Boletín de Matemáticas
Vol. XXI, Nº 2,3 1987 **APUNTES**

ANILLOS DE FRACCIONES CASO NO CONMUTATIVO

Oswaldo Lezama[1] *y Hector Linares*[2]

§1. INTRODUCCION.

La construcción del campo de cocientes de un dominio de integridad se generaliza no sólamente a anillos conmutativos (Ver [1]), sino a anillos en general no conmutativos. En este trabajo mostramos dicha generalización siguiendo las ideas de [2], pero incluyendo las pruebas allí omitidas. Ilustramos además la teoría expuesta con suficiente cantidad de ejemplos, no tratados por lo general en la literatura clásica de esta temática.

§2. EXISTENCIA Y UNICIDAD.

A lo largo de todo el trabajo A denotará un

(1) Profesor Asistente, Universidad Nacional de Colombia.
(2) Est. de Magister, Depto. de Mat. Univ. Nal. de Colombia.

anillo no necesariamente conmutativo, con unidad 1. Decimos que $S \subseteq A$, $S \neq \phi$ es un *sistema multiplicativo de* A si $0 \notin S$, $1 \in S$ y el producto de dos elementos cualesquiera de S está en S.

DEFINICION 2.1. Sean A un anillo y S un *sistema multiplicativo* de A. Se dice que el anillo B es un anillo derecho de fracciones de A respecto de S, si existe un homomorfismo de anillos,

$$\phi : A \longrightarrow B$$

tal que,

(i) $\phi(S) \subseteq B^*$, donde B^* denota el grupo *multiplicativo* del anillo B.

(ii) Siendo $a \in A$ se cumple

$$\phi(a) = 0 \Longleftrightarrow au = 0 \text{ para algún } u \in S.$$

(iii) Cada elemento $x \in B$ puede escribirse en la forma

$$x = \phi(a)\phi(s)^{-1},$$

para ciertos $a \in A$, $s \in S$.

Antes de enfrentar la *existencia y unicidad* resulta conveniente preguntarse bajo qué condición un anillo puede sumergirse en un anillo de fracciones.

LEMA. *Sean A un anillo y B un anillo derecho de fracciones de A respecto del sistema S con homo-*

morfismo ϕ. *Entonces,*

(i) ϕ *es inyectivo si y sólo si* S *no posee divisores de cero.*

(ii) ϕ *es biyectivo si y sólo si* $S \subseteq A^*$.

La demostración es muy sencilla y será omitida.

⇒ A diferencia del caso conmutativo ([1]), la existencia de un anillo derecho de fracciones está supeditada al cumplimiento de dos condiciones.

TEOREMA 1. *(de existencia, [2]). Sea* A *un anillo y* S *un subconjunto multiplicativo de* A. A *posee anillo derecho de fracciones respecto de* S *si y sólo si* S *satisface las siguientes condiciones:*

(1) *Para cualesquiera elementos* $a \in A$, $s \in S$ *tales que* $sa = 0$ *existe* $u \in S$ *tal que* $au = 0$.

(2) *Para cualesquiera elementos* $s \in S$, $a \in A$ *existen elementos* $t \in S$, $b \in A$ *tales que*

$$at = sb^{(1)}$$

Demostración: ⇒) Supongamos que B es un anillo derecho de fracciones de A respecto de S con homomorfismo ϕ que cumple las condiciones (i)-(iii) de la

(1) Si a y s están en S entonces el elemento $at = sb \in S$.

definición. Si $sa = 0$ entonces $\phi(s)\phi(a) = 0$ con lo cual $\phi(a) = 0$. Existe entonces $u \in S$ tal que $au = 0$ y hemos probado (1).

Dados $s \in S$ y $a \in A$ entonces $\phi(s)^{-1}\phi(a) \in B$. Según (iii) existen $b_o \in A$, $t_o \in S$ tales que $\phi(s)^{-1}\phi(a) = \phi(b_o)\phi(t_o)^{-1}$. Según (i) existe $u \in S$ tal que $(at_o - sb_o)u = 0$. Tomando $t = t_o u$, $b = b_o u$ obtenemos (2).

Veamos el recíproco. La idea de esta demostración fue tomada de [2], nosotros la dividimos en varios pasos.

Paso 1: En el conjunto $A \times S$ definimos la relación $\equiv$ como sigue: $(a,s) \equiv (b,t)$ si y sólo si existen c, $d \in A$ tales que $ac = bd$ y $sc = td \in S$[1].

La relación $\equiv$ es de equivalencia: $(a,s) \equiv (a,s)$ ya que $as = as$, $ss = ss \in S$; la simetría de $\equiv$ es consecuencia de la simetría de la relación de igualdad; finalmente supóngase que $(a,s) \equiv (b,t)$ y $(b,t) \equiv (e,r)$. Existen elementos $c, d, c_1, d_1, \in A$ tales que

$$ac = bd, \quad sc = td \in S$$

---

(1) Aplicando la condición (2) a los elementos s, t encontramos elementos c, d tales que $sc = td$, donde alguno c ó d es de S, por eso $s\,c = tde$.

$$bc_1 = ed_1, \quad tc_1 = rd_1 \in S$$

Aplicamos (2) a los elementos sc, rd_1: existen entonces x, $y \in A$ tales que $scx = rd_1y \in S$. Resulta pues $acx = bdx$, $bc_1y = ed_1y$, $tdx = scx = rd_1y = tc_1y$; y, de esto último, obtenemos $t(dx - c_1y) = 0$ con $t \in S$. Según (1) existe $u \in S$ tal que $(dx - c_1y)u = 0$, e.d, $dxu = c_1yu$. Por lo tanto, $bdxu = bc_1yu$, e.d.

$$acxu = ed_1yu$$

$$scxu = rd_1yu \in S$$

y hemos probado que $(a,s) \equiv (e,r)$

Paso 2: Denotemos por $\frac{a}{s}$ la clase de equivalencia que contiene el par (a,s) y mediante AS^{-1} el conjunto de clases determinadas. Sean $\frac{a}{s}$, $\frac{b}{t} \in AS^{-1}$; definimos

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} =: \frac{ac + bd}{m}, \tag{3}$$

donde c, d están determinados por la condición (2) aplicada a los elementos s, t, e.d, $sc = td =: m \in S$.

Inicialmente demostremos que (3) no depende de los elementos c y d. En efecto, sean c_1, d_1, $\in A$ tales que $sc_1 = td_1 =: m_1 \in S$. Aplicamos (2) a m, m_1: existen $u, v \in A$ tales que $mu = m_1v \in S$; $scu = sc_1v$, $tdu = td_1v$, e.d, $s(cu - c_1v) = 0$, $t(du - d_1v) = 0$. Según (1) existen $x, y \in S$ tales que $cux = c_1vx$, $duy = d_1vy$. Aplicamos (2) a los elementos x, y: existen w, z tales que $xw = yz \in S$.

Se tiene entonces $muxw = m_1vxw \in S$ y además $acuxw = ac_1vxw$, $bduyz = bd_1vyz$; de aquí resulta $acuxw + bduyz = ac_1vxw + bd_1vyz$, o también

$$(ac + bd)uxw = (ac_1 + bd_1)vxw, \text{ e.d,}$$

$$\frac{ac + bd}{m} = \frac{ac_1 + bd_1}{m_1}.$$

Ahora demostremos que (3) es independiente de las fracciones elegidas:
Supóngase que

$$\frac{a}{s} = \frac{a_1}{s_1}, \quad \frac{b}{t} = \frac{b_1}{t_1}.$$

Sean $c, d \in A$ tales que $sc = s_1d =: m \in S$, $ac = a_1d$, sean también c', d' tales que $m' =: tc' = t_1d' \in S$, $bc' = b_1d'$. Aplicando (2) a m y m' tenemos $mu = m'v \in S$ con $u, v \in A$ (alguno de estos en S). Resulta entonces $scu = tc'v =: n \in S$, $s_1du = t_1d'v =: p \in S$. Por la independencia ya probada

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{acu + bc'v}{n}, \quad \frac{a_1}{s_1} + \frac{b_1}{t_1} = \frac{a_1du + b_1d'v}{p},$$

pero $acu = a_1du$ $bc'v = b_1d'v$ y siendo además $n = scu = mu = m'v = t_1d'v = p$ entonces

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{a_1}{s_1} + \frac{b_1}{t_1}$$

Todo lo anterior muestra que la adición en (3) está correctamente definida.

El producto se define por

$$(4) \qquad \frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t} = \frac{ac}{tu} \; ,$$

donde $c \in A$, $u \in S$ están determinados por la condición (2) aplicada a los elementos s, b:

$$sc = bu$$

(4) no depende de los elementos c, u: sean $c_1 \in A$, $u_1 \in S$ tales que $sc_1 = bu_1$. Aplicamos (2) a u, u_1; existen entonces elementos x, y tales que $ux = u_1 y \in S$ y de aquí $bux = bu_1 y = sc_1 y = scx$, e.d, $s(cx - c_1 y) = 0$. De acuerdo a (1) existe $m \in S$ tal que $cxm = c_1 ym$. Hemos encontrado pues elementos xm, ym tales que $tuxm = tu_1 ym \in S$, $acxm = ac_1 ym$, e.d, $\frac{ac}{tu} = \frac{ac_1}{tu_1}$.

Concluimos el Paso 2 mostrando que (4) no depende de las fracciones elegidas: Supóngase que

$$\frac{a}{s} = \frac{a_1}{s_1}, \quad \frac{b}{t} = \frac{b_1}{t_1}.$$

Es suficiente mostrar que

$$\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t} = \frac{a_1}{s_1}\cdot\frac{b}{t} \quad \text{y} \quad \frac{a_1}{s_1}\cdot\frac{b}{t} = \frac{a_1}{s_1}\cdot\frac{b_1}{t_1}.$$

Consideremos la demostración de la primera igualdad: sea $\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t} = \frac{ac}{tu}$ con $c \in A$, $u \in S$, $sc = bu$; $\frac{a_1}{s_1}\cdot\frac{b}{t} = \frac{a_1 c_1}{tu_1}$, con $c_1 \in A$, $u_1 \in S$, $s_1 c_1 = bu_1$; $am = a_1 n$, $sm = s_1 n \in S$ (ya que $\frac{a}{s} = \frac{a_1}{s_1}$).

Aplicamos (2) a tu y tu_1: existen $w \in S$, $\ell \in A$ tales que

$$tuw = tu_1\ell \ (\in S)$$

Resulta de aquí que $t(uw - u_1\ell) = 0$ con lo cual existe $v \in S$ tal que $uwv = u_1\ell v$, y resulta $buwv = bu_1\ell v$, e.d,

$$scwv = s_1c_1\ell v \ .$$

Aplicamos nuevamente (2) a $scwv \in A$, $sm \in S$: existen entonces $p \in S$, $q \in A$ tales que

$$scwvp = smq \ ;$$

$s(cwvp - mq) = 0$ y existe $r \in S$ tal que

$$cwvpr = mqr \ ;$$

$$acwvpr = amqr = a_1nqr \ .$$

De otra parte, $s_1c_1\ell vp = s_1nq$ y existe $r' \in S$ tal que $c_1\ell vpr' = nqr'$, de aquí $a_1c_1\ell vpr' = a_1nqr'$. Aplicamos (2) a r, r': existen $x \in A$, $y \in S$ tales que

$$ry = r'x \in S.$$

Obtenemos $acwvpry = a_1nqry = a_1nqr'x = a_1c_1\ell vpr'x$; además $tuwvpry = tu_1\ell vpr'x \in S$ estableciéndose la primera igualdad.

Sea $\frac{a_1}{s_1}\cdot\frac{b}{t} = \frac{a_1c}{tu}$ con $c \in A$, $u \in S$, $s_1c = bu$; $\frac{a_1}{s_1}\cdot\frac{b_1}{t_1} = \frac{a_1c_1}{t_1u_1}$ con $c_1 \in A$, $u_1 \in S$, $s_1c_1 = b_1u_1$; $bm = b_1n$, $tm = t_1n \in S$ $(\frac{b}{t} = \frac{b_1}{t_1})$.

Aplicamos (2) a tu, t_1u_1: existen $w \in S$, $\ell \in A$ tales que $tuw = t_1u_1\ell$. Aplicamos ahora (2) a $uw \in S$, $m \in A$: existen $x \in A$, $y \in S$ tales que $uwx = my$, e.d, $tuwx = tmy$. Resulta entonces $v \in S$ tal que $uwxv = myv$ y de aquí $buwxv = bmyv$, e.d,

$$s_1cwxv = b_1nyv$$

De $tuwx = tmy$ resulta $t_1u_1\ell x = t_1ny$ y existe $v' \in S$ tal que $u_1\ell xv' = nyv'$ con lo cual $b_1u_1\ell xv' = b_1nyv'$, e.d,

$$s_1c_1\ell xv' = b_1nyv'$$

Aplicamos (2) a v, v' y encontramos $p \in S$, $q \in A$ con $vq = v'p$. Obtenemos entonces

$$s_1cwxvq = s_1c_1\ell xv'p$$

Aplicando (1), existe $z \in S$ tal que $cwxvqz = c_1\ell xv'pz$, de donde $a_1cwxvqz = a_1c_1\ell xv'pz$, $tuwxvqz = t_1u_1\ell xv'pz \in S$.

Esto completa la demostración de la segunda igualdad.

Paso 3: El conjunto AS^{-1} con las operaciones definidas en el paso 2 es un anillo. El cero es la fracción $\frac{0}{1}$, la identidad 1 es la fracción $\frac{1}{1}$, la verificación de las propiedades de anillo, tales como asociatividad de la adición y de la multiplicación y propiedades distributivas, así como conmutatividad de la adición es rutinaria.

Paso 4: AS^{-1} es un anillo derecho de fracciones de A respecto de S. En efecto, la función

$$(5)\qquad \begin{aligned}\phi : A &\longrightarrow AS^{-1}\\ a &\longrightarrow \frac{a}{1}\end{aligned}$$

es un homomorfismo de anillos, pues fácilmente se demuestra que

$$\phi(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1}+\frac{b}{1} = \phi(a)+\phi(b)$$

$$\phi(ab) = \frac{ab}{1} = \frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1} = \phi(a)\phi(b)$$

$$\phi(1) = \frac{1}{1}$$

Sea $s \in S$, entonces $\phi(s) = \frac{s}{1}$ y $\frac{s}{1}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{1}$, e.d, $\phi(s) \in (AS^{-1})^*$ y $\phi(S) \subseteq (AS^{-1})^*$.

Además, si $a \in A$ es tal que $\phi(a) = \frac{a}{1} = \frac{0}{1}$ entonces existen $c,d \in A$ tales que $1.c = 1.d \in S$, $ac = 0.d = 0$, e.d, existe $c \in S$ tal que $ac = 0$.

De otra parte, si $au = 0$ con $a \in A$ y $u \in S$, entonces $\phi(au) = 0 = \phi(a)\phi(u)$, con lo cual $\phi(a) = 0$ ya que $\phi(u)$ es invertible.

Por último, es claro que dado $\frac{a}{s} \in AS^{-1}$

$$\frac{a}{s} = \frac{a}{1}\cdot\frac{1}{s} = \phi(a)\phi(s)^{-1}$$

Hemos completado la demostración del teorema 1. ▲

Pasamos ahora a considerar la unicidad del anillo derecho de fracciones, en caso de que éste exista.....

PROPOSICION. Sean A un anillo y S un subconjunto multiplicativo de A que cumple las condiciones (1) - (2) del teorema anterior. Sea $g\colon A \to A_o$ un homomorfismo de anillos tal que $g(S) \subseteq A_o^*$. Entonces existe un único homomorfismo h tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi"'] & A_o \\ AS^{-1} \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd} \qquad \phi(a) = \frac{a}{1}$$

es conmutativo, e.d, $h \circ \phi = g$. Si además g es inyectivo, h también lo es.

Demostración: Existencia. Definimos,

(6) $\qquad h(\frac{a}{s}) =: g(a)g(s)^{-1}, \quad a \in A, \; s \in S.$

h está bien definida: si $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ entonces existen elementos $c, d \in A$ tales que $sc = td \in S$, $ac = bd$. De aquí resulta $g(a)g(c) = g(b)g(d)$, $g(s)g(c) = g(t)g(d)$. Además $g(c) \in A_o^*$ ya que $g(s), g(sc) \in A_o^*$. Se sigue que $g(a)g(c)[g(s)g(c)]^{-1} = g(b)g(d)[g(t)g(d)]^{-1}$, e.d, $g(a)g(s)^{-1} = g(b)g(t)^{-1}$ y $h(\frac{a}{s}) = h(\frac{b}{t})$. h es un homomorfismo de anillos: Si $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ac+bd}{m}$ con $sc = td =: m \in S$ entonces

$$h(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}) = g(ac+bd)g(m)^{-1}$$

$$= [g(a)g(c) + g(b)g(d)]g(c)^{-1}g(s)^{-1}.$$

$$= g(a)g(s)^{-1} + g(b)g(d)g(c)^{-1}g(c)^{-1}g(s)^{-1}$$
$$= g(a)g(s)^{-1} + g(b)g(d)g(d)^{-1}g(t)^{-1} \quad (g(d) \in A^*!)$$
$$= h(\tfrac{a}{s}) + h(\tfrac{b}{t}).$$

Además si $\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t} = \frac{ac}{tu}$, con $sc = bu$, $u \in S$, entonces $h(\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}) = g(ac)g(tu)^{-1} = g(a)g(c)g(u)^{-1}g(t)^{-1} = g(a)g(s)^{-1}g(b)g(t)^{-1} = h(\frac{a}{s})h(\frac{b}{t})$. $h(\frac{1}{1}) = g(1)g(1)^{-1} = 1$.

Sean ϕ el homomorfismo definido en **(5)**, $a \in A$. Entonces, $h\circ\phi(a) = h(\frac{a}{1}) = g(a)g(1)^{-1} = g(a)$, es decir, $h\circ\phi = g$.

Unicidad. Sea $f\colon AS^{-1} \longrightarrow A_0$ un homomorfismo tal que $f\circ\phi = g$. Entonces $f(\frac{a}{s}) = f(\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{s}) = f(\phi(a)\phi(s)^{-1}) = g(a)g(s)^{-1} = h(\frac{a}{s})$, e.d, $f = h$.

Finalmente nótese que si $h(\frac{a}{s}) = 0$ entonces $g(a) = 0$; suponiendo g inyectivo $a = 0$ y $\frac{a}{s} = \frac{0}{1}$ resulta h inyectiva. ▲

LEMA 2. *Sean A y S como en la hipótesis de la proposición anterior. Si A se puede sumergir en AS^{-1} (esto es, si ϕ en (5) es inyectivo) entonces AS^{-1} es el menor anillo que contiene A en el cual todos los elementos de S son invertibles.* ▲

De la última proposición se desprende el siguiente teorema de unicidad para los anillos derechos de fracciones.

TEOREMA 2. (*de unicidad,* [1]). *Sean A un anillo y S un sistema multiplicativo que satisfacen las con-*

diciones (1) - (2) *del teorema 1. Sea* A_o *un anillo y* $g: A \to A_o$ *un homomorfismo que satisface las condiciones* i) - iii) *de la definición. Entonces existe un único isomorfismo* $h: AS^{-1} \to A_o$ *tal que* $h \circ \phi = g$*, donde* ϕ *es el homomorfismo definido en* (5). *La demostración es inmediata.*

§3. CASOS PARTICULARES.

1º *Anillo clásico de fracciones.* Sean A un anillo y $S = \{a \in A | a$ no es divisor de cero$\}$. S es un sistema multiplicativo de A. La condición (1) del teorema 1 es superflua. La condición (2) se denomina en este caso *condición derecha de Ore,* y en caso de cumplirse $AS^{-1} =: A_{cl}$ se denomina *anillo derecho clásico de fracciones del anillo* A. El teorema 1 toma en este caso la forma siguiente: A posee anillo derecho clásico de fracciones si y sólo si A cumple la condición derecha de Ore. De acuerdo al Lema 1, A puede sumergirse en A_{cl} y A_{cl} es el menor anillo que contiene A en el cual todos los elementos de A no divisores de cero son invertibles.

2º *Cuerpo de fracciones.* Si A es un anillo sin divisores de cero, el anillo derecho clásico de fracciones de A es un cuerpo (anillo de división) que denotamos T_A y denominamos *cuerpo derecho de fracciones de* A: Si $\frac{a}{s} \neq 0$ entonces $a \neq 0$ y $a \in S$. Resulta pues $\frac{a}{s}\cdot\frac{s}{a} = \frac{as}{as}$ ya que $s\cdot s = s\cdot s$; e.d, $\frac{as}{as} = \frac{1}{1}$ y $\frac{a}{s}$ es invertible.

Nótese nuevamente que T_A existe si y sólo si A cumple la condición derecha de Ore; en tal caso T_A es el menor cuerpo que contiene A. En otras palabras, un anillo sin divisores de cero puede sumergirse en un cuerpo si y sólo si satisface la condición derecha de Ore.

3º *Anillo izquierdo de fracciones.* Es claro a partir de la definición y teoremas 1 - 2 del segundo parágrafo, cómo definir y caracterizar un anillo izquierdo de fracciones.

PROPOSICION. Sea A un anillo y S un sistema multiplicativo de A. Si AS^{-1} y $S^{-1}A$ existen, entonces son isomorfos.

Demostración: Sean $\phi_d: A \longrightarrow AS^{-1}$ y $\phi_i: A \longrightarrow S^{-1}A$ los homomorfismos definidos como en (5). Según la proposición del parágrafo anterior existen homomorfismos $h_d: AS^{-1} \longrightarrow S^{-1}A$ y $h_i: S^{-1}A \longrightarrow AS^{-1}$ tales que $h_d o\phi_d = \phi_i$ y $h_i o\phi_i = \phi_d$, e.d, $(h_d oh_i)o\phi_i = \phi_i$, $(h_i oh_d)o\phi_d = \phi_d$. Por la unicidad en la proposición mencionada obtenemos que $h_d oh_i = 1$ y $h_i oh_d = 1$, e.d, $AS^{-1} \cong S^{-1}A$. ▲

En [2] pag.53, se da un ejemplo de anillo que tiene anillo clásico derecho de fracciones pero no izquierdo.

4º *Caso conmutativo*. Queremos ahora mostrar como las construcciones efectuadas en el segundo parágrafo son generalización del caso conmutativo.

Sea R un anillo conmutativo y S un sistema multiplicativo de R. Nótese en primer lugar que $RS^{-1} = S^{-1}R$.

En [1] la construcción del anillo de fracciones RS^{-1} se da por la relación de equivalencia $(a,s) \sim (b,t)$ equivale a que:

$$(7) \quad \begin{array}{l} \text{existe } u \in S \text{ tal que} \\ atu = bsu, \quad a,b \in R, \quad s,t \in S \end{array}$$

De las relaciones $\sim\ = \equiv$: Si $(a,s) \sim (b,t)$ deducimos que existe $u \in S$ tal que $atu = bsu$. Tomando $c =: tu$, $d =: su$ entonces $sc = td$ con lo cual $(a,s) \equiv (b,t)$. Recíprocamente, si $(a,s) \equiv (b,t)$ entonces existen $c,d \in R$ tales que $ac = bd$ y $sc = td \in S$. De aquí resulta $at(dt) = at(sc) = acts = bdts = bs(td)$, con $dt \in S$, e.d, $(a,s) \sim (b,t)$.

Las operaciones en [1] se definen por

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

(3) y (4) coinciden con estas definiciones. Como $st = ts \in S$ entonces (3) coincide con la suma de arriba. Para el producto basta tener en cuenta que $sb = bs$.

Si R es un dominio de integridad entonces su cuerpo de fracciones es un campo K_R, y se denomina *campo de cocientes(fracciones) del dominio R*.

Nótese que si $R = \mathbb{Z}$ entonces $K_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Q}$.

§4. EJEMPLOS.

EJEMPLO 1. Siendo A un anillo, el grupo A^* de elementos invertibles de A es un sistema multiplicativo para el cual el anillo de fracciones $A(A^*)^{-1}$ siempre existe, y coincide con A (Ver **LEMA 1**): $A(A^*)^{-1} = A = (A^*)^{-1}A$.

De lo anterior se concluye que para $n \geqslant 2$

$$(\mathbb{Z}_n)_{c\ell} = \mathbb{Z}_n$$

En efecto, basta mostrar que el sistema S de elementos no divisores de cero en $\mathbb{Z}_n$, coincide con $\mathbb{Z}_n{}^*$: Evidentemente $\mathbb{Z}_n{}^* \subseteq S$. Recíprocamente, si $x \notin \mathbb{Z}_n{}^*$ entonces existe $2 \leqslant d \leqslant n$ tal que $d|x$, $d|n$. Sean entonces $1 \leqslant r,s \leqslant n-1$ tales que $x = dr$, $n = ds$. Entonces $xs \equiv 0 \ (\text{mód}\, n)$ y $x \notin S$.

EJEMPLO 2. Consideremos en $\mathbb{C}$ el dominio de integridad

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \in \mathbb{C} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$$

Su campo de cocientes es

$$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] = \{x + y\sqrt{-3} \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$$

En efecto, la función

$$g : \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$$

$$a + b\sqrt{-3} \to \frac{a}{1} + \frac{b}{1}\sqrt{-3}$$

es un homomorfismo inyectivo de anillos. Siendo a, b enteros no simultaneamente nulos entonces $g(a + b\sqrt{-3})$ es no nulo, y por lo tanto invertible. Nótese además que cada elemento $\frac{a}{r} + \frac{b}{s}\sqrt{-3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ se escribe en la forma

$$\frac{a}{r} + \frac{b}{s}\sqrt{-3} = g[(as - 3br) + (as + br)\sqrt{-3}]\, g(rs + rs\sqrt{-3})^{-1} \ldots$$

Según el teorema 2, $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ es (salvo isomorfismo) el campo de cocientes de $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

EJEMPLO 3. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia cualquiera no vacía de anillos, y sea para cada $i \in I$ S_i un sistema multiplicativo de A_i. Supóngase que $A_i S_i^{-1}$ existe para cada $i \in I$. Sean

$$A =: \prod A_i, \quad S =: \prod S_i$$

donde π denota producto cortesiano.

Nótese que S es un sistema multiplicativo de A. ¿Existe AS^{-1}? Sean $a = (a_i) \in A$, $s = (s_i) \in S$ tales que $sa = 0$. Existen entonces $u_i \in S_i$, $i \in I$, para los cuales $a_i u_i = 0$; de aquí resulta $au = 0$ con $u = (u_i) \in S$. Sean otra vez $s \in S$ y $a \in A$.

Existen $t_i \in S_i$, $b_i \in A_i$, $i \in I$ tales que

$$a_i t_i = s_i b_i \;,\; i \in I.$$

Se tiene entonces que $at = sb$, con $t = (t_i) \in S$, $b = (b_i) \in A$. Queda de esta manera probada la existencia de AS^{-1}.

Resulta natural preguntarse si los anillos AS^{-1} y $\prod A_i S_i^{-1}$ son isomorfos.

Veamos que la función

$$g: A \to \prod A_i S_i^{-1}$$
$$(a_i) \mapsto \left(\frac{a_i}{1}\right)$$

cumple las condiciones del teorema 2: De (3) del parágrafo §2 se concluye que g es un homomorfismo de anillos. Evidentemente si $s = (s_i) \in S$ entonces $g(s) = \left(\frac{s_i}{1}\right) \in (\prod A_i S_i)^{*}$. Si $a = (a_i) \in A$ y $g(a) = 0$ entonces $\frac{a_i}{1} = 0$ para cada $i \in I$. De aquí existe $u_i \in S_i$ tal que $a_i u_i = 0$, e.d. $au = 0$ con $u = (u_i) \in S$. Resta observar que cada elemento de $\prod A_i S_i^{-1}$ se escribe en la forma $\left(\frac{a_i}{s_i}\right) = \left(\frac{a_i}{1} \cdot \frac{1}{s_i}\right) = \left(\frac{a_i}{1}\right)\left(\frac{1}{s_i}\right) = g(a)g(s)^{-1}$ con $a = (a_i)$, $s = (s_i)$.

Consideremos como caso particular una familia finita de dominios de integridad $R_1, \ldots, R_n$. Siendo $S_i = R_i - \{0\}$, $1 \leq i \leq n$, entonces $S = S_1 x \ldots x S_n$ es el conjunto de elementos de $R = R_1 x \ldots x R_n$ que no son divisores de cero, y por tanto

$$(R_1 x \ldots x R_n)_{c\ell} \cong K_{R_1} x \ldots x K_{R_n},$$

donde K_{R_i} es el campo de cocientes de R_i, $1 \leq i \leq n$.

Por ejemplo

$$(\mathbb{Z} x \ldots x \mathbb{Z})_{c\ell} \cong \mathbb{Q} x \ldots x \mathbb{Q} .$$

EJEMPLO 4. Sean A un anillo y S un sistema multiplicativo de A tal que AS^{-1} existe. Sea X un conjunto no vacío cualquiera. Puesto que el anillo de funciones A^X es un producto cartesiano, entonces de acuerdo a lo obtenido en el ejemplo 3 se tiene el isomorfismo

$$A^X (S^X)^{-1} \cong (AS^{-1})^X$$

donde $$S^X = \{ f \in A^X \mid f(X) \subseteq S \}$$

Si $A = R$ es un dominio de integridad y $S = R - \{0\}$ entonces S^X es el conjunto de elementos de R^X que no son divisores de cero, con lo cual

$$(R^X)_{c\ell} \cong (K_R)^X,$$

siendo K_R el campo de cocientes de R. Por ejemplo

$$(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})_{c\ell} \cong \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$$
$$(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})_{c\ell} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$$
$$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_{c\ell} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$
$$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})_{c\ell} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

EJEMPLO 5. Este ejemplo figura como ejercicio propuesto en [2]. Sea A un anillo y S un sistema multiplicativo de A tal que AS^{-1} existe. Sea $M(n,A)$ el anillo de matrices de orden $n \geq 1$ sobre A y sea $\mathcal{D}(n,s)$ el conjunto de matrices diagonales de $M(n,A)$ cuyos elementos diagonales son tomados de S. Nótese que entonces $\mathcal{D}(n,s)$ es un sistema multiplicativo de $M(n,A)$. Se desea probar que $M(n,A)\mathcal{D}(n,s)^{-1} \cong M(n,AS^{-1})$. En primer lugar estudiamos la existencia de $M(n,A)\mathcal{D}(n,s)^{-1}$: Sean $M = (m_{ij}) \in M(n,A)$, $\mathcal{D} = (d_{ij}) \in \mathcal{D}(n,s)$ tales que $\mathcal{D}M = 0$. Entonces

$$d_{ii}m_{ij} = 0 \ , \ 1 \leq i,j \leq n$$

Según la condición (1) del teorema 1 existen $u_{ij} \in S$ tales que

$$m_{ij}u_{ij} = 0 \ , \ 1 \leq i,j \leq n \tag{8}$$

Si logramos anular todos los elementos de M mediante multiplicaciones sucesivas a la derecha de ella por matrices de $\mathcal{D}(n,S)$, entonces habríamos probado la condición (1) del teorema 1, ya que $\mathcal{D}(n,S)$ es un sistema multiplicativo.

Comenzamos anulando los elementos de la primera fila: Sea $U^{(o)} = \mathcal{D}(u_{11}t_{11}^{(o)},\ldots,u_{nn}t_{nn}^{(o)}) \in \mathcal{D}(n,s)$, donde $t_{11}^{(o)} =: 1$ y $t_{jj}^{(o)} \in S$ están determinados aplicando la condición (2) a u_{jj}, u_{1j}, $j \geq 2$:

$$u_{jj}t_{jj}^{(o)} = u_{1j}b_{1j}, \ \ b_{1j} \in A, \ \ j \geq 2 \ .$$

Segun (8)

$$m_{1j}u_{jj}t_{jj}^{(o)} = m_{1j}u_{1j}b_{1j} = 0, \ \ j \geq 2 \ .$$

Nótese que entonces $M^{(1)} =: MU^{(o)}$ toma la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21}u_{11}t_{11}^{(o)} & m_{22}u_{22}t_{22}^{(o)} & \cdots & m_{2n}u_{nn}t_{nn}^{(o)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ m_{n1}u_{11}t_{11}^{(o)} & m_{n2}u_{22}t_{22}^{(o)} & \cdots & m_{nn}u_{nn}t_{nn}^{(o)} \end{bmatrix}$$

Procedemos ahora a anular los elementos de la segunda fila de $M^{(1)}$: Aplicando la condición (2) a los elementos $u_{jj}t_{jj}^{(o)}$, u_{2j}, $j \geqslant 1$, encontramos $t_{jj}^{(1)} \in S$, $b_{2j} \in A$, $j \geqslant 1$, tales que

$$u_{jj}t_{jj}^{(o)}t_{jj}^{(1)} = u_{2j}b_{2j}, \quad j \geqslant 1 .$$

Aplicando (8)

$$m_{2j}u_{jj}t_{jj}^{(o)}t_{jj}^{(1)} = m_{2j}u_{2j}b_{2j} = 0, \quad j \geqslant 1 .$$

Nótese que entonces $M^{(2)} =: M^{(1)}U^{(1)}$, donde $U^{(1)} =: D(t_{11}^{(1)},\ldots,t_{nn}^{(1)}) \in D(n,s)$, toma la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31}u_{11}t_{11}^{(o)}t_{11}^{(1)} & m_{32}u_{22}t_{22}^{(o)}t_{22}^{(1)} & \cdots & m_{3n}u_{nn}t_{nn}^{(o)}t_{nn}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ m_{n1}u_{11}t_{11}^{(o)}t_{11}^{(1)} & m_{n2}u_{22}t_{22}^{(o)}t_{22}^{(1)} & \cdots & m_{nn}u_{nn}t_{nn}^{(o)}t_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

De manera análoga encontramos matrices diagonales $U^{(2)},\ldots,U^{(n)} \in \mathcal{D}(n,s)$ tales que

$$MU^{(o)},\ldots,U^{(n)} = 0 ,$$

lo cual prueba la condición (1).

Pasamos ahora a probar (2): Sean $M = (m_{ij}) \in M(n,A)$, $\mathcal{D} = (d_{ij}) \in \mathcal{D}(n,s)$.

Aplicamos (2) a los elementos $m_{1j}, d_{11}, 1 \leq j \leq n$, encontramos $t_{jj}^{(o)} \in S$, $b_{1j} \in A$, $1 \leq j \leq n$, tales que

$$(\bar{1}) \qquad m_{1j}t_{jj}^{(o)} = d_{11}b_{1j}, \quad 1 \leq j \leq n$$

Aplicamos (2) a los elementos $m_{2j}t_{jj}^{(o)}$, d_{22} encontramos $t_{jj}^{(1)} \in S$, $b_{2j} \in A$, $1 \leq j \leq n$, tales que

$$(\bar{2}) \qquad m_{2j}t_{jj}^{(o)}t_{jj}^{(1)} = d_{22}b_{2j}, \quad 1 \leq j \leq n$$

Continuando de esta manera, aplicamos (2) a los elementos $m_{nj}t_{jj}^{(o)}\ldots t_{jj}^{(n-2)}$, d_{nn} y encontramos $t_{jj}^{(n-1)} \in S$, $b_{nj} \in A$, $1 \leq j \leq n$ tales que

$$(\bar{n}) \quad m_{nj}t_{jj}^{(o)}\ldots t_{jj}^{(n-1)} = d_{nn}b_{nj}, \quad 1 \leq j \leq n$$

Aplicando combinadamente $(\bar{1}),\ldots,(\bar{n})$ resulta $MT = \mathcal{D}B$, donde

$$T = \begin{bmatrix} t_{11}^{(o)}\ldots t_{11}^{(n-1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn}^{(o)}\ldots t_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(n,s)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11}t_{11}^{(1)}\dots t_{11}^{(n-1)} & b_{12}t_{22}^{(1)}\dots t_{22}^{(n-1)} & \dots b_{1n}t_{nn}^{(1)}\dots t_{nn}^{(n-1)} \\ b_{21}t_{11}^{(2)}\dots t_{11}^{(n-1)} & b_{22}t_{22}^{(2)}\dots t_{22}^{(n-1)} & \dots b_{2n}t_{nn}^{(2)}\dots t_{nn}^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1}t_{12}^{(n-1)} & b_{n-1,2}t_{22}^{(n-1)} & \dots b_{n-1,n}t_{nn}^{(n-1)} \\ b_{n1} & b_{n2} \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

lo cual completa la demostración de la existencia de $M(n,A)D(n,s)^{-1}$.

Veamos ahora que la función

$$g : M(n,A) \longrightarrow M(n,AS^{-1})$$

$$(m_{ij}) \longmapsto (\frac{m_{ij}}{1})$$

satisface las condiciones del teorema 2.

Según (5) del parágrafo §2 g es un homomorfismo de anillos. Si $D = (d_{ij}) \in D(n,S)$ entonces $g(D) = (\frac{d_{ij}}{1}) = D(\frac{d_{11}}{1},\dots,\frac{d_{nn}}{1}) \in M(n,AS^{-1})^*$ con inversa $D(\frac{d_{11}}{1},\dots,\frac{d_{nn}}{1})^{-1} = D(\frac{1}{d_{11}},\dots,\frac{1}{d_{nn}})$.

Sea $M = (m_{ij}) \in M(n,A)$ tal que $g(M) = 0$. Existen entonces $u_{ij} \in S$ tales que

$$m_{ij}u_{ij} = 0, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n .$$

Repitiendo el procedimiento que sigue a (8) encontramos $V \in D(n,S)$ tal que $MV = 0$.

Resta probar que cada matriz $X = (\frac{a_{ij}}{s_{ij}}) \in M(n, AS^{-1})$ se puede expresar en la forma

$$X = g(A)g(D)^{-1}, \quad \text{con } A \in M(n,A),\ D \in D(n,s) .$$

Comencemos con una observación muy sencilla. Dados $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in AS^{-1}$ existen fracciones con denominador común r $\frac{a'}{r}, \frac{b'}{r}$ tales que $\frac{a}{s} = \frac{a'}{r}, \frac{b}{t} = \frac{b'}{r}$. En efecto, aplicando (2) a s,t encontramos $v \in S$, $\ell \in A$ tales que $r =: sv = t\ell \in S$; entonces claramente $\frac{av}{sv} = \frac{a}{s}, \frac{b\ell}{t\ell} = \frac{b}{t}$.

Aplicamos esta observación a los elementos de cada columna de X y encontramos $X' = X$ donde los denominadores por columnas son iguales, digamos

$$X = X' = \begin{bmatrix} \frac{a'_{11}}{r_1} & \cdots & \frac{a'_{1n}}{r_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{a'_{n1}}{r_1} & \cdots & \frac{a'_{nn}}{r_n} \end{bmatrix} .$$

Nótese que $X = X' = g(A)g(D)^{-1}$ donde $A = (a'_{ij})$, $D = D(r_1, \ldots, r_n) \in D(n,S)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Atiyah, M.F. and MacDonald, I.G., *Introduction*

to commutative algebra, Addison-Wesley, 1969.

[2] Stenström, Bo., *Rings of quotients: An introduction to methods of ring theory*, Springer, 1975.

* *

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
BOGOTA. D.E.