N O T A S

1. ***El número e está entre 2 y 3.*** Es frecuente demostrar este hecho a partir de la definición

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

utilizando la fórmula del binomio. Cuando se trata de alumnos de un primer curso de cálculo, los cuales no han estudiado convergencia de series, este procedimiento no deja de tener algunos inconvenientes.

Si definimos la función logarítmica como

$$Log\ x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad , \quad x > 0$$

podemos definir a e como el único número x para el cual $Log\ x = 1$, esto es

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1 ,$$

en otros términos, e es aquel valor de t para el cual el área comprendida entre la hipérbola $y = \frac{1}{t}$, el eje $0t$, la ordenada en $t = 1$ y la ordenada en $t = e$ es 1. Para probar que $2 < e < 3$ basta probar que

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} < \int_1^e \frac{dt}{t} < \int_1^3 \frac{dt}{t}$$

es decir que

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} < 1 < \int_1^3 \frac{dt}{t}$$

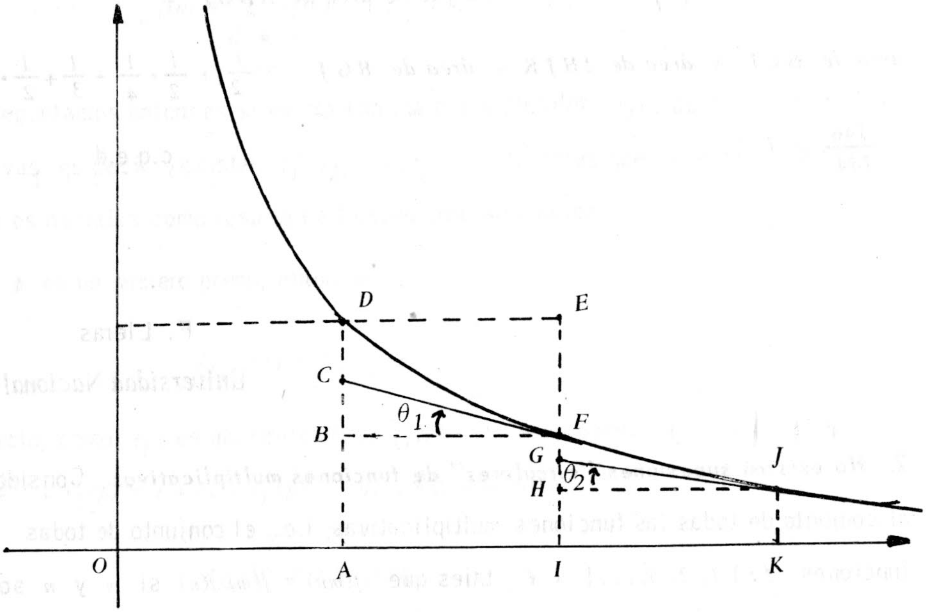

Fig. 1

En primer lugar (ver Figura 1) :

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} = \text{área de } \widetilde{ADFI} < \text{área de } ADEI = 1 .$$

Por otra parte, considerando las tangentes a la curva en los puntos F y J y recordando que $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t^2}$ se tiene

$$BC = \frac{BC}{1} = tg\theta_1 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$GH = \frac{GH}{1} = tg\theta_2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

y entonces

$$\int_1^3 \frac{dt}{t} = \text{área de } \widetilde{ADJK} < \text{área de } ABGI +$$

$$\text{área de } BCF + \text{área de } IHJK + \text{área de } HGJ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} =$$

$$= \frac{146}{144} > 1 .$$

c.q.e.d

F. Lleras
Universidad Nacional

2. ***No existen sucesiones "circulares" de funciones multiplicativas.*** Consideremos el conjunto de todas las funciones multiplicativas, i.e., el conjunto de todas las funciones $f : \{1, 2, 3, \ldots\} \to \mathbb{C}$ tales que $f(mn) = f(m)\, f(n)$ si m y n son primos entre sí. Es fácil ver que si f es multiplicativa, entonces la relación

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

define una nueva función multiplicativa. En efecto, si m y n son primos entre sí, tenemos

$$F(mn) = \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d|m} \sum_{d'|n} f(dd')$$

$$= \sum_{d|m} \sum_{d'|n} f(d)\, f(d') \quad \text{(pues } d \text{ y } d' \text{ son primos entre sí)}$$

$$= \sum_{d|m} \Big[f(d) \sum_{d'|n} f(d') \Big] = \sum_{d|m} f(d) \cdot F(n)$$

$$= F(m)\, F(n) .$$

Ahora bien, si $f = f_1$ y $F = f_2$, definamos

$$f_{i+1}(n) = \sum_{d \mid n} f_i(d) \qquad (i = 1, 2, \ldots,) .$$

Nos preguntamos entonces si existe una *sucesión circular* (f_i), de funciones multiplicativas, es decir ¿existen $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$, $\nu > 1$, tales que $f_\nu = f_1$? La respuesta es negativa como resulta de la siguiente afirmación :

Si p es un número primo, entonces

$$f_{i+1}(p) = i + f_1(p)$$

En efecto, como f_i es multiplicativa, $f_i(1) = 1$ y entonces $f_2(p) = 1 + f_1(p)$, $f_3(p) = 1 + f_2(p) = 1 + (1 + f_1(p))$ y, recurrentemente,

$$f_{i+1}(p) = i + f_i(p) .$$

Víctor S. Albis G.
Universidad Nacional .