VOL. XXII Nos 1, 2 y 3 1988

TOPOLOGIA
DEL ORDEN DE CONJUNTOS SUPERDENSOS

Por

José M. Muñoz Q.
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.E., Colombia

Alba Leonor Chaux C.
Universidad Surcolombiana y
Secretaría de Educación del Huila
Neiva, Colombia

Resumen. Se estudian en detalle los conceptos topológicos básicos de los espacios superdensos, poniéndose de presente que muchas de las particularidades de la topología del orden de los números reales no estandar (la usual para ellos), no son propias de este conjunto ni dependen de sus operaciones, sino que son compartidas por todos los conjuntos superdensos, estableciéndose por ejemplo que toda imagen isomorfa de $(\mathbb{R}, <)$, no sólo es de puntos aislados, sino que ni siquiera posee puntos de acumulación.

I. INTRODUCCION

Un conjunto no vacío totalmente ordenado $(X, <)$ será llamado **superdenso**, si para todo par de subconjuntos contables A y B no simultáneamente vacíos, con $A < B$ (todo elemento de A menor que todo elemento de B), existe c en X tal que $A < \{c\} < B$.

Como A o B pueden ser vacíos, todo subconjunto contable es acotado, tanto superior como inferiormente, con cotas que no pertenecen al subconjunto. En particular para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X, existen c, d en X tales que para todo n, $c < x_n < d$;o sea, no existen sucesiones coiniciales ni cofinales con X.

Claramente todo conjunto superdenso es en particular denso sin primero ni último elementos, o sea es un η_0- conjunto.

Suponemos conocidos (ver [2]) los siguientes resultados:

1) Todo η_0- conjunto contiene una imagen orden-isomorfa de $(\mathbb{Q}, <)$.

2)Todo conjunto superdenso contiene una imagen orden-isomorfa de $(\mathbb{R}, <)$.

3) Todos los conjuntos superdensos de cardinal χ_1 son orden-isomorfos, de manera que si se acepta la hipótesis del continuo,todos los conjuntos superdensos de cardinal c resultan ser orden-isomorfos.

Para todo par de elementos a, b en X con $a < b$ definimos el intervalo abierto de extremos a y b como

$$(a, b) = \{x \in X \mid a < x \wedge x < b\},$$

se sabe (ver [1]) que el conjunto de todos los intervalos abiertos es una base de una topología σ, llamada la *topología del orden* de X, la cual será nuestro objeto de estudio en el presente artículo. Un *espacio superdenso* será un conjunto superdenso dotado de su topología del orden. En adelante abierto, cerrado, etc., se entenderá con respécto a esta topología del orden.

II. SEPARACION Y CONVERGENCIA.

PROPOSICION 1. En un η_0-conjunto X con su topología del orden, las colas abiertas a derecha $(a, \rightarrow)$ y a izquierda $(\leftarrow, a)$, son subconjuntos abiertos, mientras que las colas cerradas son subconjuntos cerrados.

Sea $x \in (a, \rightarrow) = \{y \in X \mid a < y\}$; el hecho de no poseer X último elemento, implica la existencia de b en X, tal que $x < b$; luego $x \in (a, b) \subseteq (a, \rightarrow)$, con lo cual se prueba que $(a, \rightarrow)$ es abierto.

De manera similar (ya que X tampoco posee primer elemento) se procede en el caso de $(\leftarrow, a)$. Como el orden es total, $[a, \rightarrow) = X - (\leftarrow, a)$, resultando cerradas las colas $[a, \rightarrow)$ y de manera similar las de la forma $(\leftarrow, a]$.

COROLARIO Los subconjuntos unitarios son cerrados.

Esto se sigue de manera inmediata ya que

$$X - \{a\} = (\leftarrow, a) \cup (a, \rightarrow).$$

PROPOSICION 2. Un η_0-conjunto con su topología del orden es un espacio de Hausdorff

Sean $b, c \in X$ con $b < c$; por la densidad de X, existe d en X tal que $b < d < c$. Entonces $(\leftarrow, d)$ y $(d, \rightarrow)$ son abiertos disyuntos que separan a b y c.

PROPOSICION 3. Un η_0-conjunto con su topología del orden es un espacio regular.

Sean F un subconjunto cerrado de un tal espacio X y sea b un punto que no está en F. Puesto que $b \in X - F$ y éste es abierto, existe una vecindad (c, d) de b contenida en $X - F$. Como $c < b < d$ y el espacio es orden-denso, existen p, q en X tales que $c < p < b < q < d$. Necesariamente $[p, q] \subseteq X - F$; luego $F \subseteq X - [p, q] = (\leftarrow, p) \cup (q, \rightarrow)$ y puesto que $b \in (p, q)$ obtenemos la separación de F y b con abiertos disyuntos, es decir, la regularidad del espacio.

Aún cuando hasta este momento no se ha utilizado la superdensidad, todos los resultados que siguen sí dependen directamente de ella.

PROPOSICION 4. En un espacio superdenso una sucesión es convergente si y sólo si es casi constante (o sea constante de un cierto término en adelante).

Evidentemente una sucesión casi-constante es convergente en cualquier espacio topológico, al menos al punto que se repite infinitas veces. Mostremos entonces que una sucesión $s : \mathbf{N} \rightarrow X$ que no es casi-constante, no es convergente.

Si la sucesión posee dos puntos b, c o más que se repiten infinitas veces y, como el espacio es de Hausdorff, la sucesión no converge ni a b ni a c (basta tomar vecindades disyuntas de b y c para verlo) ni a ningún otro punto x (como lo mostrarían dos vecindades disyuntas de b y x). Supongamos que la sucesión posee a lo más un punto que se repite infinitas veces. Entonces el conjunto de puntos de la sucesión es infinito, ya que ésta no es casi-constante. Sea x cualquier punto en X; definimos

$$A = \{s(n) \mid s(n) < x\} \text{ y } B = \{s(n) \mid x < s(n)\}$$

Como $A < \{x\} < B$ y el espacio es superdenso, existen c, d en X tales que $A < \{c\} < \{x\} < \{d\} < B$. Así el intervalo (c, d) es una vecindad de x para la cual existen infinitos términos

$s(n)$ fuera de ella, ya que al menos uno de los conjuntos A o B es infinito, de manera que $s(n)$ no converge a x.

La táctica usada en esta última parte de la prueba es útil en situaciones similares.

PROPOSICION 5. En un espacio superdenso ningún subconjunto contable posee puntos de acumulación; en consecuencia, los subconjuntos contables son cerrados y tienen todos sus puntos aislados.

Sea S un subconjunto contable de un espacio superdenso X y sea b cualquiera de sus puntos; si definimos

$$A = \{x \in S \mid x < b\} \ \text{y} \ B = \{x \in S \mid b < x\}$$

entonces $A < \{b\} < B$. Siendo A y B contables, existen c, d en X tales que

$$A < \{c\} < \{b\} < \{d\} < B,$$

de modo que (c, d) es una vecindad de b que a lo más intersecta a S en un punto.

COROLARIO 1. Ningún espacio superdenso es separable.

Como todo espacio superdenso contiene una copia de $(\mathbb{R}, <)$, su cardinal es mayor o igual que c, de manera que no es contable. Si S es un subconjunto contable, por la proposición anterior $\overline{S} = S$, siendo imposible que S sea el espacio total.

COROLARIO 2. En un espacio superdenso todo punto de acumulación de un subconjunto es también punto de condensación del mismo.

Supongamose que p no es un punto de condensación de un subconjunto M. Entonces existe una vecindad V de p tal que $V \cap M$ es contable.Como $V \cap M$ no tiene puntos de acumulación, existe una segunda vecindad V' de p tal que $V' \cap (V \cap M) \subseteq \{p\}$,o sea, que $(V' \cap V) \cap M \subseteq \{p\}$, no siendo así p un punto de acumulación de M.

PROPOSICION 6. En un espacio superdenso un abierto no es necesariamente unión contable de intervalos abiertos disyuntos dos a dos.

Basta ver que en los números reales no estandar con la topología del orden, el subconjunto abierto $E(0)$ de los infinitesimales, no puede obtenerse como unión contable de intervalos abiertos. Procederemos por contradicción. Supongamos que

$$E(0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$$

En tal caso todos los b_n tienen que ser infinitesimales, ya que si algún b_k no lo fuese, su parte estandar no sería nula; supongamos $Est(b_k) > 0$. Si a_k es infinitesimal, $\frac{a_k+b_k}{2} \in (a_k, b_k)$ y $Est(\frac{a_k+b_k}{2}) = \frac{Est(b_k)}{2} > 0$, luego $\frac{a_k+b_k}{2}$ no sería infinitesimal, contrario a lo supuesto. Si a_k no es infinitesimal,sea ε un infinitesimal tal que $0 < \varepsilon < b_k - a_k$. Entonces $a_k + e \in (a_k, b_k)$ pero $Est(a_k + e) = Est(a_k) \notin E(0)$, lo cual es una contradicción.

Concluimos que todos los b_n tienen que ser infinitesimales, de manera que

$$A = \{b_n \mid 0 < b_n, n \in \mathbf{N}\} \quad < \quad \{\frac{1}{n} \mid 1 \leq n\} = B$$

Como $\mathbf{R}^*$ es superdenso, existe β tal que $A < \{\beta\} < B$,lo cual significa que β es infinitesimal, pero $\beta \notin \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (a_n, b_n)$, contrario a lo supuesto.

III. IMAGENES ISOMORFAS DE $(\mathbf{R}, <)$.

De la introducción sabemos que todo espacio superdenso contiene una copia de $(\mathbf{R}, <)$, es decir, una imagen orden-isomorfa de $(\mathbf{R}, <)$. Queremos probar que independientemente de la cardinalidad del espacio superdenso y del isomorfismo dado, dicha copia no sólo es topológicamente un conjunto de puntos aislados, sino que tampoco posee puntos de acumulación.

PROPOSICION 7. Sea $\varphi : (\mathbf{R}, <) \to (\chi, <)$ un isomorfismo de orden del conjunto de los números reales con su orden usual en un espacio superdenso. Entonces $\varphi(\mathbf{R})$ es un subconjunto de puntos aislados.

Sea $\varphi(a) \in \varphi(\mathbf{R})$; sabemos que

$$A = \{a - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}, n \geq 1\} < \{a\} < \{a + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}, n \geq 1\} = B.$$

Como $\varphi(A)$ y $\varphi(B)$ son contables y $\varphi(A) < \{\varphi(a)\} < \varphi(B)$ por ser φ un isomorfismo de orden, la superdensidad de χ garantiza la existencia de elementos c, d en χ tales que

$$\varphi(A) < \{c\} < \{\varphi(a)\} < \{d\} < \varphi(B).$$

Es claro que (c, d) es una vecindad de $\varphi(a)$ que no contiene otros puntos de $\varphi(\mathbf{R})$, ya que si existe b en $\mathbf{R}$ con $\varphi(b)$ en (c, d), entonces por ser φ un isomorfismo de orden se tendría $A < \{b\} < B$. Esto es que $\forall n \geq 1$, $a - \frac{1}{n} < b < a + \frac{1}{n}$, es decir, $-\frac{1}{n} < b - a < \frac{1}{n}$ para todo n, lo cual por la propiedad arquimedeana de $\mathbf{R}$ significa $b = a$.

PROPOSICION 8. Sea χ un espacio superdenso y sea $\varphi(\mathbf{R}, <) \to (\chi, <)$ un isomorfismo de orden. Entonces $\varphi(\mathbf{R})$ no tiene puntos de acumulación.

a) La proposición 7 pone de presente que ningún punto de $\varphi(\mathbf{R})$ es de acumulación de $\varphi(\mathbf{R})$.

b) Sea $b \in X - \varphi(\mathbf{R})$ tal que $\varphi(\mathbf{R}) < \{b\}$. Claramente $\{\varphi(n) \mid n \in \mathbf{N}\} < \{b\}$ y por la superdensidad de χ, existe c en χ tal que

$$\{\varphi(n) \mid n \in \mathbf{N}\} < \{c\} < \{b\}.$$

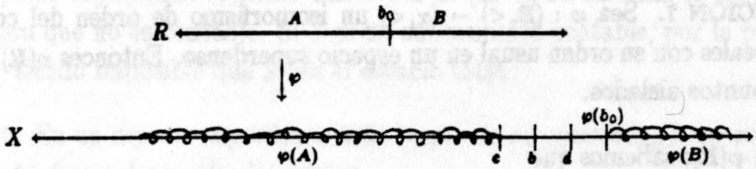
La cola $(c, \rightarrow)$ es una vecindad de b que no contiene puntos de $\varphi(\mathbf{R})$ ya que si existiera x en $\mathbf{R}$ con $\varphi(x) \in (c, \rightarrow)$, se tendría $\{\varphi(n) \mid n \in \mathbf{N}\} < \{\varphi(x)\}$, lo cual por ser φ un isomorfismo de orden significaría $\mathbf{N} < \{x\}$,contradictorio en $\mathbf{R}$.

c) Si $b \in X - \varphi(\mathbf{R})$ y $\{b\} < \varphi(\mathbf{R})$, se procede de manera análoga usando el conjunto $\{\varphi(n) \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

d) Supongamos que $b \in X - \varphi(\mathbf{R})$ y que existen números reales x, y tales que $\varphi(x) < b < \varphi(y)$. Sean

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid \varphi(x) < b\} \text{ y } B = \{y \in \mathbf{R} \mid b < \varphi(y)\}$$

Debido a que el orden de X es total y φ es un isomorfismo de orden, los conjuntos A y B constituyen una cortadura de $\mathbf{R}$ y, como éste es completo, dicha cortadura determina un real, o sea que o A tiene máximo, o B tiene mínimo (pero no ambos). Supongamos que B tenga mínimo, digamos b_0.



Puesto que $b < \varphi(b_0)$, por la densidad de X existirá un elemento d en X tal que $b < d < \varphi(b_0)$.

Si definimos $a_n = b_0 - \frac{1}{n}$, obtenemos una sucesión estrictamente creciente de puntos de A cofinal con A, es decir, tal que para todo y de A existe n natural con $y < a_n$. Pero $\{(a_n) \mid n \in \mathbf{N}\} < \{b\}$, de manera que por la superdensidad de χ, existe c en χ tal que

$$\{(a_n) \mid n \in \mathbf{N}\} < \{c\} < \{b\}.$$

Como φ es un isomorfismo de orden y $(a_n) n \in \mathbf{N}$ es cofinal con A, se deduce que $\varphi(A) < \{c\} < \{b\}$. El intervalo (c, d) es una vecindad de b que no contiene puntos de $\varphi(\mathbf{R})$, quedando así terminada la demostración.

Nótese que el resultado es independiente del isomorfismo empleado,lo mismo que del tamaño del conjunto superdenso.

IV. COMPACIDAD.

En cuanto a este concepto topológico se refiere, se mantiene la situación existente en los reales no estandar (ver [4]):

PROPOSICION 9. En un espacio superdenso, los únicos subconjuntos compactos son los finitos.

Basta demostrar que ningún subconjuto infinito puede ser compacto.

Sea S un subconjunto infinito de X; S contiene un subconjunto H infinito contable el cual suponemos numerado biyectivamente:

$$H = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}.$$

Debido a que un subconjunto contable de un espacio superdenso no posee puntos de acumulación (Proposición 5 anterior), para cada a_k de H existe una vecindad abierta V_k que sólo intersecta a H en el punto a_k. La familia $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de H. Como H es cerrado por no poseer puntos de acumulación, $X - H$ es abierto y si lo añadimos a la familia $(V_k)_k$, obtenemos un recubrimiento abierto de X y en particular de S, del cual no es posible extraer un subrecubrimiento finito de S (ni de X) ya que cada a_k está en un único V_k.

V. CONEXIDAD.

Recordemos que un espacio topológico es conexo si sus únicos subconjuntos simultaneamente abiertos y cerrados, son el vacío y el espacio total. Los dos resultados siguientes afirman que ningún espacio superdenso es conexo.

PROPOSICION 10. Sea $(s(n))_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de puntos de un espacio superdenso. Entonces el conjunto $T = \bigcap_{k \in \mathbb{N}}(s(k), \rightarrow)$ es no vacío, abierto y cerrado.

Es claro que $T = \{x \in X \mid (\forall k \in \mathbb{N})(s(k) < x)\}$. Por la superdensidad de X, toda sucesión es acotada con cotas que no son puntos de la sucesión (ver introducción), de modo que si y es una de dichas cotas, $s(k) < y$ para todo y.Luego y es de T y así T no es vacío.

Veamos que T es abierto. Si $b \in T$, se tiene que $\{s(k) \mid k \in \mathbb{N}\} < \{b\}$ y por la superdensidad de X existe c tal que $\{s(k) \mid k \in \mathbb{N}\} < \{c\} < \{b\}$, de manera que $b \in (c, \rightarrow) \subseteq T$, siendo b un punto interior de T.Debido a que la sucesión es estrictamente creciente, se tiene que para todo $k \geq 1$,

$$(s(k+1), \rightarrow) \subseteq [s(k+1), \rightarrow) \subseteq (s(k), \rightarrow)$$

lo cual implica que $T = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} [s(k+1), \rightarrow)$, resultando cerrado por ser intersección de cerrados.

PROPOSICION 11. Sean X un espacio superdenso, $\alpha : \mathbf{N} \rightarrow X$ una sucesión estrictamente creciente y $\beta : \mathbf{N} \rightarrow X$ una sucesión estrictamente decreciente, tales que

$$\{\alpha(k) \mid k \in \mathbf{N}\} \quad < \quad \{\beta(k) \mid k \in \mathbf{N}\}.$$

Entonces el subconjunto

$$M = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} (\alpha(k), \beta(k)) = \{x \in X \mid (\forall_{k \in \mathbf{N}})(\alpha(k) < x < \beta(k))\}$$

es no vacío, abierto y cerrado. De la hipótesis y por la superdensidad de X, existe b tal que

$$\{\alpha(k) \mid k \in \mathbf{N}\} < \{b\} < \{\beta(k) \mid k \in \mathbf{N}\},$$

luego $b \in M$ y así M no es vacío.

Si suponemos que b es cualquier elemento de M, las desigualdades anteriores y la superdensidad de X implican la existencia de c y d en X tales que

$$\{\alpha(k) \mid k \in \mathbf{N}\} < \{c\} < \{b\} < \{d\} < \{\beta(k) \mid k \in \mathbf{N}\},$$

de manera que $b \in (c, d) \in M$, resultando ser punto interior de M, o sea que éste es abierto.

Como $(\alpha(k))_k$ es estrictamente creciente y $(\beta(k))_k$ es estrictamente decreciente, se tiene que para todo $k \geq 1$,

$$(\alpha(k+1), \beta(k+1)) \subseteq [\alpha(k+1), \beta(k+1)] \subseteq (\alpha(k), \beta(k)).$$

Luego $M = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} [\alpha(k+1), \beta(k+1)]$ es cerrado.

El resultado siguiente caracteriza los subconjuntos conexos de un espacio superdenso.

PROPOSICION 12. Los únicos subconjuntos conexos de un espacio superdenso son los subconjuntos unitarios.

Recordemos que un subconjunto S no es conexo si existen A, B abiertos del espacio tales que

$$S = (A \cap S) \cup (B \cap S),$$

con $A \cap S \neq \phi \neq B \cap S$ y con $A \cap S$ y $B \cap S$ disyuntos. Veamos que ningún subconjunto S con dos o más puntos puede ser conexo. Sean b, d puntos distintos de S con $b < d$. Es fácil demostrar que debido a la densidad de X, entre b y d es posible intercalar toda una sucesión estrictamente creciente $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X (Por esto queremos decir que entre b y d existe c_1, o sea $b < c_1 < d$; entre c_1 y d existe c_2, o sea $b < c_1 < c_2 < d$;.....). Se sigue que existe $(c_n)_n$ estrictamente creciente con $b < c_n < d$ para todo n; luego $d \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (c_n, \rightarrow) = T$, el cual, por la proposición 10, es abierto y cerrado. Como $b \in X - T$ y éste también es abierto y cerrado, entonces

$$S = (S \cap T) \cup (S \cap (X - T))$$

con $S \cap T \neq \phi \neq S \cap (X - T)$ y disyuntos, mostrándose así que S no es conexo.

Recordemos que un subconjunto S de un espacio topológico es *arcoconexo* si para todo par de puntos p, q de S, existe una función continua

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow S \text{ tal que } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha(1) = q.$$

Es bien conocido (ver [1], pg.93) que todo subconjunto arco-conexo es conexo.Este hecho, junto con la proposición 12 anterior, tienen como consecuencia el que los únicos subconjuntos arco-conexos de un espacio superdenso sean los unitarios.

BIBLIOGRAFIA

[1] MUÑOZ Q., JOSE M. "Introducción a la Topología". Edit.Univ. Nal. de Col., Bogotá, 1983.

[2] MUÑOZ Q., JOSE M. "Uso del vaivén en la obtención de isomorfismos entre conjuntos densos y superdensos". Boletín de Matemáticas, Vol. XIX, No. 3, 1985.

[3] TAKEUCHI, YU. "Estructura topológica de $\mathbb{R}^*$. Boletín de Matemáticas", Vol. XVIII, Nos. 1,2,3 de 1984.

[4] TAKEUCHI, YU. "Métodos analíticos del análisis no estandar". Cap. III. Edit. Univ. Nal. de Col. Bogotá, 1988.