

## EL TEOREMA DE LAGRANGE Y EL SEGUNDO METODO DE LIAPUNOV, COMO CRITERIO DE ESTABILIDAD

JOSE M. CASTRO

La palabra *estabilidad* tiene su origen en la mecánica, donde se utiliza para caracterizar el equilibrio de un cuerpo rígido. Hablando en forma aproximada, una posición de equilibrio se llama *estable* si el cuerpo tiende a regresar a su posición original después de haber sido perturbado ligeramente. Si el cuerpo, tiende a ocupar una nueva posición, su posición original se llama *inestable*.

Cuando fijamos un punto de un cuerpo rígido, por ejemplo de un péndulo compuesto, y el cuerpo se somete a la acción de la gravedad, hay un criterio geométrico muy conocido para establecer la *estabilidad* de este equilibrio. Es *estable* si el punto se encuentra por encima del centro de gravedad, e *inestable* si se encuentra por debajo. Cuando el punto y el centro de gravedad coinciden, tenemos un caso de transición conocido como *equilibrio neutro*.

El cuerpo después del desplazamiento no tiende a regresar a su posición original, permanecerá cerca o se alejará, según la naturaleza de la perturbación.

Para precisar estas ideas de tipo físico, es necesario introducir modelos matemáticos. Estos llevan generalmente, al estudio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Puesto que con frecuencia es difícil obtener soluciones explícitas, hay ne-

cesidad de recurrir a una *teoría cualitativa* de las ecuaciones diferenciales, analizando la ecuación diferencial en forma directa y no las soluciones, para obtener criterios de estabilidad (segundo método de Liapunov o método directo). Este método presenta algunas ventajas sobre el primer método, debido también a Liapunov, y que consiste en expresar la solución general por medio de un desarrollo en serie y estudiar luego el comportamiento asintótico cuando  $t \rightarrow +\infty$ , método éste que se restringe a funciones que se comportan normalmente como las funciones analíticas. La idea detrás del segundo método de Liapunov está fuertemente basada en el siguiente teorema debido a Lagrange.

### **Teorema de Lagrange.**

Si en una posición de reposo un sistema mecánico conservativo tiene energía potencial mínima, entonces esta posición corresponde a un punto de equilibrio estable. Si la posición de reposo corresponde a una energía potencial máxima, entonces el equilibrio es inestable.

Podemos ilustrar el teorema con el siguiente ejemplo, basado en la segunda ley de Newton.

Consideremos una partícula de masa  $m$  que se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza  $f(y)$  la cual depende solamente de la posición  $y$ , pero no del tiempo  $t$ . La ecuación del movimiento es :

$$m y'' = f(y) \quad (I.1).$$

Que el sistema es conservativo significa :

a) La función  $f$  está determinada por la siguiente relación ,

$$f(y) = -\text{grad } U = -\frac{dU}{dy} \quad (I.2).$$

( $U$  representa la función de energía potencial).

b) La energía total  $V = \text{energía cinética} + \text{energía potencial}$ , es constante.

Se puede demostrar la parte b), de la siguiente manera.

$$\text{Sea } m y'' = f(y).$$

Multiplicando ambos miembros por  $y'$  tendremos

$$m y' y'' = f(y) y'.$$

Integrando ambos miembros entre  $0$  y  $t$ ,

$$\int_0^t m y' y'' ds = \int_0^t f(y) y' ds.$$

Observando que  $[\frac{1}{2} m (y')^2]' = m y' y''$ , se tiene que

$$\frac{1}{2} m (y')^2 - \frac{1}{2} m (y'_0)^2 = \int_{y_0}^y f(n) dn.$$

$$\text{Sea } U(y) = - \int^y f(n) dn,$$

entonces

$$\frac{1}{2} m (y')^2 - \frac{1}{2} m (y'_0)^2 = U(y_0) - U(y),$$

es decir,

$$\frac{1}{2} m (y')^2 + U(y) = \frac{1}{2} m (y'_0)^2 + U(y_0) = V(y, y'),$$

o también,

$$\text{Energía cinética} + \text{Energía potencial} = \text{Energía total} = \text{constante}.$$

La figura (I.1) ilustra también el teorema.

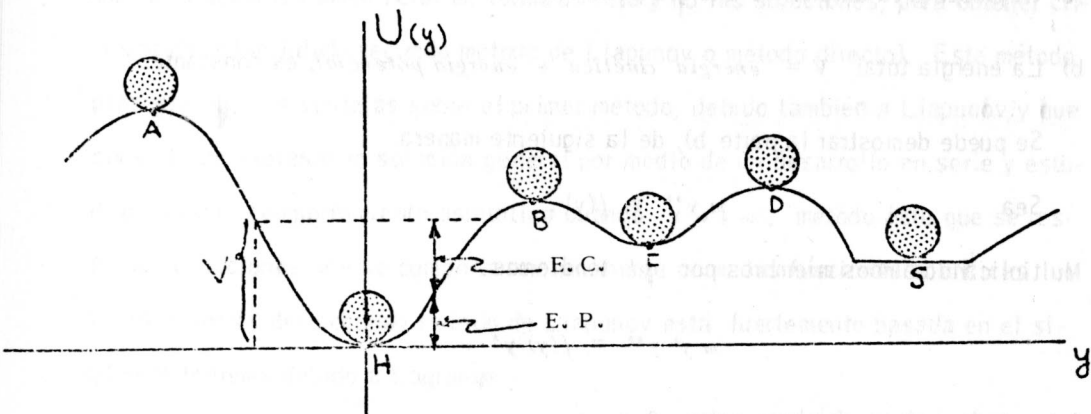


Figura (I. 1)

Teniendo en cuenta el teorema de Lagrange, observamos que los puntos de reposo correspondientes a  $H$  y a  $C$ , son *estables* puesto que en ellos la energía potencial tiene un mínimo. Los puntos correspondientes a  $A, B, D$  son *inestables* puesto que la energía potencial en tales puntos tiene un máximo. Si consideramos los puntos de reposo pertenecientes al conjunto  $S$ , serán de equilibrio neutral, la energía potencial allí no tiene ni máximos ni mínimos.

Examinemos el péndulo de la figura (I.2.a), y luego la gráfica de la energía potencial como función del desplazamiento  $y$ .

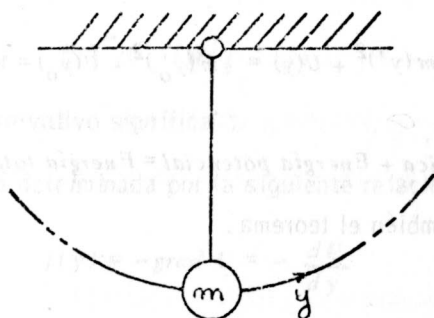


Figura (I. 2. a)

Según se aprecia en la figura (I.2.b),  $\frac{dU}{dy} = 0$ . Cuando  $y = 0$ , el péndulo está en equilibrio en este punto. Si se desplaza el plomo una pequeña cantidad hacia la derecha (dirección positiva), la fuerza que actúa sobre el péndulo es negativa, porque  $f(y) = -dU/dy$ , y  $dU/dy$  es positiva en esta región. Por tanto, la fuerza resultante debida a una ligera perturbación por desplazamiento hacia la derecha, tiende a llevar el péndulo a su estado de equilibrio.

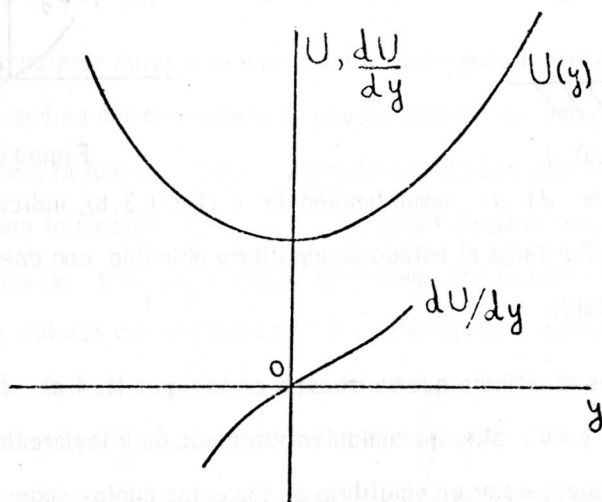


Figura (I.2.b)

En forma semejante, un desplazamiento a la izquierda, dará lugar a una fuerza positiva que tiende a llevarlo a su estado de equilibrio. Esta situación física ilustra un estado de equilibrio *estable*. La energía potencial, es un mínimo (ver fig.(I.1)).

De la gráfica correspondiente a  $dU/dy$ , figura (I.2.b), observamos que para el equilibrio estable  $d^2U/dy^2 > 0$ . Contrasta con el caso anterior el péndulo invertido de la figura (I.3.a). Se satisfacen también las condiciones de equilibrio para  $y = 0$ , caso en el cual  $dU/dy = 0$ . El equilibrio, sin embargo, es *inestable*, porque cualquier leve desplazamiento del plomo a la derecha o a la izquierda de la posición de equilibrio, hará que el péndulo se aleje aún más de dicha posición. Esto es una consecuencia evidente de la dirección de la fuerza que se ob-

tiene al considerar  $-dU/dy$  para posiciones situadas a uno u otro lado de  $y = 0$ .

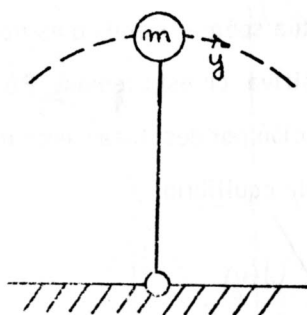


Figura (I.3.a)

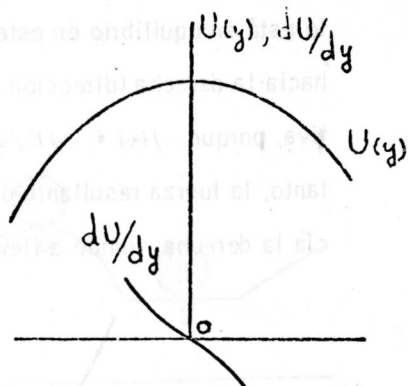


Figura (I.3.b)

Un análisis de  $dU/dy$  como función de  $y$  (fig. I.3.b), indica que  $d^2U/dy^2 < 0$ . Por tanto el estado de equilibrio obtenido, con energía potencial máxima, es *inestable*.

Consideremos el cilindro que se muestra en la figura (I.4.a),  $dU/dy = 0$ , no solamente para  $y = 0$ , sino en cualquier otra posición a la derecha o a la izquierda. El cilindro puede estar en equilibrio en todos los puntos sobre el plano. ( En el caso de la figura I.1, en todos los puntos del conjunto  $S$ ). El desplazamiento a partir de  $y = 0$  no da origen a ninguna fuerza que tienda a llevarlo a su posición de origen. El desplazamiento permanece constante, o crece; esto depende de la velocidad impartida al cilindro.

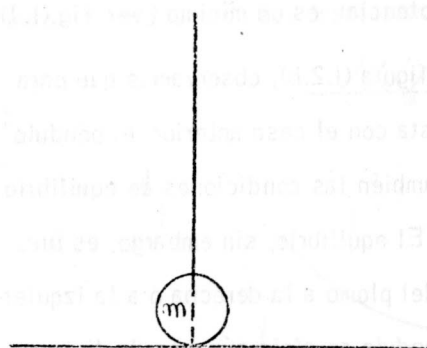


Figura (I.4.a)

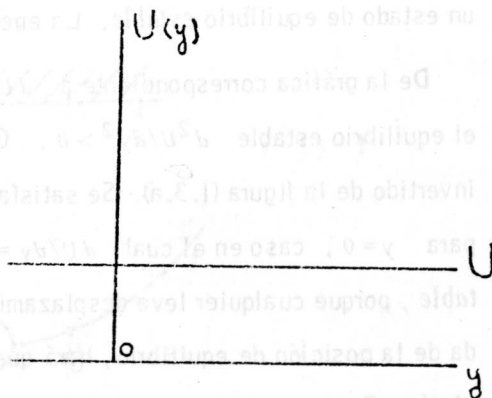


Figura (I.4.b)

Como se ve en la figura, la energía potencial no presenta máximos ni mínimos.

Vamos ahora a analizar un poco más a fondo el sistema  $my'' = f(y)$ , introduciendo su espacio de fases. Ya vimos que la energía mecánica total  $V$ , definida por

$$V(y_1, y_2) = U(y_1) + \frac{1}{2} m y_2^2, \quad (1.3)$$

permanece constante durante el movimiento. Indicamos también que muchas ideas cualitativas acerca del movimiento se pueden obtener del estudio de la gráfica correspondiente a la función  $U(y)$ . También resulta bastante importante construir la gráfica para la función  $V(y_1, y_2)$ . Se puede construir una tabla que acompañe a la gráfica de  $V(y_1, y_2)$  donde se resuman los tipos de movimiento posibles para algunos valores considerados de  $V$ . Por ejemplo, una partícula que posee energía total  $V_6$  se acelerará y desacelerará en la medida en que va pasando sobre las colinas y valles que describe la energía potencial.

La naturaleza de las posibles oscilaciones se puede predecir en base a la forma de la curva de la energía potencial entre los límites de oscilación. Por ejemplo, si se restringe la partícula a los límites  $y_8$  y  $y_9$  con energía  $V_3$ , su movimiento sería esencialmente un movimiento armónico simple porque  $U(y)$  es aproximadamente una parábola. Puesto que  $U(y)$  es simétrica, las fuerzas de restitución son también simétricas alrededor de la posición intermedia  $y_5$ . Este no sería el caso para el movimiento entre  $y_6$  y  $y_7$ , donde no es siquiera aproximadamente armónico simple. La partícula cuando se mueve a la izquierda de  $y_6$  experimenta una desaceleración más fuerte que cuando se mueve hacia  $y_7$  debido a la inclinación relativa de la curva de la energía potencial cerca de  $y_6$ .

El movimiento entre  $y_7$  y  $y_8$ ,  $y_9$  y  $y_{10}$ , etc., no está permitido, porque la

energía cinética sería negativa y la velocidad imaginaria en tales regiones.

La forma de nuestra ecuación (1.3)  $V = \frac{1}{2} m \dot{y}_2^2 + U(y_1)$ , sugiere que el movimiento puede ser representado empleando  $y'$  e  $y$  como ejes de coordenadas. Estas variables describen unívocamente el estado del sistema en cualquier tiempo en el cual el plano de fases termina, con el lugar de los puntos llamado la trayectoria de fase.

Se puede deducir de la ecuación (1.3), en la cual  $V$  es constante, que las curvas cerradas, en el plano de fases, representan sistemas conservativos que experimentan movimiento periódico.

Es interesante y a la vez informativo examinar el dibujo del plano de fases de la partícula en movimiento, que corresponde a la curva de la energía potencial de la figura (1.5.a). En  $V_1$  el movimiento es periódico entre los límites  $y_1$  e  $y_2$ , pero la curva próxima en la figura del plano de fases (1.5.b), se aparta de la elipse porque el oscilador no es lineal. Las flechas en esta figura indican la dirección de la cual proviene el movimiento, esto es, la dirección cuando  $t$  crece. Hay tres curvas cerradas asociadas con la energía  $V_3$ , que indican tres posibles puntos alrededor de los cuales puede ocurrir el movimiento, dependiendo de la posición inicial de la partícula. Para  $V_4$ , el movimiento no es periódico por mucho tiempo. Se observa que la partícula cambia de dirección solamente en el punto  $y_{12}$ . No ocurre cambio de la dirección en la energía  $V_6$ . Por consiguiente, una partícula continúa moviéndose en su dirección inicial. Esto vale también para las dos curvas que corresponden a  $V_6$  en el plano de fases. Finalmente, la posición  $y_{14}$  corresponde a un máximo local. Esta inestabilidad no se puede percibir fácilmente en el plano de fases, teniendo en cuenta de que el movimiento puede provenir de la derecha o de la izquierda. La partícula se mueve en cualquier direc—



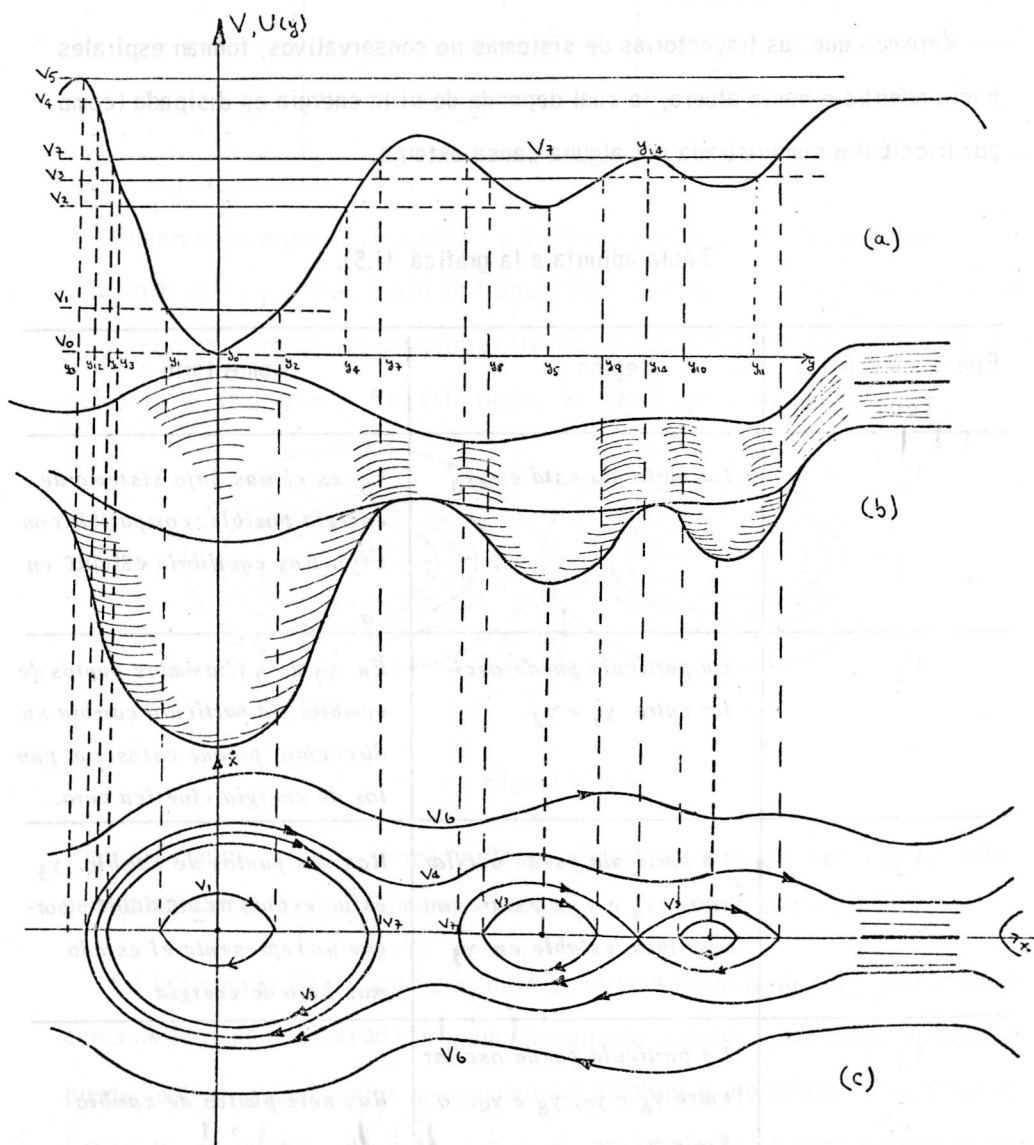


Figura (I.5)

ción, no continua en esta dirección indefinidamente, solamente hasta que alcance un punto de cambio .

Veremos que las trayectorias de sistemas no conservativos, forman espirales hacia adentro o hacia afuera, lo cual depende de si la energía es disipada (como por fricción) o suministrada por alguna causa externa.

Tabla adjunta a la gráfica (1.5).

Energía Mecánica Total	Región	Comentario
$V_0$	<i>La partícula está en <math>y_0</math></i>	<i><math>V_0</math> es el mas bajo sistema de energía posible, compatible con <math>U(y)</math>. Hay equilibrio estable en <math>y_0</math></i>
$V_1$	<i>La partícula puede oscilar entre <math>y_1</math> e <math>y_2</math></i>	<i>En <math>y_1</math> e <math>y_2</math> (llamados puntos de cambio), la partícula cambia su dirección, porque estos son puntos de energía cinética cero.</i>
$V_2$	<i>La partícula puede oscilar entre <math>y_3</math> e <math>y_4</math> o estar en equilibrio estable en <math>y_5</math></i>	<i>Hay dos puntos de cambio. <math>y_5</math> es un estado metaestable , porque no representa el estado mas bajo de energía .</i>
$V_3$	<i>La partícula puede oscilar entre <math>y_6</math> e <math>y_7</math>, <math>y_8</math> e <math>y_9</math>, o <math>y_{10}</math> e <math>y_{11}</math></i>	<i>Hay seis puntos de cambio</i>
$V_4$	<i>Ver comentario</i>	<i>Hay un punto de cambio en <math>y_{12}</math>. La partícula llega a esta posición desde la derecha, se detiene y cambia de dirección.</i>

$V_5$	Ver comentario	La partícula está en equilibrio inestable en $y_{13}$
$V_6$	Ver comentario	No hay puntos de cambio.

Observemos ahora la figura (1.6) y consideremos el punto  $R$  que corresponde a la posición  $y_{14}$  en el plano de fases. Dado un pequeño círculo con centro en  $R$  y radio  $\varepsilon$ , vemos que las órbitas tienden a alejarse de él, no importa qué tan cerca a  $R$  se originen. Por esta razón,  $R$  es un punto *inestable*.

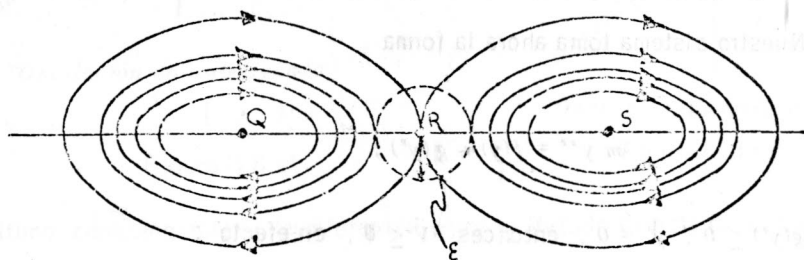


Figura (1.6)

Para los puntos  $Q$  y  $S$ , si una órbita se origina, por ejemplo, cerca de  $Q$ , ella permanece cerca de  $Q$ . Decimos por esto que  $Q$  y  $S$  son puntos *estables*.

En la figura (1.7), si una trayectoria se origina en un punto  $x_0$  y permanece cerca de la región sombreada,  $M$  será un conjunto *estable*. Un conjunto estable puede contener subconjuntos que pueden ser estables o inestables. Por ejemplo,  $\{Q\} \subset M$  es *estable*, mientras  $\{R\} \subset M$  es *inestable*. La estabilidad en conjuntos generaliza la estabilidad puntual (local).

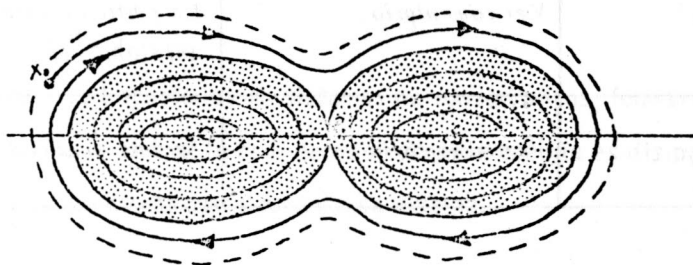


Figura (1.7)

Habíamos dicho antes que las trayectorias de sistemas no conservativos, forman espirales. Veamos un ejemplo en el cual tenemos una fuerza de amortiguación (fricción). Nuestro sistema toma ahora la forma

$$m y'' = f(y) + g(y'),$$

si  $y' g(y') \leq 0$ ,  $y' \neq 0$ , entonces  $V \leq 0$ , en efecto :

$$V = \frac{1}{2} m 2 y' y'' + U'(y) y' ,$$

$$= [ m y'' + U'(y) ] y'$$

$$= [ m y'' - f(y) ] y'$$

$$= [ g(y') ] y' \leq 0 .$$

Luego  $V \leq 0$ .

Si  $g(y') = -ay'$ , tenemos las consideraciones siguientes :

- 1)  $a = 0$ . Se tiene una oscilación no amortiguada, el punto  $(0,0)$  es un punto de equilibrio ver figura (I.8.a).
- 2)  $a > 0$ . Se tiene una oscilación amortiguada, las trayectorias forman una espiral hacia adentro. El punto  $(0,0)$  es un foco estable.

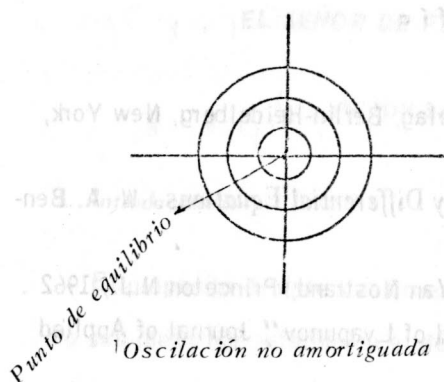


Figura (I.8.a)

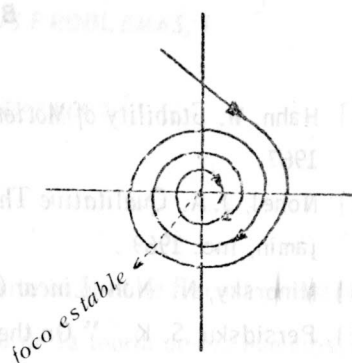


Figura (I.8.b)

Por último, conviene aclarar la diferencia entre el Método Directo de Liapunov el cual está íntimamente ligado al teorema de Lagrange como ya se ha visto, y la estabilidad orbital debida a Poincaré. Se puede ver que el método directo de Liapunov necesita además de que las órbitas estén próximas, que el movimiento sea isócrono. Lo anterior se observa claramente en el siguiente ejemplo :

Tomemos dos péndulos con la misma longitud  $L$ , apartémoslos del reposo. Ver la figura (I.9. a). En el tiempo  $t = t_1$ , tenemos la situación de la figura (I.9. b).

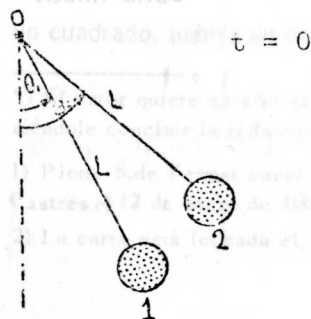


Figura (I.9.a)

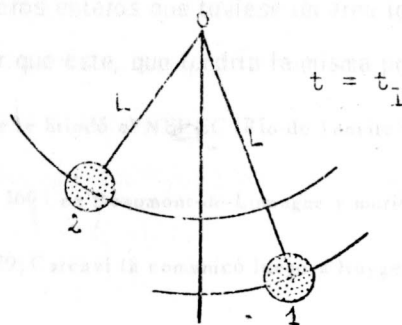


Figura (I.9.b)

Vemos que aunque las órbitas están muy próximas, el movimiento es *inestable* en el sentido de Liapunov.

### **Bibliografía**

- [1] Hahn, W. *Stability of Motion*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1967.
- [2] Nohel, J. A. *Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*. W. A. Benjamin, Inc. 1969 .
- [3] Minorsky, N. *Non-Linear Oscillations*. Van Nostrand, Princeton N.J., 1962 .
- [4] Persidsku, S. K. " On the Second Method of Lyapunov " Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Nº 25, 1961 .
- [5] Hale, J. K. *Ordinary Differential Equations*. Wiley-Interscience, 1969 .

\* \* \*

### **En loor y prez del método axiomático**

" Creo que todo lo que es susceptible de tratamiento científico, tan pronto como está preparado para el desarrollo de una teoría, cae dentro del método axiomático y por lo tanto dentro de la matemática ".

David Hilbert

