordemos que el sistema numérico real \mathbb{R} , construido por cortaduras de \mathbb{Q} , ó, por sucesiones de Cauchy en \mathbb{Q} , es un cuerpo ordenado que satisface el axioma de completez. Tenemos el siguiente lema:

LEMÁ. Todo cuerpo arquimediano K es un subcuerpo ordenado de \mathbb{R} (en el sentido de isomorfismo).

En efecto, como \mathbb{Q} es denso en K , entonces dado $x \in K$ existe una sucesión (r_n) de elementos en \mathbb{Q} que converge a x (en K). La sucesión (r_n) es de Cauchy en \mathbb{Q} , luego (r_n) converge en \mathbb{R} , digamos $(r_n) \rightarrow y$ (en \mathbb{R}). Es fácil ver que "y" no depende de la escogencia de la sucesión (r_n) que tiende a "x" en K , esto es, tenemos una función de K en \mathbb{R} que hace corresponder $x \in K$ a $y \in \mathbb{R}$. Evidentemente, esta función es uno a uno y respeta las operaciones algebraicas y el orden del cuerpo ordenado. De esta manera, se ve que \mathbb{R} posee un subcuerpo ordenado "isomorfo" a K .

(ix) $(11) \Rightarrow (1)$. Supongamos que K es un cuerpo arquimediano y algebraicamente completo; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{R}$ (por el lema anterior). Si $K \neq \mathbb{R}$ entonces \mathbb{R} es una extensión propia del cuerpo ordenado K donde K es denso en \mathbb{R} , luego K no es algebraicamente completo. Por lo tanto, la hipótesis (11) implica que K es isomorfo al cuerpo real \mathbb{R} , esto es, K satisface el axioma de completeness.

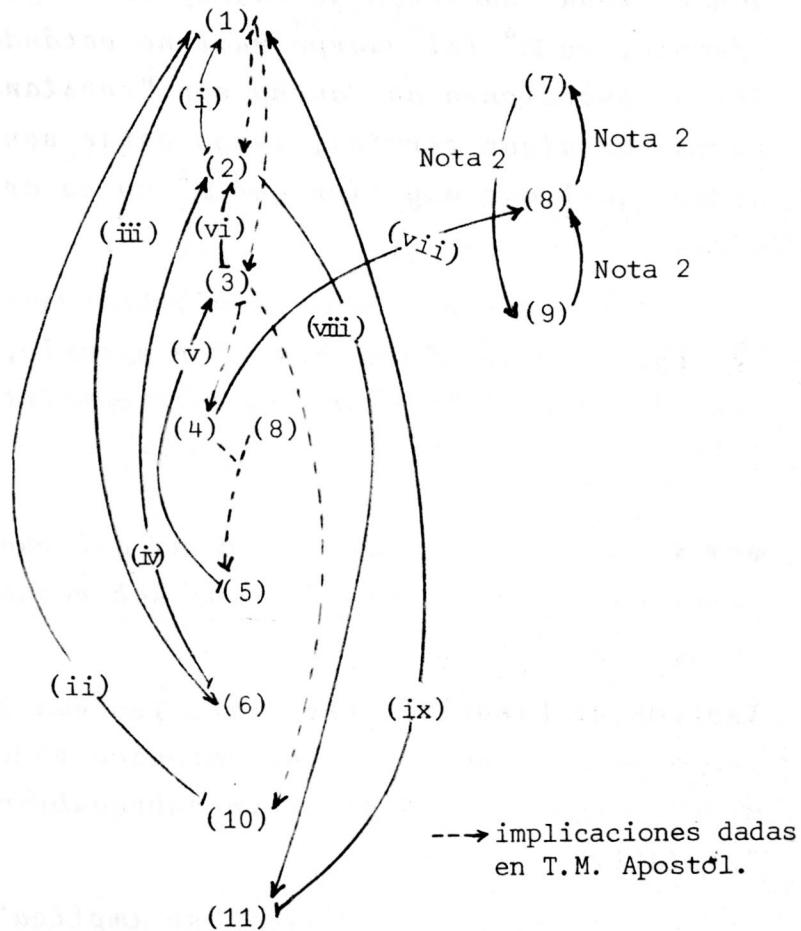


Fig. 2

NOTA 3. Las propiedades (1) a (6) implican la propiedad arquimediana del cuerpo ordenado K . Sin embargo, anotamos:

- Existen cuerpos ordenados "no arquimedianos"

donde "toda" sucesión de Cauchy converge. Por ejemplo, en \mathbb{R}^* (el cuerpo real no-estándar) las únicas sucesiones de Cauchy son "constantes" a partir de algún término, luego estas son convergentes. Sabemos muy bien que \mathbb{R}^* no es arquimediano.

- Existen cuerpos ordenados algebraicamente completos, y no arquimedios. Por ejemplo, el completado $\overline{\mathbb{R}^*}$ de \mathbb{R}^* es algebraicamente completo (ver [2])

NOTA 4. La propiedad arquimediana del cuerpo K "implica" el siguiente teorema del recubrimiento de Lindelöf.

Teorema de Lindelöf. (Apostol, Teorema 3-28, p.70)
Sea S un subconjunto de K , entonces todo recubrimiento abierto de S posee un subrecubrimiento "contable".

Sin embargo, esto último "no implica" la propiedad arquimediana del cuerpo K . Por ejemplo, consideremos en \mathbb{R}^* un subcuerpo $K = \mathbb{Q}(\lambda)$ donde λ es un infinito positivo, entonces K es un cuerpo ordenado "contable", por lo tanto en K se satisface el teorema de Lindelöf. Evidentemente, K no es arquimediano.

REFERENCIAS

- [1] Apostol, T.M., *Análisis Matemático*, 2a. Edición, Editorial Reverté, España, 1976.
- [2] Herstein, I.N., *Algebra Moderna*, Ed. Trillas, Mexico, 1976.
- [3] Lang, Serge, *Algebra*, Addison Wesley Reading, 1969.
- [4] Linero T., L.A., *Enunciados equivalentes al axioma de completez en un campo ordenado*, Tesis de Magister en Docencia Matemática, U.P.N., 1984.

- [5] Takeuchi, Y., "Completado Secuencial de \mathbb{R} ",
Bol. de Mat., Vol. XX, N° 11, 1986, U.Nal...

Profesor Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional
BOGOTÁ. D.E. Colombia.