Boletín de Matemáticas
Vol. XX, Nº 3 (1986)

LOS HACES DE CONJUNTOS SOBRE UN ESPACIO TOPOLOGICO FORMAN UN TOPOS

Jesús Hernando Pérez - Christian Charrier

En este artículo los autores se proponen demostrar que los haces de conjuntos sobre un espacio topológico forman un Topos. Este resultado es bien conocido ya que hace parte del folklore de la teoría de Topos, pero, según el conocimiento de los autores, su demostración no ha sido publicada.

Con un propósito didáctico, los autores presentan primero las nociones de Topos y de Haces antes de abordar el problema planteado.

Para presentar la noción de Topos es indispensable discutir de antemano otro concepto importante: el de clasificador de subobjetos en una categoría $\mathcal{C}$.

I. CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS.

Un principio general que guía el trabajo con las categorías y en especial con los Topos es el siguiente: redefinir hasta donde sea posible en una categoría $\mathcal{C}$ y, con los elementos que ella posee, los conceptos fundamentales utilizados en la Matemática, particularmente los que aparecen en la teoría de conjuntos.

Pensemos en este ejemplo: "imagen recíproca por una flecha".

Supongamos entonces que $\alpha : X \to Y$ es una flecha en la categoría $\mathcal{C}$, que $\beta : A \to Y$ determina un subobjeto de Y ¿A qué puede llamarse "la imagen recíproca por α" del subobjeto determinado por β?

Supongamos que los productos fibrados pueden calcularse en $\mathcal{C}$, y con la ayuda de ellos puede darse la respuesta.

$$\begin{tikzcd}
\alpha^{-1}(A) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, tail, "\delta"'] \arrow[dr, phantom, "p.f"] & A \arrow[d, tail, "\beta"] \\
X \arrow[r, "\alpha"] & Y
\end{tikzcd}$$

En efecto, el producto fibrado de α con β

nos da la flecha $\delta:\alpha^{-1}(A) \to X$ que resulta mónica, como puede comprobarse fácilmente. Esta flecha determina entonces un subobjeto de X y puede verse que tal subobjeto es independiente de la flecha mónica β. Tenemos ahora un ejemplo muy útil de un functor al que llamaremos imagen recíproca y notaremos I;

$$\mathcal{C} \xrightarrow{I} \text{Conj}^*.$$

Este functor existe si la categoría $\mathcal{C}$ es localmente pequeña y admite productos fibrados. Su definición es como sigue: a cada objeto X de $\mathcal{C}$ le asociamos el conjunto $I(X)$ de los subobjetos de X y si $\alpha:X \to Y$ es una flecha en $\mathcal{C}$, $I(\alpha):I(Y) \to I(X)$ es la función que envía cada subobjeto de Y en su imagen recíproca por α.

Ahora bien, un hecho fundamental para la categoría de los conjuntos es precisamente que el functor $I:\text{Conj} \to \text{Conj}^*$, es representable. En efecto, el conjunto $\Omega = \{0,1\}$ lo representa; pues de hecho, como todos sabemos, si X es un conjunto, $I(X)$ (el conjunto de los subconjuntos de X) es lo mismo que $R_{\{0,1\}}(X)$ (el conjunto de las funciones de X en $\{0,1\}$). Tal situación puede describirse en la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "p.f"] & \{*\} \arrow[d, tail, "\nu"] \\ A \arrow[r, "\chi_\alpha"'] & \{0,1\} \end{tikzcd}$$

consideremos un conjunto unitario cualquiera $\{*\}$ (objeto final en Conj.) y llamemos $\nu:\{*\} \to \{0,1\}$ la función mónica que envía el elemento $*$ en el número 1. Si consideramos ahora un conjunto cualquiera X y un subobjeto arbitrario de X (determinado, por ejemplo, por la flecha mónica $\alpha:A \to X$), existiría entonces una única función χ_α (la función característica de α) tal que el subobjeto determinado por α es la imagen recíproca por χ_α del subobjeto determinado por ν.

Generalizando lo anterior tenemos entonces la siguiente definición:

Supongamos que $\mathcal{C}$ es una categoría localmente pequeña, con objeto final 1 y que admite productos fibrados. Diremos que en $\mathcal{C}$ existe un "clasificador de subobjetos" si es posible encontrar en $\mathcal{C}$ un objeto Ω y una flecha $\nu:1 \to \Omega$ (necesariamente mónica) tal que si X es un objeto cualquiera de $\mathcal{C}$ y $\alpha:A \to X$ es una flecha mónica (de hecho un subobjeto de X), entonces existe una única flecha $\chi_\alpha:X \to \Omega$ para la cual el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "\nu"] \\ X \arrow[r, "\chi_\alpha"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

En realidad, la flecha χ_α está determinada unívocamente por el subobjeto de X definido por α y se concluye, entonces, de lo anterior que el objeto Ω representa el functor I.

2. DEFINICION DE TOPOS.

Podemos ahora presentar la noción de Topos. Un Topos $\mathcal{E}$ es una categoría que satisface los siguientes axiomas:

T_1) En $\mathcal{E}$ existen productos cartesianos, núcleos y un objeto final.
De este axioma se sigue, como ya lo vimos, que en $\mathcal{E}$ existen también productos fibrado.
T_2) En $\mathcal{E}$ existe para cada par de objetos A, B, la exponencial con base A y exponente B.
T_3) En $\mathcal{E}$ existe un clasificador de subobjetos.

Los anteriores axiomas son suficientes para introducir las nociones fundamentales de la matemática como ha sido demostrado ya por numerosos matemáticos. Los Topos aparecen, entonces, jugando el mismo papel que los conjuntos, con la diferencia fundamental que cambia el estilo o método de pensamiento y correlativamente la lógica.

3. UN EJEMPLO DE TOPOS: LOS HACES DE CONJUNTOS SOBRE UN ESPACIO TOPOLOGICO.

3.1 Prehaces de conjuntos sobre un espacio topológico.

Sea **X** un espacio topológico y consideremos el conjunto de las partes abiertas de **X**. Este se puede considerar como una categoría, conviniendo que para dos abiertos $U, V \subset X$ el conjunto $Hom(U,V)$ se reduce a un elemento si $U \subset V$ y es vacío en el caso contrario. Se llama prehaz de conjuntos sobre **X** todo functor F definido sobre la categoría de los abiertos de **X** con valores en Conj*.

Un prehaz F consiste entonces en hacer corresponder a cada abierto de U un conjunto $F(U)$

y en dar una flecha (llamada restricción) $p_U^V: F(V) \to F(U)$ cada vez que $U \subset V$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] & F(V) \arrow[d, "p_U^V"] \\ U \arrow[u, hook] \arrow[r] & F(U) \end{tikzcd}$$

p_U^V debe cumplir con los axiomas de functor, es decir, p_U^U es la identidad para todo U y si $U \subset V \subset W$ tenemos $p_U^W = p_U^V \circ p_V^W$.

3.2 Haces de conjuntos sobre un espacio topológico.

Sea X un espacio topológico y F un prehaz de conjuntos sobre X. Se dice que F es un haz de conjuntos sobre X si cumple las siguientes propiedades:

H_1) Dada $(U_i)_{i \in I}$ una familia de abiertos de X, sean U la reunión de los U_i, S' y S'' dos elementos de $F(U)$. Si las restricciones de S' y S'' a cada U_i son iguales tenemos $S' = S''$.

H_2) Sea $(U_i)_{i \in I}$ una familia de abiertos de X cuya reunión es U y suponemos dados $S_i \in F(U_i)$ de tal manera que para todo $i, j \in I$ las restriccio ciones de S_i y S_j a $U_i \cap U_j$ sean iguales. Entonces existe $S \in F(U)$ cuya restricción a U_i es S_i para todo $i \in I$.

Los haces de conjuntos sobre un espacio topológico X forman una categoría que notaremos $Sh(X)$ cuyos objetos son los haces y cuyas flechas son las aplicaciones naturales entre haces.

3.3 $Sh(X)$ tiene un objeto final.

Sea 1 un haz sobre X tal que para todo abierto U de $X, 1(U) = \{*\}$ (donde $\{*\}$ es un conjunto unitario) y sea $F \in Sh(X)$. Mostraremos que existe una aplicación natural única $\tau: F \to 1$ tal que para todo abierto U de X, $\tau_U: F(U) \to \{*\} = 1(U)$. Es decir, τ_U es una aplicación constante. En efecto, si $U \subset V$ tenemos que el diagrama siguiente es trivialmente conmutativo.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, hook] & F(U) \arrow[r, "\tau_U"] \arrow[dr, phantom, "///"] & \{*\} \\ V & F(V) \arrow[u, "p_U^V"] \arrow[r, "\tau_V"'] & \{*\} \arrow[u, "id_*"'] \end{tikzcd}$$

Luego τ es una aplicación natural y es única por construcción. Así 1 es un objeto final de

$Sh(X)$.

3.4 $Sh(X)$ tiene producto cartesiano.

Sean A y B dos elementos de $Sh(X)$. Puesto que en Conj^* tenemos productos cartesianos, existen morfismos proyecciones $p_{1,U}$ y $p_{2,V}$ tales que $A(U)\times B(U)$ es producto cartesiano. Para cada abierto U de X podemos entonces definir: $(A\times B)(U) = A(U)\times B(U)$.

Si $U \subset V$, es decir si $\gamma: U \to V$, necesitamos definir $(A\times B)(\gamma): A(V)\times B(V) \to A(U)\times B(U)$. Para ello consideremos las restricciones:

$$\alpha_U^V: A(V) \to A(U)$$

$$\beta_U^V: B(V) \to B(U)$$

Dado $(a,b) \in A(V)\times B(V)$ definimos:

$$(A\times B)(\gamma)(a,b) = (\alpha_U^V(a), \beta_U^V(b)).$$

Mostraremos que las proyecciones p_1 y p_2 son aplicaciones naturales:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, "\gamma"'] & A(U)\times B(U) \arrow[r, "p_{1,U}"] & A(U) \\
V & A(V)\times B(V) \arrow[u, "(A\times B)(\gamma)"'] \arrow[r, "p_{1,V}"] & A(V) \arrow[u, "\alpha_U^V"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccc}
U & & A(U)\times B(U) & \xrightarrow{p_{2,U}} & B(U) \\
\gamma \big\downarrow & & (A\times B)(\gamma) \big\uparrow & & \big\uparrow \beta_U^V \\
V & & A(V)\times B(V) & \xrightarrow{p_{2,V}} & B(V)
\end{array}$$

Estos diagramas son conmutativos porque si $(a,b) \in A(V)\times B(V)$, entonces tenemos

$$\alpha_U^V \circ p_{1,V}(a,b) = \alpha_U^V(a)$$

$$p_{1,U} \circ (A\times B)(\gamma)(a,b) = \alpha_U^V(a).$$

De manera similar, se muestra que el segundo diagrama es conmutativo.

Por otra parte, la demostración de que $A\times B$ es un haz es muy simple, con lo cual queda demostrado que entonces existen productos cartesianos en $Sh(X)$.

3.5 $Sh(X)$ **tiene núcleos.**

Sean q^1 y q^2 dos flechas en $Sh(X)$.

$$A \underset{q^2}{\overset{q^1}{\rightrightarrows}} B$$

Luego si U es un abierto de X tenemos

$$A(U) \overset{q_U^1}{\underset{q_U^2}{\rightrightarrows}} B(U)$$

Como en Conj* existen núcleos, sea γ_U tal que γ_U sea el igualador (núcleo) de q_U^1, q_U^2,

$$\mathcal{E}(U) \xrightarrow{\gamma_U} A(U) \overset{q_U^1}{\underset{q_U^2}{\rightrightarrows}} B(U)$$

donde $\mathcal{E}(U) = \{a \in A(U) / q_U^1(a) = q_U^2(a)\}$ y γ_U es la inclusión. De esta manera queda definido el prehaz $\mathcal{E}$ y se observa que efectivamente es un haz. En primer lugar, $\mathcal{E}$ es un prehaz porque los dos diagramas siguientes son conmutativos; las restricciones α_U^V están definidas de $\mathcal{E}(V)$ en $\mathcal{E}(U)$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, hook] & A(U) \arrow[r, "q_U^1"] & B(U) & A(U) \arrow[r, "q_U^2"] & B(U) \\
V & A(V) \arrow[u, "\alpha_U^V"] \arrow[r, "q_V^1"'] & B(V) \arrow[u, "\beta_U^V"'] & A(V) \arrow[u, "\alpha_U^V"] \arrow[r, "q_V^2"'] & B(V) \arrow[u, "\beta_U^V"']
\end{tikzcd}$$

En efecto, si $a \in \mathcal{E}(V)$ tenemos $q_V^1(a) = q_V^2(a)$. Calculando se obtiene $q_U^1 \circ \alpha_U^V(a) = q_U^2 \circ \alpha_U^V(a)$, lo cual significa que $\alpha_U^V(a) \in \mathcal{E}(U)$.

En segundo lugar $\mathcal{E}$ satisface las propiedades de haz, hecho cuya demostración no se incluye aquí. Luego existen núcleos en $Sh(X)$.

3.6 Para cada par de objetos A y B, A^B es un objeto de $Sh(X)$.

Sea U un abierto de X (luego cualquier abierto V de U es un abierto de X). Si A es un objeto de $Sh(X)$ entonces la restricción $A|_U$ está definida por:

$$A|_U:\ \text{abiertos de } U \longrightarrow \text{Conj}^*$$
$$V \longrightarrow A(V).$$

Sea $A^B(U) = Nat(B_{|U}, A_{|U})$ Mostraremos que A^B es un haz.

Dados $U \hookrightarrow V$ y $\tau \in Nat(B_{|V}, A_{|V})$, si $W \subset U$ tenemos $B_{|V}(W) \xrightarrow{\tau_W} A_{|V}(W)$. A τ le asociaremos $\tau_{|U}$ definida como sigue:

$$B_{|U}(W) \xrightarrow{\tau_{|U}{}^{W}} A_{|U}(W),$$

Con $\tau_{|U}^{W} = \tau_W$ (W es un abierto de U y lo es también de V).

La aplicación:

$$p_U^V: Nat(B_{|V}, A_{|V}) \longrightarrow Nat(B_{|U}, A_{|U})$$
$$\tau \longrightarrow \tau_{|U}$$

cumple que $p_U^U = \text{id}$, y si $U \subset V \subset W$, $p_U^W = p_U^V \cdot p_V^W$.

Luego, $A^{\mathcal{B}}$ es un prehaz sobre X.

Sea ahora $(U_i)_{i\in I}$ una familia de abiertos de X cuya unión es U y sean τ y τ' dos elementos de $A^{\mathcal{B}}(U)$ tales que $\tau_{|U_i} = \tau'_{|U_i}$ $\forall i \in I$.

Por otra parte, sean α_U^V y β_U^V respectivamente las restricciones de A y $\mathcal{B}$. $(U \hookrightarrow V)$, y V un abierto de U. Como τ, τ' son aplicaciones naturales, tenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(U\cap V) \arrow[r, shift left, "\tau_{U_i\cap V}"] \arrow[r, shift right, "\tau'_{U_i\cap V}"'] & A(U\cap V) \\
\mathcal{B}(V) \arrow[u, "\beta^V_{U_i\cap V}"] \arrow[r, shift left, "\tau_V"] \arrow[r, shift right, "\tau'_V"'] & A(V) \arrow[u, "\alpha^V_{U_i\cap V}"']
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\tau_{U_i\cap V}\circ\beta^V_{U_i\cap V} = \alpha^V_{U_i\cap V}\circ\tau_V$, $\forall i \in I$

y
$$\tau'_{U_i\cap V}\circ\beta^V_{U_i\cap V} = \alpha^V_{U_i\cap V}\circ\tau'_V \quad \forall i \in I.$$

Pero,
$$\tau_{U_i\cap V} = \tau|_{U_i, U_i\cap V}\,;\ \tau'_{U_i\cap V} = \tau|_{U_i, U_i\cap V}$$

Luego resulta $\alpha^V_{U_i\cap V}\circ\tau_V = \alpha^V_{U_i\cap V}\circ\tau'_V$.

Por lo tanto, siendo a un elemento de $\mathcal{B}(V)$, se sigue que $\alpha^V_{U_i \cap V} \circ \tau_V(a) = \alpha^V_{U_i \cap V} \circ \tau'_V(a)$. Pero, como la unión de los $U_i \cap V$ es igual a V y A es un haz, por H_2 (3.2), tenemos $\tau_V(a) = \tau'_V(a)$. Es decir, $\tau = \tau'$.

Luego, $A^{\mathcal{B}}$ cumple con H_1 (3.2).

Ahora, tomamos la misma familia $(U_i)_{i \in I}$ cuya unión es U y suponemos $\tau_i \in A^{\mathcal{B}}(U_i)$ de tal manera que para todo $i, j \in I$, $\tau_{i|U_i \cap U_j} = \tau_{j|U_i \cap U_j}$.

Si V es un abierto de U, obtenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(V) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\beta^V_{U_i \cap V}"] \arrow[dd, bend right, "\beta^V_{U_j \cap V}"'] & A(V) \arrow[d, "\alpha^V_{U_i \cap V}"'] \arrow[dd, bend left, "\alpha^V_{U_j \cap V}"] \\
\mathcal{B}(U_i \cap V) \arrow[r, "\tau_{i\,U_i \cap V}"] \arrow[dd, bend right, "\beta^{U_i \cap V}_{U_i \cap U_j \cap V}"'] & A(U_i \cap V) \arrow[dd, bend left, "\alpha^{U_i \cap V}_{U_i \cap U_j \cap V}"] \\
\mathcal{B}(U_j \cap V) \arrow[r, "\tau_{j\,U_j \cap V}"] \arrow[d, "\beta^{U_j \cap V}_{U_i \cap U_j \cap V}"] & A(U_j \cap V) \arrow[d, "\alpha^{U_j \cap V}_{U_i \cap U_j \cap V}"'] \\
\mathcal{B}(U_i \cap U_j \cap V) \arrow[r, shift left, "\tau_{i|U_i \cap U_j,\, U_i \cap U_j \cap V}"] \arrow[r, shift right, "\tau_{j|U_i \cap U_j,\, U_i \cap U_j \cap V}"'] & A(U_i \cap U_j \cap V)
\end{tikzcd}$$

. Sea a un elemento de $B(V)$, entonces

$$\tau_{i\, U_i \cap V} \circ B^{V}_{U_i \cap V}(a) = a_i \qquad \forall i \in I$$

Comparemos $\alpha^{U_i \cap V}_{U_i \cap U_j \cap V}(a_i)$ con $\alpha^{U_j \cap V}_{U_i \cap U_j \cap V}(a_j)$.

$$\alpha^{U_i \cap V}_{U_i \cap U_j \cap V}(a_i) = \alpha^{U_i \cap V}_{U_i \cap U_j \cap V} \circ \tau_{U_i \cap V} \circ \beta^{V}_{U_i \cap V}(a)$$

$$= \tau_{j|U_i \cap U_j, U_i \cap U_j \cap V} \circ \beta^{U_i \cap V}_{U_i \cap V_j \cap V} \circ \beta^{V}_{U_i \cap V}(a)$$

$$= \tau_{j|U_i \cap U_j, U_i \cap U_j \cap V} \circ \beta^{V}_{U_i \cap U_j \cap V}(a)$$

$$= \tau_{j|U_i \cap U_j, U_i \cap U_j \cap V} \circ \beta^{U_j \cap V}_{U_i \cap U_j \cap V} \circ \beta^{V}_{U_j \cap V}(a)$$

$$= \alpha^{U_j \cap V}_{U_i \cap U_j \cap V} \circ \tau_{j U_j \cap V} \circ \beta^{V}_{U_j \cap V}(a)$$

$$= \alpha^{U_j \cap V}_{U_i \cap U_j \cap V}(a_j).$$

Luego, por H_2 (3.2), existe b de $A(V)$ tal que la restricción de b a cada $U_i \cap V$ es a_i. De donde, $\tau_V : B(V) \to A(V)$, $a \to b$ define una aplicación natural.

Entonces hemos demostrado que A^B es un obje to de $Sh(X)$.

Consideremos $ev: B\times A^B \to A$ tal que si U es un abierto de X

$$(B\times A^B)(U) = B(U)\times A^B(U) \xrightarrow{ev_U} A(U)$$
$$(b,f) \longmapsto f(b).$$

ev es obviamente una aplicación natural.

$$\begin{array}{cccc} U & B(U)\times A^B(U) & \xrightarrow{ev_U} & A(U) \\ \Big\downarrow & \Big\uparrow \beta_U^V\times\rho_U^V & & \Big\uparrow \alpha_U^V \\ V & B(V)\times A^B(V) & \xrightarrow{ev_V} & A(V) \end{array}$$

Sea X cualquier objeto y α una aplicación natural:

$$\alpha: B\times X \longrightarrow A$$

$$\begin{array}{ccc} B\times X & & \\ & \searrow^{\alpha} & \\ B\times A^B & \xrightarrow[ev]{} & A \end{array}$$

Si U es un abierto de X tenemos el mismo diagrama visto "durante" U.

$$\begin{tikzcd}
B(U)\times X(U) \arrow[dr, "\alpha_U"] & \\
B(U)\times A^B(U) \arrow[r, "ev_U"] & A(U)
\end{tikzcd}$$

Existe $\beta_U : X(U) \longrightarrow Nat(B_{|U}, A_{|U})$

$$x \longmapsto \delta_x$$

tal que si W es un abierto de U entonces

$$\delta_{x_W}(b) = \alpha_W(X_W^U(x), b),$$

donde b es un elemento de $B(W)$ y X_W^U es la restric ción

$$X_W^U : X(U) \longrightarrow X(W).$$

β_U es la única flecha tal que $ev_U \circ 1_{B(U)} \times \beta_U = \alpha_U$. Mostramos que β es una flecha en $Sh(X)$, es decir, es una aplicación natural, lo que equivale a mostrar que el diagrama siguiente es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d] & X(U) \arrow[r, "\beta_U"] & Nat(B_{|U}, A_{|U}) \\
V & X(V) \arrow[u, "X_U^V"] \arrow[r, "\beta_V"] & Nat(B_{|V}, A_{|V}) \arrow[u, "\rho_U^V"']
\end{tikzcd}$$

Sean x un elemento de $X(V)$, W un abierto de U y b

un elemento de $B(W)$.

$$\beta_U \circ \chi_U^V(x) = \delta_{\chi_U^V(x)} .$$

Luego, $$\delta_{\chi_U^V(x),W}(b) = \alpha_W \circ (\chi_W^U \circ \chi_U^V(x), b)$$
$$= \alpha_W(\chi_W^U \circ \chi_U^V(x), b)$$

Por otra parte $\rho_U^V \circ \beta_V(x) = \rho_U^V(\delta_x) = \delta_{x|U}$, de donde, $\delta_{x|_U, W}(b) = \delta_{x,W}(b) = \alpha_W(\chi_W^V(x), b)$. Por lo tanto, el diagrama es conmutativo. En conclusión $Sh(X)$ posee la exponencial de cualquier par de objetos.

3.7 $Sh(X)$ posee un objeto Ω clasificador de sub objetos.

Para U un abierto de X miramos el haz h_U,

$$\text{abiertos de } X \xrightarrow{h_U} \text{Conj}^* \qquad\qquad = \begin{cases} \text{Singleton si } V \subset U \\ \emptyset \qquad\quad \text{si } V \not\subset U \end{cases}$$
$$V \longmapsto Hom(V,U)$$

Sea Ω un objeto de $Sh(X)$. Por el lema de Yoneda, tenemos $Nat(h_U, \Omega) = \Omega(U)$.

Sea ν la aplicación natural entre 1 y Ω tal que $\nu(1(U)) = \nu(*) = U$. ν es mónica.

Como los pull-backs (productos fibrados) existen, tenemos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r] \arrow[d, tail, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & 1 \arrow[d, tail, "\nu"] \\ h_{U} \arrow[r, "\tau"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Como ν es mônica, entonces α es mônica. Luego τ está unîvocamente determinado por α. Es decir, $Nat(h_{U},\Omega)$ son los subobjetos de h_{U}.

Buscamos entonces los subobjetos de h_{U}.

Sea $\sigma \rightarrowtail h_{U}$ y sea V un abierto de X. Luego, $\sigma(V) \subset h_{U}(V)$. Si $V \not\subset U$, $h_{U}(V) = \emptyset$ y si $V \subset U$, $h_{U}(V) = \{*\}$. Se sigue que $\sigma(V)$ es un singleton o el vacîo.

Ahora bien, sea V_{i} un abierto de X tal que $\sigma(V_{i}) \neq \emptyset$; luego $V_{i} \subset U$.

Si W es la uniôn de todos los V_{i}, entonces $W \subset U$ y W es abierto de X. Comparemos entonces h_{W} y σ. Si $V \not\subset W$, tenemos $\sigma(V) = \emptyset$ porque σ es un haz. En cambio, si $V \subset W$, tenemos $\sigma(V) = \{*\}$ y $\sigma = h_{W}$.

En consecuencia, los subobjetos de h_{U} son los abiertos de X contenidos en U.

El objeto Ω es tal que $\Omega(U)$ son los abiertos de X contenidos en U. Por otra parte, Ω es un prehaz, es decir, un functor contravariante definiendo las restricciones $\rho_U^V(W) = W \cap U$, cada vez que $U \subset V$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d] & \Omega(U) \\ V & \Omega(V) \arrow[u, "\rho_U^V"'] \end{tikzcd}$$

Sea U_i una familia de abiertos de X y sean V' y V'' dos elementos de $\Omega(U)$ tales que $V' \cap U_i = V'' \cap U_i$, $\forall i$. Como V' y V'' están incluidos en U, se sigue que $V' = V' \cap U = V' \cap (\cup U_i) = \cup(V' \cap U_i) = \cup(V'' \cap U_i) = V'' \cap \cup U_i = V'' \cap U = V''$.

Por lo tanto, Ω cumple con el Axioma H_1 (3.2). Para $V_i \in \Omega(U_i)$ tal que $\forall i, j \in I$, se tiene que $V_i \cap (U_i \cap U_j) = V_j \cap (U_i \cap U_j)$.

Ahora, sea $V = \cup V_i \subset U = \cup U_i$. Entonces V es un abierto y pertenece a $\Omega(U)$.

$$V \cap U_i = (\cup V_j) \cap U_i = \cup(V_j \cap U_j) \cap U_i$$

$$= \bigcup_{i \neq j} (V_j \cap U_j \cap U_i) \cup (V_i \cap U_i \cap U_i)$$

$$= \bigcup_{i \neq j} (V_i \cap U_j \cap U_i) \cup V_i = V_i, (V_i \cap U_j \cap U_i \subset V_i)$$

Por consiguiente Ω cumple con el axioma H_2 (3.2) y podemos concluir que Ω es un haz.

Mostramos ahora que existe χ_m tal que el diagrama siguiente es un pullback en el cual X es objeto de $Sh(X)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "p.f."] & 1 \arrow[d, tail] \\ X \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Es decir, existe una aplicación natural χ_m tal que el diagrama siguiente es un pullback, donde U es abierto de X

$$\begin{tikzcd} A(U) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \{*\} \arrow[d, "\nu_U"] \\ X(U) \arrow[r, "\chi_{m,U}"'] & \Omega(U) \end{tikzcd}$$

Sea ρ_U^V la restricción de V a U

$$(U \subset V) \quad \rho_U^V : X(V) \longrightarrow X(U).$$

Sea a un elemento de $X(U)$, luego $\chi_{m,U}(a)$ es un abierto W de X incluido en U. Ahora, buscaremos W de tal manera que la restricción de a a W pertenece a $A(W)$. Sean

$$\mathcal{D} = \{V, \text{ abierto, } V \subset U \,/\, \rho_U^V(a) \in A(W)\}$$

y $W = \cup\mathcal{D}$, es decir, el más grande abierto incluido en U tal que la restricción de a a este abierto pertenezca a $A(W)$. Por consiguiente el diagrama siguiente es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A(U) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "///"] & \{*\} \arrow[d, "\nu_U"] \\ X(U) \arrow[r, "\chi_{m,U}"'] & \Omega(U) \end{tikzcd}$$

Sea $\mathcal{D}$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \{*\} \arrow[d, "\nu_U"] \\ X(U) \arrow[r, "\chi_{m,U}"'] & \Omega(U) \end{tikzcd}$$

Ahora bien si $d \in \mathcal{D}$, $\nu_U \circ \alpha(d) = U = \chi_{m,U} \circ \beta(d)$, entonces $i^{-1}(\beta(d)) \in A(U)$. Luego, existe una aplicación (única) $i^{-1} \circ \beta : \mathcal{D} \to A(U)$, tal que los diagramas siguientes conmutan

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "i^{-1}\circ\beta"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\
& A(U) \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & \{*\} \arrow[d, "\nu_U"] \\
& X(U) \arrow[r, "\chi_{m,U}"'] & \Omega(U)
\end{tikzcd}
$$

Es decir,

$$
\begin{tikzcd}
A(U) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \{*\} \arrow[d, "\nu_U"] \\
X(U) \arrow[r] & \Omega(U)
\end{tikzcd}
\quad \text{es un pullback}
$$

En conclusión, $Sh(X)$ es un topos cuyo objeto Ω, clasificador de subobjetos, es tal que $\Omega(U)$ son los abiertos de X contenidos en U.

*

BIBLIOGRAFIA

Charrier, C., *Variantes complejas del espacio-tiempo llano*. Universidad Nacional de Colombia. 1985.

Godement, R., *Théorie des Faisceaux*. Hermann edition Paris, 1964.

Johnstone, P.T., *Topos Theory*. Academic Press, 1977.

*

Carlos Ruíz S.
Profesor Asociado
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional.
Bogotá, D.E.

Liliana Blanco C.
Profesora T.C.
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, D.E.