

NOTAS

1. *El número e está entre 2 y 3*. Es frecuente demostrar este hecho a partir de la definición

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

utilizando la fórmula del binomio. Cuando se trata de alumnos de un primer curso de cálculo, los cuales no han estudiado convergencia de series, este procedimiento no deja de tener algunos inconvenientes.

Si definimos la función logarítmica como

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0$$

podemos definir a e como el único número x para el cual $\log x = 1$, esto es

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1,$$

en otros términos, e es aquel valor de t para el cual el área comprendida entre la hipérbola $y = \frac{1}{t}$, el eje ot , la ordenada en $t = 1$ y la ordenada en $t = e$ es 1.

Para probar que $2 < e < 3$ basta probar que

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} < \int_1^e \frac{dt}{t} < \int_1^3 \frac{dt}{t}$$

es decir que

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} < 1 < \int_1^3 \frac{dt}{t}$$

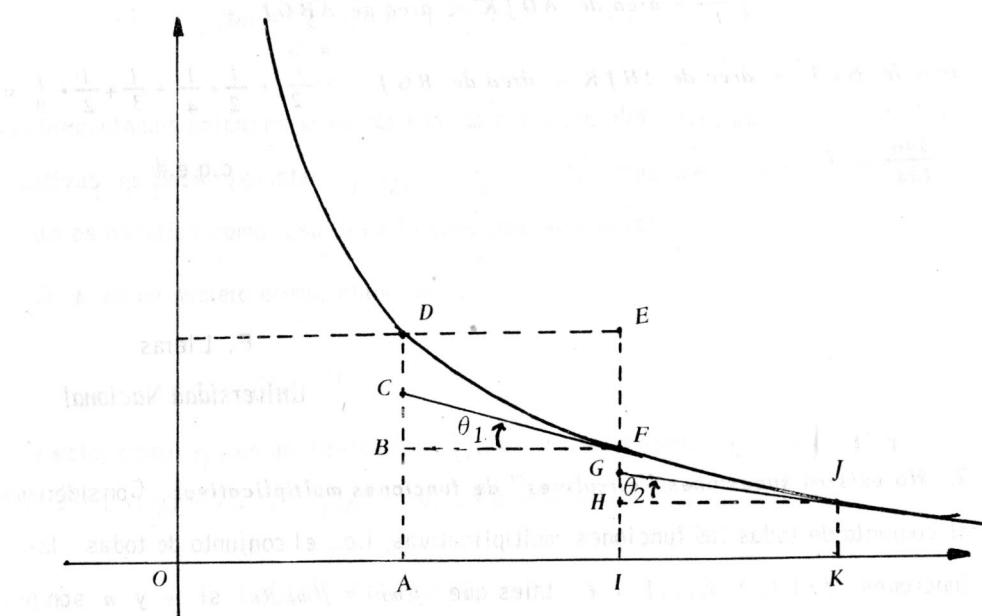


Fig. 1. - El área entre la recta y = 1/t y la recta x = 1.

En primer lugar (ver Figura 1) :

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} = \text{área de } \overline{ADFI} < \text{área de } \overline{ADEI} = 1.$$

Por otra parte, considerando las tangentes a la curva en los puntos F y J y recordando que $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t^2}$ se tiene

$$BC = \frac{BC}{1} = \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$GH = \frac{GH}{1} = \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

y entonces

$$\int_1^3 \frac{dt}{t} = \text{área de } \overline{ADJK} < \text{área de } ABGI + \text{área de } BCF + \text{área de } IHJK + \text{área de } HGJ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{146}{144} > 1 . \quad \text{c.q.e.d}$$

F. Lleras

Universidad Nacional

2. **No existen sucesiones "circulares" de funciones multiplicativas.** Consideremos el conjunto de todas las funciones multiplicativas, i.e., el conjunto de todas las funciones $f: \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f(mn) = f(m)f(n)$ si m y n son primos entre sí. Es fácil ver que si f es multiplicativa, entonces la relación

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

define una nueva función multiplicativa. En efecto, si m y n son primos entre sí, tenemos

$$F(mn) = \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d|m} \sum_{d'|n} f(d d')$$

$$= \sum_{d|m} \sum_{d'|n} f(d) f(d') \quad (\text{pues } d \text{ y } d' \text{ son primos entre sí})$$

$$= \sum_{d|m} [f(d) \sum_{d'|n} f(d')] = \sum_{d|m} f(d) \cdot F(n)$$

$$= F(m) F(n) .$$

Ahora bien, si $f = f_1$ y $F = f_2$, definamos

$$f_{i+1}(n) = \sum_{d|n} f_i(d) \quad (i = 1, 2, \dots,) .$$

Nos preguntamos entonces si existe una sucesión circular (f_i) , de funciones multiplicativas, es decir, ¿existen f_1, f_2, \dots, f_ν , $\nu > 1$, tales que $f_\nu = f_1$? La respuesta es negativa como resultado de la siguiente afirmación:

Si p es un número primo, entonces los siguientes resultados son válidos: el resultado en particular es que si i es una función multiplicativa, entonces $f_{i+1}(p) = i + f_i(p)$.

En efecto, como f_i es multiplicativa, $f_i(1) = 1$ y entonces $f_2(p) = 1 + f_1(p)$, $f_3(p) = 1 + f_2(p) = 1 + (1 + f_1(p))$ y, recurrentemente,

$$f_{i+1}(p) = i + f_i(p) .$$

Víctor S. Albis G.

Universidad Nacional.

Algunas de las ideas y resultados anteriores han sido tomados de un libro de matemática escrito por el profesor Víctor S. Albis G. que se titula "Álgebra y Geometría" y que es de uso obligatorio en la Universidad Nacional de Colombia. El libro es de gran utilidad para el estudiante de matemáticas y es recomendado para todos los que quieran profundizar en el tema de las funciones multiplicativas.

En la sección anterior se mencionó que las funciones multiplicativas tienen la propiedad de que si f es una función multiplicativa, entonces $f(n) = f(p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}) = f(p_1)^{e_1} f(p_2)^{e_2} \dots f(p_k)^{e_k}$.

En la sección anterior se mencionó que las funciones multiplicativas tienen la propiedad de que si f es una función multiplicativa, entonces $f(n) = f(p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}) = f(p_1)^{e_1} f(p_2)^{e_2} \dots f(p_k)^{e_k}$.

En la sección anterior se mencionó que las funciones multiplicativas tienen la propiedad de que si f es una función multiplicativa, entonces $f(n) = f(p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}) = f(p_1)^{e_1} f(p_2)^{e_2} \dots f(p_k)^{e_k}$.

En la sección anterior se mencionó que las funciones multiplicativas tienen la propiedad de que si f es una función multiplicativa, entonces $f(n) = f(p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}) = f(p_1)^{e_1} f(p_2)^{e_2} \dots f(p_k)^{e_k}$.

En la sección anterior se mencionó que las funciones multiplicativas tienen la propiedad de que si f es una función multiplicativa, entonces $f(n) = f(p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}) = f(p_1)^{e_1} f(p_2)^{e_2} \dots f(p_k)^{e_k}$.

En la sección anterior se mencionó que las funciones multiplicativas tienen la propiedad de que si f es una función multiplicativa, entonces $f(n) = f(p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}) = f(p_1)^{e_1} f(p_2)^{e_2} \dots f(p_k)^{e_k}$.