Vol. VI No. 6 , pp. 28-58

LA HISTORIA EN EL PROGRAMA DE MATEMATICAS : SU ESTADO ,CALIDAD Y FUNCION(*)

R. L. WILDER

1. *Estado y calidad de la historia.* Según las palabras del gran patriota americano que contribuyó tan magistralmente a la polución de nuestras autopistas y del aire que respiramos, el finado Henry Ford I, ''¡ La Historia es una paparrucha''!. (Realmente él dijo '' La Historia es más o menos una paparrucha'', pero como en muchas otras citas, la forma abreviada se considera mejor que la original). Impresiones similares fueron expresadas por Napoleón quien caracterizó la Historia como ''un fraude'' y Mathew Arnold quien habló de ''Ese enorme Mississippi de falsedad llamado Historia''.

A juzgar por el presente estado de la Historia en el programa de Matemáticas puede concluirse que los matemáticos piensan de la misma manera acerca de ella. Para confrontarlo rapidamente seleccioné siete instituciones estatales incluyendo

(*) Este artículo apareció originalmente en "The American Mathematical Monthly" con el título "History in the Mathematics Curriculum : Its Status, Quality and Function", fue traducido por la profesora Clara de Takahashi y se publica aquí con autorización del autor y de los editores de la revista citada. El contenido del artículo es una transcripción de la conferencia del autor en el Congreso de verano de la MAA en Pennsylvania State University en 1971. N. del E.

desde una de las mas grandes universidades hasta una de las mas pequeñas y cuatro eminentes universidades privadas. Haciendo una investigación en sus prospectos de estudios encontré que entre las siete instituciones estatales, tres tenían departamentos de Historia de la Ciencia, pero en estos departamentos no había en lista ningún curso de Historia de las Matemáticas, como tampoco lo había en ninguno de los siete departamentos de Matemáticas. De las otras cuatro, una ofrecía un curso de medio semestre a nivel de tercer año (hasta la aparición del Cálculo), otra ofrecía un curso de un semestre para maestros, otra un curso de un semestre en Historia de de las Matemáticas Elementales y la cuarta un curso de medio semestre que cubría material hasta el siglo XVII y "Temas seleccionados de Historia de las Matemáticas recientes". Fuera de los "temas seleccionados" que figuraban en este último curso ninguno de los otros mencionaba Historia de las Matemáticas modernas.

Después de haber sido enviado el programa para este congreso, me agradó mucho el recibir una carta del Profesor Arthur Hallerberg de la Universidad de Valparaíso que contenía los resultados de una encuesta que él había enviado el año pasado a 143 institutos que tienen departamentos de Matemáticas de renombre. De las 83 que contestaron, 41 no ofrecían ningún curso en Historia de las Matemáticas, de las restantes ninguna requería este curso para el grado de sus estudiantes de Matemáticas, aunque 8 lo requerían para sus graduados en educación. Me gustaría tener más tiempo para incluir otros de sus resultados.

Más evidencia puede encontrarse en lo que ha aparecido de Historia en el Monthly[1]. En 1957 la sección "Historia" en el índice anual había desaparecido

(1) "The American Mathematical Monthly" órgano oficial de la Asociación Americana de Matemáticas (MAA). N. de la T.

(en realidad no apareció en 1955 pero fue usada para un único artículo en 1956). Con el volumen 76, 1969, bajo el nuevo editor Harley Flanders, el índice fue ampliado a 16 secciones ninguna de las cuales es "Historia"; ésta, debido presumiblemente a su rareza, aparecen en la sección llamada "General".

Ahora bien, yo dudo que la razón de esta situación se halle en la naturaleza de la Historia en si misma. Pueden esgrimirse varias razones aparentemente de más crédito. En primer lugar, mientras que la Historia ha decaido, las matemáticas en sí han estado sufriendo una rápida aceleración—algunos han llamado a esto una "Edad de Oro". Y parece plausible que durante un período de expansión en teoría matemática, el interés en la investigación histórica decaiga. ¿Por qué molestarse con el pasado cuando el futuro ofrece señales tan prometedoras?

Pero estoy seguro de que esto no es todo. Para hablar francamente, he detectado, entre los investigadores en Matemáticas, una corriente rayana en malevolencia, que tiende a producir descrédito, indicando que la investigación histórica, de un tiempo a esta parte ha caido en desgracia. Durante el primer tercio del presente siglo no era raro que un departamento de Matemáticas confiriera un grado de Ph. D. en Historia. Hoy el candidato para un grado en Historia probablemente sería enviado a la Escuela de Educación o al Departamento de Historia de la Ciencia. Y se nota la falta de deseo de los Jefes de Departamento para contratar doctorados de otros departamentos contribuyendo así al desgano de los jóvenes capaces de investigar para proseguir cualquier posible interés en Historia.

¿Cómo entonces va el estudiante a desarrollar su interés en Historia si no se ofrecen cursos sustanciosos en ese tema? Y aquí hay otra posible razón de la decadencia, a saber, que los cursos originalmente enseñados eran en su mayor parte cursos de Historia de las Matemáticas Elementales con solo breves, si las había, incursiones en la Historia moderna. No puedo resistirme a citar un artículo del finado E. T. Bell titulado "Posibles desarrollos en la Historia de las Matemáticas" publicado en Scripta Mathematica en 1945 hace un cuarto de siglo : "Algunas de las más aterradoras peroratas soportadas en salones de clases universitarias por estudiantes que trataban de ganar créditos con cierta facilidad, fueron aquellas perpetradas hace una generación en nombre de la historia científica por supuestos historiadores de las Matemáticas. Estos hombres bienintencionados y sin imaginación transfirieron a la historia la fatuidad seudocientífica de la exactitud del sexto decimal mucho después de que una rápida sucesión de nuevos descubrimientos básicos habían acabado con la meticulosidad sin provecho en la ciencia. Reprobaban la curiosidad como si fuera un vicio y alababan la pedantería como una virtud, todo con la supuesta aprobación del método científico, del cual ellos eran congénitamente incapaces de entender algo. Sus aburridas conferencias parecen haber tenido un inintencionado pero predecible efecto.

"El examen de prospectos recientes muestra que la fracción de universidades y escuelas de educación para maestros que ofrecen un curso en Historia de las matemáticas es despreciable". (Téngase en cuenta que esto era en 1945).

Es claro a quien culpaba Bell y, sea que estuviese en lo cierto o no, me parece que, teniendo en cuenta su inclinación hacia la exageración, estuvo muy cerca a la verdad.

En vista de la ya recargada condición del programa de Matemáticas, comprendo que ni alegatos ni ruegos de mi parte van a sobreponerse a la presente apatía hacia la Historia de las Matemáticas. Estoy convencido de que solo dos cosas pueden hacer posible que la Historia de las Matemáticas compita por un lugar dentro del programa. Estas son : primero, crear cursos que no solo atraigan al estudiante sino que sean de valor intrínseco para su futuro y, segundo, encontrar una manera de rejuvenecer la Historia de las Matemáticas de tal manera que el interés de hacer investigación en ella sea tan grande y tan recompensador como en la investigación matemática propiamente dicha.

2. *Función de la Historia en el programa.* Detengámonos un momento para considerar una pregunta que estoy seguro algunos de ustedes pueden estarse haciendo en este momento, a saber. ¿Por qué debe ponerse más atención a la Historia de las Matemáticas?. Quizás la situación es como debe ser, considerando lo recargados que están los programas y lo difícil que es dar a nuestros estudiantes lo que necesitan, ya sea para un grado en matemáticas o aún para el Ph.D. Más explícitamente, ¿cuál es la función que puede desempeñar la Historia bajo estas circunstancias?

Antes de intentar contestar esto, permítaseme anotar que si alguien me hubiera dicho hace 30 o 40 años que yo estaría sosteniendo una polémica en favor de la Historia ante la M.A.A. habría contestado "Imposible!" Y el que yo lo esté haciendo ahora no es en absoluto el resultado de mi afán por hallar una causa digna de ser defendida o un posible tema para una conferencia ante la M.A.A., sino más bien el intento de contestar al criticismo que por años he estado oyendo de labios de muchos estudiantes. Estas críticas me indicaron que había algo incorrecto en el sistema presente–algo que está siendo aparentemente agravado por el resurgimiento de la investigación matemática. Me refiero a quejas de estudiantes en el sentido de que varios de los cursos que les estamos ofreciendo están demasiado centrados en sí mismos, y que sus profesores no hacen ningún esfuerzo para interrelacionar dichos cursos. Se preguntan ellos cómo se relacionan todas estas especialidades entre sí y qué significado tienen ellas individualmente y con respecto al total de las Matemáticas. ¿Adónde lleva eso, al fin y al cabo?

Hace un par de años participé en una comisión del CUPM que hacía entrevistas a un grupo bastante representativo de estudiantes de Matemáticas algunos de los cuales eran estudiantes graduados. Me impresionó el hecho de que estas mismas evidencias de frustración aparecían repetidamente en las críticas hechas por ellos.

También he observado a menudo que entre los nuevos Ph.D's más capaces y aptos para la investigación se puede encontrar la más grande ausencia de conocimiento con respecto a los fundamentos y significado de su trabajo de especialización al igual que una abismal ignorancia de las razones que tuvieron para hacerlo y de la naturaleza general de las Matemáticas. En resumen, son especialistas sin cultura. Si usted les pregunta por qué son especialistas, la mejor razón que pueden dar es que ésta es la mejor manera de obtener resultados que merezcan ser publicados y por lo tanto la mejor manera de obtener un buen trabajo.

Por supuesto que están en lo cierto, y yo no soy alguien que desacredite la especialización. En esta época todos somos especialistas de una clase o de otra. Pero no creo que cursos de literatura inglesa, filosofía u otros cursos llamados de "humanidades", los cuales comunmente se recomiendan para ampliar la visión del especialista, constituyen la respuesta adecuada; sus efectos son a menudo ahogados por la carga rápidamente creciente de hechos y detalles exigidos por la respectiva especialidad. Lo que se necesita es algo estrechamente relacionado con los propios intereses, lo cual el estudiante no olvidará puesto que realmente complementa sus intereses y que será en realidad capaz de servir al mismo tiempo un propósito humanístico y un propósito matemático. No debe solamente ampliar la propia perspectiva, mostrando el lugar de las Matemáticas en nuestra cultura, sino que también debe informarle donde encaja su especialidad en el esquema general de las Matemáticas, cómo surgió en sus principios y darle medios de juzgar hacia dónde es probable que conduzca. Lo que tengo en mente es aquella clase de conocimiento acerca de las Matemáticas que le permita a uno detectar los vacíos donde se necesitan nuevos conceptos; encontrar áreas amplias donde nuevas estructuras proporcionarían unificación y consolidación de conceptos aparentemente diversos; y reconocer cuándo un campo ha entregado prácticamente todo el fruto matemático que es capaz de producir de tal manera que necesita ya sea un rejuvenecimiento por medio de fertilización con ideas de otras ramas de las Matemáticas, o posiblemente el ser abandonado si sus beneficios para otros campos son nulos. El estudiante debería entender cómo y por qué la introducción de nuevos conceptos puede llevar a la solución de problemas destacados, como también que una vez obtenidos estos conceptos, varias personas trabajando independientemente probablemente obtendrán la solución y que uno no debe culparse a sí mismo si fue uno de ellos y alguien se le adelantó en la publicación. No hay duda de que gran parte de esta clase de conocimiento y perspectiva se adquieren por experiencia y por incremento de la madurez matemática aunque aún en tales casos sospecho que en gran parte son sólo intuitivos.

3. ***Enseñanza de la Historia.*** He estado considerando esta situación por muchos años y es convicción unánime que la historia de las Matemáticas, cuando es conce-

bida y adaptada convenientemente a las necesidades de nuestros estudiantes, es precisamente lo que necesitan muchos de los legos en Matemáticas que pasan por nuestros departamentos. Ahora bien, permítaseme dejar en claro que no pretendo presentarme como una autoridad en Historia; no lo soy. Pero considero que la enseñanza de la Historia es algo en lo cual todos los matemáticos tienen derecho a estar interesados. Y hay indicios de que esto está sucediendo. He descubierto, durante los meses pasados, que varios matemáticos de excelente reputación, ninguno de los cuales es historiador profesional, están ensayando cursos de Historia. Uno de ellos expresó la opinión de que la Historia de las Matemáticas es "una idea cuya hora ha llegado".

Si este es el caso, entonces puede esperarse que surgirán nuevos trabajadores en este campo aportando sus ideas referentes a la manera como debe ser modernizada. Y espero que mis propias observaciones sean recibidas con este ánimo, es decir, como un deseo de contribuir al desarrollo de un cursò de historia que realice las funciones que acabo de mencionar.

Quizás otros compartan conmigo la impresión de que nosotros los matemáticos hemos omitido el considerar la posibilidad de aplicar, a la Historia, métodos que han tenido tanto éxito en el cuerpo de las Matemáticas, a saber, el adoptar un punto de vista estructural. Este ha hecho posible consolidar y fertilizar entre sí partes de las matemáticas aparentemente no relacionadas, elevándolas por lo tanto a un foco más manejable. Los historiadores que deben estar contemplando con temor el problema de registrar todos los desarrollos de los siglos XIX y XX pueden asimilar el ejemplo de sus colegas y preguntarse si un remedio similar puede servir para la historia.

Pero usted puede argumentar : la historia es hecha por seres humanos y ¿cómo va usted a tratar seres humanos introduciendo abstracciones del más alto nivel como lo hemos hecho en matemáticas ? Si nos restringimos a detalles biográficos, cronológicos y anecdóticos, estoy de acuerdo en que no podemos. Pero si en lugar de eso tratamos la Historia de las Matemáticas como un flujo de conceptos e ideas en conjunto entonces la elevamos ya a un nivel más alto de abstracción. Más aún esto puede hacer posible la coordinación y clasificación de eventos históricos de una manera bastante similar a la empleada en Matemáticas propiamente dichas, pero adaptada al punto de vista histórico.

4. Historia cultural. En realidad el punto de vista desde el cual creo deberíamos presentar la Historia de las Matemáticas está a un nivel aún más alto que las Matemáticas. Quiero dar a entender con esto que debe adoptarse una visión más amplia de la Matemática como un organismo vivo y creciente que está evolucionado continuamente : en resumen, deberíamos estudiarla como una cultura. Hace sólo dos meses encontré un librito [1] que contiene tres conferencias dictadas en 1956 por Harry Shapiro, un antropólogo del Museo Americano de Historia Natural. Una de estas conferencias (la segunda) estaba dedicada a las contribuciones que el descubrimiento moderno del concepto de cultura podría hacer, según él, a la investigación histórica y a los escritos sobre historia. Aunque admitiendo que los historiadores " han llegado a estar cada vez más concientes del contenido de la cultura" deploraba el hecho de que pocos historiadores (si algunos) "muestran en sus escritos alguna familiaridad, sea la que fuere, con principios que los antropólogos han podido extraer de datos culturales". Sus observaciones iban acompañadas con ejemplos de la historia Irlandesa y Americana.

Sin embargo no podemos esperar que nuestros estudiantes hayan tomado un curso de antropología cultural. Para salvar esta deficiencia he tratado de diseñar un substituto apropiado, especialmente adaptado al punto de vista del matemático. Esto implica aclarar lo que se entiende por *símbolo* . Esto es necesario ya que la mayoría de los matemáticos usan la palabra "símbolo" en un sentido especial, a saber, en el sentido del así llamado "símbolo matemático" o, en lógica matemática, "símbolo lógico". Esto, me he dado cuenta, ha sido causa de que yo haya sido gravemente mal interpretado en otros tiempos, así que no deseo cometer el mismo error ahora. Por ejemplo, se ha sospechado que yo he exagerado la importancia del "simbolizar" en vista de los "gloriosos resultados no-simbólicos de la geometría griega" y "el desarrollo arábigo de un álgebra retórica" [2]. Pero ambas, la Geometría Griega y el Algebra Arábiga, fueron definitivamente simbólicas. Mi crítico, un historiador muy conocido pero también un matemático, daba por cierto que "símbolo" significaba "símbolo matemático" en el sentido estrecho.

La definición usual del diccionario define "símbolo" como "algo que representa alguna otra cosa" y esto realmente compendia la cuestión en un mínimo de palabras. Si yo pronuncio el vocablo "onda" ustedes probablemente piensan al instante en algo que se forma en el agua, salvo, claro está, que piensen en un arma(1). De todas maneras la palabra "onda" representa algo y por lo tanto es un símbolo. La mayoría de las palabras son símbolos. Pero no todos los símbolos tienen que ser palabras, pueden ser semáforos, figuras geométricas, posiciones de dedos y manos usadas por los sordomudos o símbolos de "paz", por ejemplo. Los publicistas emplean palabras, diseños y dibujos los cuales repiten y repiten por radio, televisión, prensa y otros medios con el objeto de crear símbolos que automática-

---

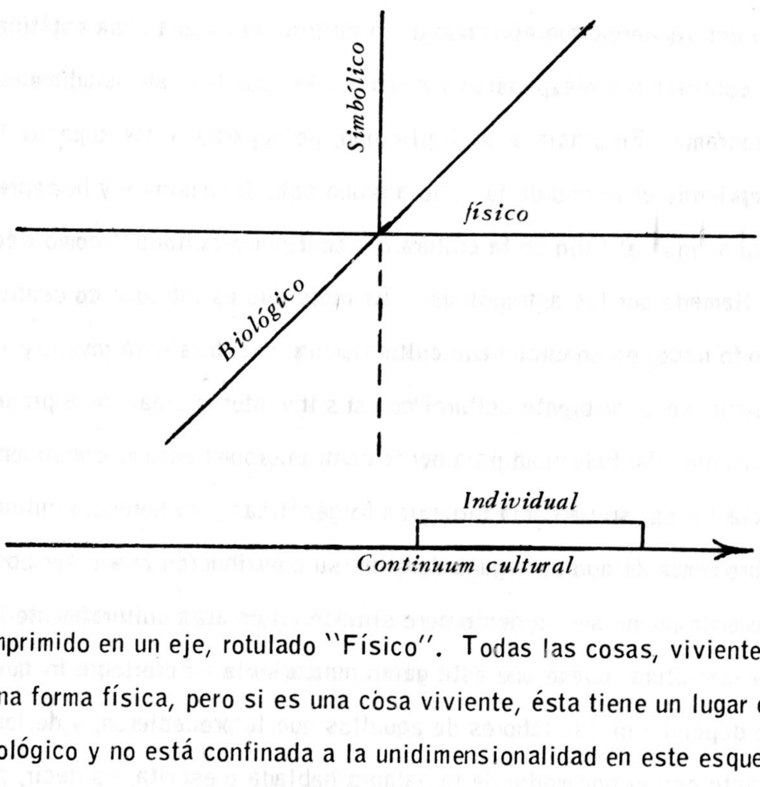
(1) El original inglés usa en este caso los parónimos "air" (aire) y "heir" (heredero) que tienen la misma pronunciación. N. de la T.

mente saltan en nuestras mentes siempre que queramos la clase de artículos que ellos ofrecen en venta. "Chasquea, ceuje, salta", es un símbolo para cierta clase de cereal. No es exagerado afirmar que estamos saturados de símbolos. El que nosotros los matemáticos acostumbremos pensar acerca de "símbolos" en el sentido estrecho en el cual usamos el término, es en sí una indicación de cuan especializados hemos llegado a ser en nuestro pensar.

Una vez que hemos aprendido qué representa un símbolo, usualmente desarrollamos una actitud "hábito" hacia él. Un conductor experimentado detiene, por hábito, su carro cuando ve un semáforo en rojo o un signo de "Pare" ; no es necesario para él ponerse a pensar en el significado de estos símbolos. En efecto, con respecto a muchos símbolos adquirimos el hábito de tratarlos como si fueran idénticos a sus significados—lo que lleva a una gran eficiencia, pero puede ser peligroso algunas veces. En tal contexto ellos funcionan solo como *signos* . Animales, diferentes del hombre, entienden y reaccionan ante signos. Pero, aparentemente, no pueden crear símbolos. Para crear un símbolo o, como diría yo, para *simbolizar* (ver [3]), uno tiene que ser capaz de asignar a alguna combinación de sonidos, eventos, estructuras o cualquier otra cosa que puede ser percibida, un *significado*. Podemos enseñar a un perro a seguir nuestros pasos cuando le ordenamos "¡sígueme! " ó "¡vamos!". Pero hemos sido nosotros, como humanos, quienes hemos inventado esta señal; el perro no la inventó y para él es solo una señal ante la cual va a reaccionar de la manera como lo han entrenado. Observaciones similares pueden hacerse acerca de chimpancés de los cuales se dice que "cuentan" hasta 7. Es el experimentador, no el chimpancé, quien asigna los significados a las luces o colores que sirven como símbolos. Para usar un término biológico, la habilidad de simbolizar es *específico de la especie* (ver [4] por ejemplo), y puede usarse para distinguir a los humanos de los animales; es una condición necesaria y suficiente para ser un miembro de la especie *homo sapiens*.

Para enseñar al estudiante de matemáticas el significado de la palabra "cultura" podemos proceder de la manera siguiente : considérese el diagrama No. 1. Copiando a Euclides, se supone que éste representa el mundo en que vivimos - sólo que ahora es el mundo de la cultura. El mundo tridimensional de Euclides ha

Diagrama No. 1



sido comprimido en un eje, rotulado "Físico". Todas las cosas, vivientes o no, tienen una forma física, pero si es una cosa viviente, ésta tiene un lugar en el dominio biológico y no está confinada a la unidimensionalidad en este esquema, sino que tiene otro grado de libertad en el plano de las formas biológicas. Pero cuando nosotros, como seres humanos, usamos nuestra facultad de simbolizar para conceptualizar, estamos capacitados para entrar a una nueva dimensión, no accesible a otras formas de vida; este es el mundo de la cultura. Sin símbolos no podríamos entrar en él. El mundo en que vivimos está compuesto de herramientas y tecnología, rituales y creencias, arquitectura y artes, literatura y ciencias— incluyendo por supuesto las Matemáticas. Todas ellas están basadas en símbolos, sin los cuales no tendríamos palabras para comunicarnos ni para entregar a nuestra progenie el vasto mundo conceptual que hemos creado—un mundo que moldea nuestras creencias, costumbres y lenguaje, a medida que nos desarrollamos en nuestro sitio particular dentro de este mundo de la cultura (ver Nota 1).

Esto nos recuerda que el mundo de la cultura no es una cosa estática; está sufriendo continuamente expansión y cambio. Así que hay que añadir otra dimensión al diagrama. En gracia a la simplicidad, he separado este aspecto habiendo ahora comprimido el mundo de la cultura a una sola dimensión —y he representado con una sola línea el flujo de la cultura o "continuum cultural" como frecuentemente es llamado por los antropólogos. El individuo es introducido dentro de este flujo cuando nace, es condicionado culturalmente mientras está joven, y eventualmente contribuye al ambiente cultural con sus inventos y creaciones propias, y finalmente muere. Su habilidad para hacer contribuciones estuvo condicionada por su herencia física, su herencia biológica (o genética) y su herencia cultural; si viene pobremente dotado de alguna de ellas su contribución puede ser poca o nula. Genéticamente puede ser un genio pero si nace en un área culturalmente pobre del mundo de la cultura, puede que este genio nunca surja. Pero logre lo que lograse, ello va a depender de las labores de aquellos que lo precedieron, y de los que tienen contacto con él por medio de la palabra hablada o escrita, es decir, por medio de símbolos.

Pero tengo que dejar de lado algunos detalles. Estamos familiarizados con el hecho de que varias formas se desarrollaron en el mundo físico y, más tarde, surgieron las formas vivientes. Pero el proceso de evolución no se detuvo aquí. De la misma manera que la evolución de la célula viviente hizo posible la complejidad de formas de vida familiares al biólogo, así también la evolución de la habilidad para simbolizar en la especie *homo sapiens* , hizo posible la complejidad de culturas que hoy vemos. Y así como la historia de las formas vivientes pudo extenderse y hacerse más significativa con la teoría Darwiniana y post-Darwiniana de la evolución así puede la Historia Cultural del hombre–y esto incluye la Historia de la Ciencia y su subdominio, la Historia de las Matemáticas –ser complementada por medio de una teoría de la evolución. Como se evidenció claramente en la celebración del centenario, en 1959, de la publicación del *Origen de las Especies* de Darwin (cuyas actas han sido publicadas en 3 volúmenes [5]), la antropología moderna ha llegado a reconocer que el proceso de evolución no se detuvo en lo biológico sino que continuó en lo cultural. La evolución de la cultura ha llegado a ser un campo de investigación tan activo como lo ha sido la evolución de las formas biológicas. Y, podría añadir entre paréntesis, la evolución cultural se ha visto acompañada por, virtualmente, la misma clase de desacuerdo en varios círculos académicos que acompañó a la teoría de la evolución biológica. Esta es la razón por la cual aún usamos el término "teoría" en conexión con ella, aunque ya que ella explica tantas cosas que de otra manera parecerían tener solo vagas explicaciones míticas o filosóficas, hay pocas dudas acerca de su utilidad y respetabilidad científicas.

Quisiera sugerir que un curso de un semestre en lo que yo llamo "Evolución de Conceptos y Teorías Matemáticas" proporcionará al estudiante respuestas a preguntas tales como ¿ De qué manera las matemáticas llegaron a lo que son ? e informarle acerca de lo que él probablemente verá en el futuro. Tal curso estaría basado en la historia, pero historia en el sentido de una subcultura que evoluciona continuamente. La historia tratada podría ser antigua o moderna o ambas dependiendo de la madurez matemática de los estudiantes. No es necesario que reemplace el tipo más ortodoxo de curso de historia para el estudiante de historia, aunque aún él aprovecharía tomándolo antes de sus otros cursos de historia.

5. *Historia como evolución.* Ahora bien, la historia proporcionará principalmente los estadios [1] del proceso evolutivo. Pero la evolución es algo más que eso. Si echamos una mirada a lo que los biólogos han hecho, notaremos que algunos de los principales problemas de evolución biológica han estado relacionados con la dinámica del proceso; es decir, con aquellas fuerzas que fueron instrumentos para causar los diversos estudios. El mismo Darwin propuso la teoría de la selección natural – supervivencia del más apto. Más tarde los biólogos descubrieron el mezclarse desordenado de los genes y las fuerzas mutacionales. Pero probablemente debido a su tardía aparición en la escena científica, la teoría de la evolución cultural parece no haber avanzado tanto (ver Nota 2). Los antropólogos han sido incapaces de ponerse de acuerdo acerca de los estadios de la evolución cultural general – debemos recordar que ellos tienen que apoyarse fuertemente (además de sobre datos de culturas primitivas existentes) sobre evidencia arqueológica más bien que sobre evidencia registrada. Y la cultura no se encuentra en excavaciones sino que tiene que ser deducida de las ollas, huesos, armas y otras evidencias físicas. No puede negarse que se han descubierto ciertas fuerzas tales como la *difusión* ó paso de elementos culturales tales como costumbres, religiones y herramientas de

---

(1) Bases, períodos, etapas. *N. de la T.*

una cultura a otra. Pero aún aquí se ha consumido mucho tiempo y energía en discusiones sobre si es la difusión o la invención independiente la causa de similaridades entre ciertas culturas diferentes. Se ha llegado a reconocer sin embargo que estas dos posibilidades no son mutuamente exlcuyentes. Por ejemplo, el contar probablemente se originó independientemente en muchas culturas diferentes pero cuando una tribu primitiva se pone en contacto con un estado más avanzado de civilización, usualmente tiene lugar una difusión de las prácticas de contar del más avanzado al menos avanzado.

En los ``Puntos de Discusión'' de un comité sobre *Evolución Social y Cultural* durante el centenario de Darwin en Chicago que mencioné anteriormente puede encontrarse lo siguiente (5 ; vol. 3 p. 233) : ``En cuanto a la macrodinámica de la evolución cultural, sus causas y principios, ... no hay todavía un consenso general. En el futuro próximo este tema necesita investigación cuidadosa. Esto es necesario como base para cualquier intento de predecir o controlar la dirección de la evolución cultural''.

Afortunadamente en la Historia Matemática tenemos una gran riqueza en información registrada. Uso la palabra ``riqueza'' a pesar de que los historiadores lamentan la pérdida de la mayor parte de los trabajos matemáticos de los Griegos, por ejemplo. En comparación con la escasez de antiguos restos con los cuales tienen que trabajar los antropólogos, somos en realidad afortunados. Sería muy placentero saber más acerca de cómo evolucionaron el contar y el concepto de número y también quienes fueron los individuos que en realidad lograron los descubrimientos e invenciones geométricos presentados a nosotros como un producto terminado en los Elementos de Euclides. Pero deberíamos estar agradecidos de que podamos deducir con bastante seguridad, cómo tuvo lugar, en líneas generales, el temprano desarrollo matemático y por supuesto, en el caso de las matemáticas modernas, tenemos realmente una gran riqueza en material registrado. Mirando los estadios a través de los cuales han pasado las Matemáticas, quedan aún algunas conjeturas, especialmente en el nivel elemental. En cuanto a las fuerzas involucradas parece que hay poca justificación para pensar que fueron muy diferentes (excepto por ser más pocas en número) de las fuerzas que operan hoy.

En el diagrama número 2, se da una lista de los *estadios* más tempranos en la evolución del concepto de número (ver [6] p. 180). Tengo que omitir detalles. Las primeras dos fases las hemos obtenido de los antropólogos. Evidencias antropológicas referentes a primitivas palabras numéricas permiten inferir el uso de comparación por medio de correspondencia uno-a-uno, mientras que muchos registros numéricos del pasado evidencian el empleo de tarjas, siendo el más antiguo de ellos el hallado en 1937 y que consiste en un hueso de lobato de la era paleolítica cubierto de muescas agrupadas de tal manera que resulta indudable afirmar que se trata de una tarja (ver nota 3). El único asunto acerca del cual puede haber desacuerdo es "Misticismo" (Nota 4). Ciertamente la mayor parte de nosotros estamos familiarizados con la numerología Pitagórica- la cual tiene su contraparte en el antiguo misticismo babilonio y creo que hay buenas razones para asignarle parte en la evolución del concepto de número-en pocas palabras, con los números que se convierten en nombres o en cosas. Aún hoy sobrevive, por supuesto, en la hueste de numerologistas, astrólogos y logias del número. El número 13 goza de tan mala reputación que induce a muchos hoteles modernos a omitir el piso trece, aunque estoy seguro que sus administradores no podrían decirnos qué es el número 13 como concepto. De hecho, todos estos estados tienen sus contrapartes

Diagrama No. 2

Estadios en la Evolución del concepto de Número

Distinción entre uno y dos	Sistemas Numéricos
Uno-dos-muchos	Misticismo
Comparación : Correspondencia (1-1)	Operaciones con numerales
Tarjas	Fracciones
Palabras numéricas	Cero
Ideogramas	Números negativos, complejos, etc.

Diagrama No. 3

Fuerzas de la Evolución Matemática

1.	Presión Ambiental	6.	Generalización
2	a) Física	7.	Consolidación
	b) Cultural	8.	Diversificación
2.	Presión Hereditaria	9.	Especialización
3.	Simbolización	10.	Retraso Cultural
4.	Difusión	11.	Resistencia cultural
5.	Abstracción	12.	Selección

modernas, así como muchas formas biológicas antiguas existen en forma moderna.

6. Fuerzas de la evolución; cómo crecen las Matemáticas. A manera de contraste, considérese la lista de *fuerzas* de evolución matemática dadas en el diagrama No. 3 (Nota 5). De nuevo debo omitir los detalles, pero ilustraré brevemente su naturaleza. (Ver, sin embargo, la discusión en mi libro al cual hice referencia antes).

La presión ambiental fue citada en primer lugar, ya que fue incuestionablemente la primera y más elemental de las fuerzas involucradas en la evolución de las Matemáticas. En efecto, esta fuerza probablemente era activa aún antes de que el hombre evolucionara, pues la capacidad de diferenciar entre uno y dos puede ser ejercida por la mayor parte de los animales y no es necesariamente de naturaleza cultural. Para adaptarse, el animal tiene que ser capaz, por ejemplo, de detectar si está haciendo frente a uno o más enemigos. Así pues, la mayor parte de la presión ambiental inicial fue de naturaleza física. Sin embargo, con la evolución de la cultura en el hombre, una presión ambiental de naturaleza cultural empezó a jugar un papel, como era de esperarse, ya que el hombre estaba entrando en un nuevo mundo. Aparecieron entonces la comparación por acoplamiento, el uso de tarjas y, eventualmente, la invención de palabras para designar números y cuando surgió y se desarrolló la vida urbana, la presión ejercida por la construcción, la arquitectura, los impuestos y el registrar esto y aquello, forzaron la invención del cómputo elemental. Naturalmente, la presión cultural aún juega un papel activo en la evolución matemática, como lo pueden atestiguar aquellos que fueron afectados por las demandas de la Segunda Guerra mundial. ¡Y no se piense que las presentes condiciones económicas que han tenido como resultado una escasez de empleos para nuevos Ph.D's no va a tener su efecto!

Comentaré, en forma breve únicamente, *cómo* estas fuerzas trabajan individualmente – en realidad, no he tenido tiempo en mis propios estudios para completar tal análisis (ningún genetista ha resuelto todos los problemas relacionados con mutaciones). Pero estoy seguro que aún consideraciones superficiales acerca de ellas serán suficientes para indicar su función general y su importancia. El simbolizar estaba ya en acción en el proceso de inventar las palabras para designar números; como a menudo lo hace el matemático, el hombre primitivo utilizó palabras del lenguaje ordinario como, por ejemplo, el uso de "mano" para designar el número 5. El trabajo clásico "El Concepto de Número" escrito en 1896 por L.L. Conant es revelador a este respecto [7]. Y por supuesto el simbolizar es una de nuestras principales herramientas, como también lo son la abstracción y la generalización. La difusión, el retraso cultural, y la resistencia cultural las he tomado de los antropólogos. Ya he definido lo que entiendo por difusión; no estaríamos usando el sistema sexagesimal Babilónico para medida fraccionaria de ángulos si éste no hubiera sido difundido de una cultura antigua a otra y eventualmente a nuestra propia Cultura Occidental. Aún nuestras publicaciones pueden ser consideradas como medios de difusión de ideas matemáticas.

El retraso cultural puede considerarse como una especie de "pereza" o indisposición para hacer el esfuerzo de adoptar una herramienta más eficiente. Acabo de mencionar el uso que hacemos de la numeración Babilónica para medir ángulos e imagino que el retraso cultural también jugó algún papel aquí, pero esto lo dejo para el historiador profesional. Un ejemplo actual se encuentra en los planes que hay para introducir el sistema métrico en este país; el gran problema consistirá en superar el retraso cultural. La resistencia cultural es un más franco obstáculo en contra de la difusión. La mayor parte de los misioneros han chocado con ella y por todo un siglo la comunidad matemática inglesa se resistió a adoptar la notación leibnitziana para diferenciales presumiblemente por lealtad a Newton. Estoy seguro que algunos de ustedes pueden recordar ejemplos de resistencia cultural en círculos matemáticos; casos en que un grupo de matemáticos rehusa adoptar conceptos y métodos más eficientes que han surgido y evolucionado en otros grupos; por supuesto el retraso cultural puede también ser efectivo en tales casos.

Dos de las influencias más importantes y profundas entre las citadas son la presión hereditaria y la consolidación, las cuales, sólo a medida que las Matemáticas se han hecho más maduras y complejas, han logrado que su influencia llegue a ser suficientemente grande para hacerlas obvias. La presión hereditaria es una presión cultural creada por la acumulación, usualmente durante períodos de larga duración, de conceptos y de sus interacciones *dentro* de un sistema. Y me doy cuenta que los historiadores lo han detectado algunas veces. Por ejemplo, el finado historiador de la ciencia, George Sarton (8; p. 444) afirmaba que " El ensamble total de la ciencia parece . . . estar creciendo como un árbol; en ambos casos la dependencia del medio es suficientemente obvia, sin embargo la principal causa de crecimiento, la urgencia de crecer, está *dentro* del árbol, no afuera (la cursiva es nuestra)". Creo también que lo descrito por Struik [9] como una fuerza cultural y que ha llamado "ímpetu cultural" es en gran parte una presión hereditaria (aunque algunas veces es presión cultural de tipo ambiental). La presión hereditaria intervino activamente en la admisión definitiva de los números complejos como entes respetables en la Matemática, aunque por un largo tiempo ellos fueron los que Cardano llamó *numeri ficti* o *numeri falsi*. Un ejemplo cardinal en matemáticas modernas lo constituye la teoría de conjuntos que nació debido a las demandas de la teoría de funciones. A medida que cada uno de nosotros es introducido por sus mentores en la corriente de la cultura matemática, inevitablemente reaccionamos a las presiones hereditarias detectando en dónde algunas mejoras, nuevos teoremas y nuevos conceptos contribuirán al desarrollo de la rama de las matemáticas en la cual hemos elegido trabajar. Los aspectos sicológicos de nuestras reacciones han sido descritos por Poincaré y Hadamard.

Aunque hoy es una de las fuerzas más activas en las Matemáticas, la consolidación ha operado durante toda la historia matemática. En épocas tan remotas como la de los antiguos Babilónios , cuando los Akkadios conquistaron Súmer, consolidaron los antiguos términos sumerios de "multiplicar por ", "hallar el recíproco de" con su aritmética basada en ideogramas, iniciando así un importante avance en el simbolismo matemático. Derek Price cita la consolidación, en el *Almagesto* de la astronomía *geométrica* griega con la astronomía *numérica* de los Babilonios como la posible razón por la cual la ciencia occidental ha alcanzado tales alturas mientras que esto no ocurrió en otras civilizaciones, como la China, que tenían todos los ingredientes para tales hazañas. Dicho autor plantea un caso bastante convincente para sostener esta tesis en el primer capítulo de su libro "La Ciencia de Babilonia" [10] .

Y aproximándonos a la era moderna, un ejemplo sobresaliente de consolidación fue el de número y línea, como resultado de la cual los analistas que precedieron la así llamada "Aritmetización del Análisis" pudieron crear un enorme cuerpo de buena Matemática contando con la ayuda de la intuición geométrica. Y durante la era moderna uno de los ejemplos más interesantes fue el de la consolidación del álgebra y la topología. Campos tales como la geometría algebraica, la geometría diferencial y la topología diferencial surgieron por consolidación. Puede inferirse que, a medida que crece el cuerpo de las matemáticas, la oportunidad de consolidación aumenta y el incremento de poder así logrado puede observarse en la solución de problemas que habían desafiado los intentos de solución en sus propios campos .

Es así como este proceso efectúa una especie de inter fertilización.

Debe anotarse que, en general, estas fuerzas no actuan independientemente. Tanto como en biología, donde la adaptación se une a menudo con la mutación de genes para lograr efectos de supervivencia, así la consolidación en matemáticas se ve frecuentemente forzada por presión hereditaria; y en este proceso, la difusión, generalización y abstracción pueden jugar algún papel. Fue la consolidación de rasgos típicos de los grupos presentes en varias teorías matemáticas lo que condujo a la teoría de grupos abstractos, y la teoría de categorías es un bonito ejemplo donde la generalización de los rasgos típicos de la plétora de teorías de la homología en la topología algebraica moderna condujeron a una consolidación de elementos comunes que está demostrando ser una de las más importantes herramientas nuevas en matemáticas modernas. Si esta clase de cosas no tuviesen lugar, las matemáticas simplemente crecerían como un árbol con innumerables ramas sin contactos entre sí teniendo como probable resultado una situación caótica.

7. *Ejemplo de curso.* Me es imposible hacer, en 50 minutos, la defensa completa de lo que yo firmemente creo es un área que ofrece muchas promesas para la investigación. Concluiré con algunos comentarios sobre lo que yo pienso que puede hacerse en favor del estudiante con base en estas ideas. Permítaseme, en primer lugar exhibir brevemente y a grandes rasgos, un bosquejo de un curso de medio semestre que dicté en la Universidad de California en Santa Bárbara hace un año. El diagrama número 4 da una lista de los temas generales que fueron tratados. Se suponía que los estudiantes estaban en tercer o cuarto año pero se permitió la asistencia de algunos estudiantes graduados incluyendo uno que estaba trabajando pa-

ra su Ph.D. en Filosofía. Ya que algunos de estos temas pueden parecer extraños, describiré a grandes rasgos dos de ellos.

Diagrama No. 4

Descripción de un curso

1. Símbolos y simbolización
2. Cultura
3. Conteo
4. Evolución del contar
5. Evolución de la geometría
6. Evolución del sistema de los números reales.
7. Aspectos de la realidad
8. Evolución de función, concepto de conjunto.
9. Evolución del análisis real.
10. Aparición de contradicciones.
11. Identificación, análisis de fuerzas causantes de evolución.
12. Papel del individuo en la evolución.
13. Filosofía de las matemáticas.
14. "Leyes" de evolución

El Diagrama No. 5, "Aspectos de la Realidad", puede explicarse someramente haciendo notar que a través del curso, repetidamente hice énfasis, a medida que se presentaba la oportunidad, en que como parte del mundo de la cultura, las matemáticas son tan reales como cualquier sector del mundo físico. Pero como tienen una tendencia a trabajar en niveles de abstracción cada vez más altos, continuamente necesitamos renovar nuestra confianza en que nuestras creaciones en verdad añaden algo al cuerpo existente de la realidad matemática. Esto ha llevado al uso de modelos—lo cual explicará el por qué varios de los temas se relacionan con teoría de modelos.

Diagrama No. 5

7. Aspectos de la Realidad.

(a) Físico; percepción de lo

(b) Extensión al ambiente cultural

(c) Iniciación en el uso de modelos

i) Función para mantener contacto con la realidad

ii) Modelos de Beltrami y de Klein.

(d) Evolución de la teoría de modelos.

(e) Papel de los modelos en la axiomatica.

(f) Realidad matemática

Realidad de los conceptos después de su adopción por la comunidad matemática.

Refirámonos ahora al diagrama No. 6 : La evolución de los conceptos de función y conjunto fue incluida entre estos temas en parte porque yo podía contar con que todo el mundo tendría alguna familiaridad con estas nociones y en parte también porque ellos ofrecen un excelente ejemplo para mostrar las inter-relaciones de las fuerzas de evolución.

la diversión de reflexionar acerca de "lo que pudo haber sucedido" no fue desdeñada. Escogí este diagrama para mostrarlo aquí porque es muy simple (no históricamente completo sino puramente indicativo) y es más bien pertinente en vista de los temas desarrollados por el Profesor Robinson quien ha discutido en su libro [11] algunas de las razones de por qué el camino delineado en la columna de la mitad no ha sido proseguido por el análisis; la columna de la derecha representa el el curso actual del análisis según se observará posteriormente.

Quisiera pensar que aquellos que tomaron el curso lograron entender cómo habían llegado a configurarse los varios cursos que ellos estaban tomando y cómo estaban interrelacionados, aunque mucho de esto lo dejé para que cada persona lo razonara por sí misma usando las ideas que había, eso espero, asimilado. Ciertamente todos entendieron que las matemáticas están aún evolucionando y que si ellos iban a hacer de las matemáticas una carrera, su única oportunidad de éxito consistiría en entrar en la corriente en algún punto razonable por ellos elegido; pero sabiendo que tendrían que dedicar mucho tiempo en su futuro manteniéndose al día con los cambios que inevitablemente ocurren.

Obviamente este no fue un curso ortodoxo de historia. Fue más bien un curso en el tono de lo que el historiador de la ciencia consideraría como una ciencia de la historia de las matemáticas. Quizás pueda diseñarse un curso de historia siguiendo líneas más ortodoxas y que logre casi los mismos fines de una manera más eficiente. Me ha complacido mucho, durante la preparación de este material, saber de varios colegas matemáticos que están trabajando en el problema de hallar un curso adecuado de historia moderna; tánto, que yo espero ansiosamente el rejuvenecimiento de la historia en una forma más actual en el salón de clase; y más

Diagrama No. 6

8. Evolución de los conceptos de Función y Conjunto

(a) Teoría del sonido; cuerda vibrante.

(b) D'Alembert: soluciones de Euler y Bernoulli.

i) Discrepancias sobre el significado de "función"

(c) Teoría del calor; Fourier

i) Noción "desinhibida" de función.

(d) Condiciones de Dirichlet

(e) Obra de Riemann en series trigonométricas:

i) Condiciones de integrabilidad

ii) Influencia del concepto de función

(f) Teorema de unicidad de Cantor

i) Especies de un conjuntos de puntos.

ii) Iniciación de la teoría de conjuntos.

(g) Aparición de nuevos principios

i) Hipótesis del continuo; axioma de elección.

Al mostrar como trabaja el proceso de evolución, hice uso extenso de láminas o diagramas, para mostrar gráficamente el flujo de influencias de una parte de las matemáticas en otra, como también las consolidaciones. La mayor parte de estas son demasiado complicadas para comprimirlas en un diagrama compacto. Se incluye uno (diagrama No. 7) que contiene algunos rasgos de conjetura—y a propósito,

Algunas posibles direcciones para los Fundamentos del Análisis

↓	↓	↓
Pitágoras	Demócrito	Eudoxo
		Arquimedes
		|
		Newton
↓	↓	↓
Kronecker	Leibniz	Cauchy
↓	↓	↓
Matemáticas Constructivas	A. Robinson	Weierstrass
↓	↓	↓

aún, que el tema alcance tal grado de aceptación como para ser considerado de nuevo digno para el Ph.D. en Matemáticas.

8. Implicaciones Filosóficas. Una última palabra : Cuando hablé brevemente de la realidad matemática, quizá algunos de ustedes pensaron ¿ dónde encaja el Platonismo aquí ? En particular; ¿ Va contra el Platonismo una teoría de la evolución matemática basada en la localización de la realidad matemática en el mundo de la cultura? La respuesta es enfáticamente ''No''; no más de lo que el Darwinismo destruyó a las religiones existentes, a pesar de los temores del clero. El antropólogo estudia las religiones como parte de la cultura; para él aquellas forman un mecanismo de adaptación y él no toma partido, como científico, sobre si ellas representan o nó una realidad fuera del mundo de la cultura . Similarmente, una teoría de la evolución matemática puede estudiar, usando las herramientas de la ciencia, la manera como se ha desenvuelto el Intuicionismo, el Formalismo, el Constructi - vismo, el Platonismo o cualquier otra filosofía de las matemáticas. Pero dicha teoría no toma posición con respecto a la así llamada "Verdad" de cada una de las diversas filosofías como tampoco con respecto a los diversos tipos de realidad que estas puedan representar. Así que, si usted es Platonista ¡continue siéndolo y gócelo!.

Notas

1. Ver *An Essay on Man* por Ernesto Cassirer, Yale Univ. Pr., New Haven, Conn., 1944. "Comparado con otros animales el hombre . . . vive . . . en una nueva *dimensión* de la realidad . . . . La realidad física parece retroceder a medida que la actividad simbólica del hombre avanza. . . Tánto se ha envuelto a sí mismo en formas lingüisticas, en imágenes artísticas, en símbolos míticos o ritos religiosos que no puede ver o saber nada excepto interponiendo este medio artificial" (ibid. p.25).

2. Ver, sin embargo, en L. A. White, "Energy and the evolution of culture", Amer. Anthropologist, vol. 45 (1943), pp. 335-356, una proposición con respecto a la evolución cultural general y las fuerzas que la gobiernan; ver también W. F. Ogburn, *On Culture and Social Change*, Duncan, ed., Univ. of Chicago Pr., 1964.

3. Ver la nota en Isis, vol. 28 (1938), pp. 462-463, referente a una noticia en el "Ilustrated London News" de Oct. 2 de 1937, con respecto a excavaciones

hechas por Karl Absolon en Checoeslovaquia.

4. Que el paso a través de una etapa durante la cual diferentes formas numerales fueron usadas para referirse a diversas categorías de objetos y conceptos, es sólo una conjetura, aunque hay mucha evidencia en su favor. Este fenómeno se presentó, por ejemplo, entre ciertas tribus indias y otras culturas; restos de un tal sistema numeral clasificador se encuentran aún en el lenguaje Japonés.

5. Salvo por la adición de "Especialización", esta es la lista de fuerzas dada en la p. 169 de mi libro [6].

Bibliografía

[1] Harry L. Shapiro, *Aspects of Culture*, Rutgers Univ. Pr., 1956.

[2] Carl B. Boyer, "The anthropology of mathematics", Science, vol. 163(1969) p.799.

[3] L. A. White, "Symboling: A kind of behavior", The Jour.of Psychology, Vol 53 (1962) pp. 311-317.

[4] E. H. Lenneberg, "On learning language", Science, vol.164 (1969) pp.635-643.

[5] Sol Tax ed., *Evolution after Darwin*, 3 vols., Univ. of Chicago Pr., Chicago, Ill., 1960.

[6] R.L. Wilder, *Evolution of Mathematical Concepts*, John Wiley and Sons, N.Y., 1968.

[7] L.L. Conant, *The Number Concept*, Macmillan, N.Y., 1896.

[8] G. Sarton, "Science and morality", in *Moral Principles of Action*, ed. Ruth N. Anshen, Harper and Row, N. Y., 1952.

[9] Una reseña de (6), en el Monthly, vol 76 (1969), pp. 428-429.

[10] Derek J. de Solla Price, *Science since Babylon*, Yale Univ. Pr., New Haven, Conn., 1961.

[11] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Hollan Pub.Co., Amsterdam, 1966.

* * *

La evidencia

La noción de evidencia despierta cada vez más la desconfianza del matemático. El sentimiento de la evidencia es engañoso y su dominio varía según el temperamento intelectual de cada uno. Si uno quisiera apoyarse en él, los espíritus intuitivos pedirían sin duda que se suprimiera más de una demostración, menos evidente para ellos que el teorema que se supone tal demostración justifica. Otros, al contrario, más exigentes, rehusarían reconocer tal axioma como incondicionalmente necesario. Es verdad que algunos de los axiomas de Euclides han sufrido, en la matemática moderna, una suerte de degradación : por ejemplo, el que enuncia que el todo es mayor que la parte, no vale, en un cierto sentido, más que para los conjuntos finitos, y podría aún servir, como se ha sugerido, para definir tales conjuntos; en este sentido ya no es una proposición analítica, es una convención que delimita un cierto campo y a la cual el espíritu no está en manera alguna sujeto. Por lo demás, el papel que se ha hecho jugar a la evidencia durante largo tiempo, está ligado al ideal de una matemática categórica, en donde lo que no está demostrado, debe sin embargo, de alguna manera, exhibir sus títulos en orden a la verdad. Ello se afina en una concepción hipotético-deductiva centrada en la idea de coherencia lógica más bien que en la de verdad absoluta.

Robert Blanché
La Axiomática