SOBRE LA TEORIA DE PUNTOS FIJOS COMUNES DE OPERADORES QUE CONMUTAN

Por

Lucimar Nova G.
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.E., Colombia

Ana Teresa Aldana J.
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.E., Colombia

RESUMEN Se darán condiciones para la existencia de puntos fijos comunes de pares de aplicaciones f y g definidas de un subconjunto K de un espacio métrico completo (χ, d) en sí mismo, que conmutan entre sí y que satisfacen para algún $\alpha \in (0,1)$ la condición

$$d(gx, gy) \quad \leq \quad \alpha d(fx, fy), \qquad x, y \in K.$$

Se demostrará además que bajo estas hipótesis, y la de ser K acotado, g resulta ser asintóticamente regular y f satisface

$$\inf_{x \in K} d(x, fx) = 0.$$

Sobre una o ambas de f o g se impondrán generalmente condiciones de continuidad o de pertenecer a la clase $D(a, b)$.

PALABRAS CLAVES: Regularidad asintótica, sucesión de iterativas de Picard, aplicaciones en la clase $D(a,b)$, aplicaciones a-Lipschitzianas, aplicaciones no-expansivas.

CLASIFICACION: AMS-MOS(1980)
Primaria 47H10
Secundaria 45G10

Este trabajo está basado sobre los resultados obtenidos por A.T. Aldana en su tesis de Maestría en la Universidad Nacional de Colombia. El trabajo fue dirigido por L. Nova.

No. 1. NOCIONES PRELIMINARES Y OBJETIVOS.

En esta sección incluiremos algunos conceptos y resultados básicos bien conocidos. Presentaremos también el esquema del presente trabajo.

DEFINICION 1.1. Sea K un subconjunto de un espacio métrico (χ, d). Se dice que una aplicación g de K en sí mismo es **asintóticamente regular** en $x \in K$, si

$$\lim_{n\to\infty} d(g^n x, g^{n+1}x) = 0, \tag{1.1}$$

donde $(g^n x)_n$ es la sucesión de iterativas de Picard de x bajo g. Por definición,

$$g^0 x = x, \quad g^n x = g(g^{n-1}x), \quad x \in K, n \geq 1.$$

DEFINICION 1.2. Sean K un subconjunto de un espacio métrico (χ, d), g una aplicación de K en sí mismo. Se dice que g pertenece a la clase $D(a,b)$, con $a \geq 0$, $b \geq 0$, sí

$$d(gx, gy) \leq ad(x,y) + b[d(x,gx) + d(y,gy)], \quad x, y \in K. \tag{1.2}$$

Como toda aplicación está en la clase $D(1,1)$, son de interés los casos:

(i) $0 \leq a < 1, \quad b \geq 0,$

(ii) $a \geq 1, \quad b = 0,$

(iii) $a \geq 0, \quad 0 \leq b < 1.$

Condiciones para la existencia de puntos fijos en la clase $D(a,b)$ aparecen en [7],[8].

El estudio de puntos fijos comunes de operadores que conmutan se remonta al año de 1936 con los trabajos de Markov y Kakutani, quienes demostraron que "si K es un subconjunto convexo, compacto y no-vacío de un espacio localmente convexo χ, y si $\mathcal{F}$ es una familia de aplicaciones lineales continuas de K en sí mismo, las cuales conmutan entre sí, entonces existe un punto $p \in K$ tal que $T_p = p$ para todo $T \in \mathcal{F}$"

En 1954, E. Dyer formuló la siguiente pregunta: si f, g son funciones continuas de un intervalo cerrado de la recta real en sí mismo,y si f y g conmutan, ¿tienen f y g un punto fijo común?

La respuesta, negativa, fue dada independientemente por W.M. Boyce [1] y J.P. Huneke [5], en 1969.

Sin embargo, A.J. Schwartz [9], entre otros, presentó, en 1965, algunos resultados parciales positivos relacionados con la pregunta de Dyer. Entre otros, demostró que "si $f, g : [0,1] \to [0,1]$ son continuas, conmutan y $f \in Cl([0,1])$, existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x = g^n(x)$ para algún $n \geq 1$."

Continuando en esta dirección, G Jungck [6] demostró que "si f es una aplicación continua de un espacio métrico completo (χ, d) en sí mismo, entonces f tiene un punto fijo z_0 en X si y sólo si existen $\alpha \in (0,1)$ y $g : \chi \to \chi$ tales que

(i) $gf = fg$,

(ii) $g(\chi) \subset f(\chi)$,

(iii) $d(gx, gy) \leq \alpha d(fx, fy),\ x,y \in \chi$.

"En tales circunstancias, z_0 es también un punto fijo de g, y el único punto fijo común de ambas aplicaciones ".

Fue el artículo de Jungck el que motivó el presente trabajo, en el cual se consideran aplicaciones $f, g : K \to K$, donde K es un subconjunto de un espacio métrico completo (χ, d), que cumplen las condiciones siguientes:

(1) $fg = gf$,

(2) para algún $\alpha \in (0,1)$ $\quad d(gx, gy) \leq \alpha d(fx, fy), \quad x, y \in K$.

En nuestros resultados no supondremos que $g(K) \subset f(K)$.

Observaremos que si K es acotado, las condiciones (1) y (2) aseguran que g es asintóticamente regular en cada punto de K y que f satisface

$$\inf_{x \in K} d(x, fx) = 0.$$

Denotaremos con F_g al conjunto de puntos fijos de g.

No. 2 LA CLASE $D(a, b)$, CON $a, b \geq 0, a < 1$.

En esta sección estudiaremos el conjunto de puntos fijos comunes de pares conmutantes de operadores f, g de un subconjunto cerrado y acotado K, de un espacio métrico completo (χ, d)

en sí mismo, para los cuales existe $\alpha \in (0,1)$ tal que

(2.1) $$d(gx,gy) \leq \alpha d(fx,fy), \quad x,y \in K.$$

En general, supondremos que alguno de ellos pertenece a la clase $D(a,b)$, con $a,b \geq 0, a < 1$.

Comenzaremos por demostrar que las hipótesis de conmutatividad conjuntamente con la (2.1) implican que g es un operador asintóticamente regular de todo punto K, aún si ninguno de ellos está en $D(a,b)$.

LEMA 2.1: Sean (χ,d) un espacio métrico, K un subconjunto acotado de χ, f y g aplicaciones de K en sí mismo. Supóngase que

(i) $gf = fg$,

(ii) existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $d(gx,gy) \leq \alpha d(fx,fy), \quad x,y \in K$.

Entonces, g es asintóticamente regular en todo punto de K.

DEMOSTRACION. Sea $x \in K$ arbitrario. Puesto que f y g satisfacen las condiciones (i) y (ii), entonces

$$d(g^n x, g^{n+1} x) \leq \alpha d(g^{n-1} fx, g^n fx).$$

Reiterando este proceso, obtenemos que

(2.2) $$d(g^n x, g^{n+1} x) \leq \alpha^n d(f^n x, gf^n x),$$

y puesto que K es acotado y $\alpha \in (0,1)$, la conclusión se obtiene pasando al límite cuando $n \to \infty$ en (2.2).■

La condición de acotación sobre K es indispensable para garantizar la regularidad asintótica, como se observa en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.1. Sean $K = \mathbb{R}^2$ con la métrica usual, $f,g : K \to K$ definidas por

$$f(x,y) = (11x, y/2+3), \quad g(x,y) = (7x, y/3+4).$$

Obviamente

$$fg(x,y) = gf(x,y) = (77x, y/6+5).$$

y, puesto que

$$|f(x,y) - f(x',y')|^2 = 121(x-x')^2 + \frac{1}{4}(y-y')^2,$$

y

$$|g(x,y) = g(x',y')|^2 = 49(x-x')^2 + \frac{1}{9}(y-y')^2,$$

f y g satisfacen (i) y (ii) de LEMA 2.1 para cualquier $\alpha \in [2/3, 1)$.

Pero, para $(1,6) \in \mathbb{R}^2$, $g^n(1,6) = (7^n, 6)$ y $|g^{n+1}(1,6) - g^n(1,6)|^2 = 49^n \cdot 36 \not\to 0$ *cuando* $n \to \infty$; es decir, g no es asintóticamente regular en $(1,6)$.

Es natural ahora, preguntarse acerca del comportamiento de la sucesión de iterativas de Picard bajo g.

LEMA 2.2. Bajo las hipótesis del LEMA 2.1, $(g^n x)_n$ es una sucesión de Cauchy de K, para todo $x \in K$.

DEMOSTRACION. Sean $x \in K, n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n > m$. De (ii) se obtiene que

$$d(g^n x, g^m x) = d(g^m(g^{n-m} x), g^m x) \leq \alpha d(f g^{m-1}(g^{n-m} x), f g^{m-1} x),$$

y como f, g conmutan, entonces

$$d(g^n x, g^m x) \leq \alpha d(g^{m-1}(f g^{n-m} x), g^{m-1} f x).$$

Reiteración m-veces muestra que

$$d(g^n x, g^m x) \leq \alpha^m d(f^m g^{n-m} x, f^m x), \tag{2.3}$$

y puesto que K es acotado y $\alpha \in (0,1)$, al pasar al límite cuando $m \to \infty$ en (2.3) se obtiene la conclusión.∎

Obsérvese que una aplicación T puede ser continua, estar definida en un cerrado, acotado y convexo, ser asintóticamente regular en todo punto de su dominio, y aún tener puntos fijos, sin que sus iterativas de Picard converjan.

Ejemplo 2.2. Sean $K = \{z = re^{i\theta} : \quad r \geq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ y T definida en K por

$$T(re^{i\theta}) = \begin{cases} \frac{4}{3} r e^{i(\theta + 1/2)}, & 0 \leq r \leq 1/2 \\ \frac{1}{2-r} e^{i(\theta + (1-r))}, & \frac{1}{2} < r \leq 1. \end{cases}$$

Claramente T aplica K en sí mismo, es continua y

$$\{e^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\} \cup \{0\} = S^1 \cup \{0\}$$

es su conjunto de puntos fijos.

Los puntos $z = re^{i\theta}$, $0 < r \leq 1/2$, son denominados puntos interiores, y los $z = re^{i\theta}$, $1/2 < r \leq 1$, puntos exteriores. Si $z = r^{i\theta}$ es interior y n es lo suficientemente grande para que

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n > \frac{1}{2r},$$

entonces T_z^n es exterior. Por otra parte, si z es exterior, T_z sigue siendo exterior; y si $d(z,S^1) = 1/k$, entonces $1-r = 1/k$. de lo cual

$$d(Tz,S^1) = d\Big(\frac{1}{2-r}e^{i(\theta+(1-r))},S^1\Big) = 1-\frac{1}{2-r} = \frac{1}{k+1}.$$

Además, $arg(Tz) = argz + 1/k$. Se concluye que si $z \in K$ y n es lo suficientemente grande para que T_z^n sea exterior, entonces

$$|T^{n+p}z - T^{n+p+1}z| \leq \Big|1 - \frac{(k+p)^2}{(k+p+1)(k+p-1)}e^{i/(k+p)}\Big|.$$

donde $\frac{1}{k}$ es la distancia de T_z^n a S^1.

En consecuencia, para cualquier $z \in K$, $|T_z^n - T_z^{n+1}| \to 0$. Sin embargo, si $z = re^{i\theta}$ es exterior, y $r < 1$, entonces

$$arg(T_z^N) = argz + \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{k+n},$$

donde $k = \frac{1}{1-r}$. Como $\lim \sum_{n\geq 0}\frac{1}{k+n}$ diverge, entonces $(T_z^n)_n$ diverge, salvo cuando z es un punto fijo. Tal como lo observó G. Jungck, si g tiene puntos fijos, tiene exactamente uno.

LEMA 2.3: Si además de la hipótesis del LEMA 2.1 suponemos que $Fg \neq \phi$, entonces Fg se reduce a un único punto.

DEMOSTRACION. En efecto, supongamos que $x,y \in Fg$. Como f,g conmutan y satisfacen (ii), entonces

$$d(x,y) = d(gx,gy) \leq \alpha d(fx,fy) = \alpha d(fgx,fgy) = \alpha d(gfx,gfy).$$

Aplicando de nuevo la condición (ii) obtenemos que

$$d(x,y) \leq \alpha^2 d(f^2x,f^2y),$$

y repitiendo este proceso n veces, obtenemos que

$$d(x,y) \leq \alpha^n d(f^nx,f^ny).$$

Como K es acotado y $\alpha \in (0,1)$, pasando al límite cuando $n \to \infty$ se concluye que $x = y$. ■

De la conmutatividad entre f y g, si $x \in Fg$ entonces $O_f(x) = (f^nx)_n \subset Fg$, en consecuencia, según el LEMA 2.3, $O_f(x) = \{x\}$. Se concluye entonces que

TEOREMA 2.1. Si (χ,d) es un espacio métrico, K es un subconjunto acotado de χ y $f,g : K \to K$ satisfacen

(i) $gf = fg$,

(ii) existe $\alpha \in (0,1)$, tal que $d(gx,gy) \leq \alpha d(fx,fy)$, $x,y \in K$,

(iii) $Fg \neq \phi$,

entonces $F_f \cap F_g$ se reduce a un único punto.

Si $Fg \neq \phi$, el teorema anterior garantiza la existencia de puntos fijos comunes. El teorema siguiente muestra que tal es el caso cuando el operador g es continuo o está en $D(a,b)$ con $0 \leq b < 1$, $a \geq 0$.

TEOREMA 2.2. Sean (χ, d) un espacio métrico completo, K un subconjunto cerrado y acotado de χ. Si $f,g : K \to K$ satisfacen:

(i) $fg = gf$,

(ii) **existe** $\alpha \in (0,1)$ **tal que** $d(gx,gy) \leq \alpha d(fx,fy)$, $x,y \in K$,

(iii) **g es continua o** $g \in D(a,b)$, **con** $0 \leq b < 1$, $a \geq 0$,

entonces, $F_g \cap F_f$ consiste de exactamente un punto $z \in K$, y para cada $x \in K$ la sucesión $(g^n x)_n$ de las iterativas de Picard bajo g converge a este punto z.

DEMOSTRACION. Según el LEMA 2.2 $(g^n x)_n$ es una sucesión de Cauchy para todo $x \in K$, y puesto que K es completo,existe $z \in K$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} g^n x = z. \tag{2.4}$$

Como según el LEMA 2.1 g es asintóticamente regular en todo $x \in K$, si $x_n = g^n x$ entonces $x_n \to z$ y $gx_n \to z$, así que, si g es continua, entonces $z \in Fg$. Si g no es continua, pero $g \in D(a,b)$, entonces

$$\begin{aligned} d(gz,z) &\leq d(gz,gx_n) + d(gx_n,z) \\ &\leq ad(z,x_n) + b[d(z,gz) + d(x_n,gx_n)] + d(gx_n,z). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Como $x_n \to 0$, $d(x_n,gx_n) \to 0$ y además $b < 1$, pasando de nuevo al límite cuando $n \to \infty$ en (2.5), se obtiene que $z = gz$. Finalmente, el TEOREMA 2.1 garantiza que $F_f \cap F_g = \{z\}$ y el teorema queda demostrado.∎

Es natural ahora preguntarse: ¿Qué se puede concluir si es f la que pertenece a la clase $D(a,b)$? El siguiente teorema es una respuesta parcial.

TEOREMA 2.3. Sean χ un espacio métrico completo y K un subconjunto cerrado de χ. Si f, g:$K \to K$ satisfacen:

(i) $gf = fg$,

(ii) **existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $d(gx, gy) \leq \alpha d(fx, fy)$, $x, y \in K$.**
(iii) **f es asintóticamente regular en $x_0 \in K$,**
(iv) $f \in D(a,b)$, **con $0 \leq a, b < 1$,**

entonces $F_f \cap F_g$ consiste exactamente de un solo punto $z \in K$, y la sucesión de iterativas de Picard de x_0 bajo f converge a este punto.

DEMOSTRACION. Como $f \in D(a,b)$ con $a < 1$, si $x_n = f^n x_0$ entonces

$$d(x_n, x_m) = d(f^n x_0, f^m x_0) \leq ad(x_{n-1}, x_{m-1}) + b[d(x_n, x_{n-1}) + d(x_m, x_{m-1})].$$

Como $d(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, x_{m-1})$, entonces

$$(1-a)d(x_n, x_m) \leq (a+b)\{d(x_n, x_{n-1}) + d(x_m, x_{m-1})\}.$$

Puesto que f es asintóticamente regular en x_0 y $a < 1$, se deduce que la sucesión $(x_n)_n = (f^n x_0)_n$ es de Cauchy en K; y como K es completo, existe $z \in K$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} f^n x_0 = z. \tag{2.6}$$

Al igual que en la demostración del teorema anterior, pero aplicado a f y a $x_n = f^n x_0$, se deduce que $z = fz$ si $f \in D(a,b)$, con $b < 1$.

Finalmente, como $a < 1$ entonces $F_f = \{z\}$, y como f y g conmutan, entonces $z = g(z)$. Esto demuestra el teorema. ∎

La condición de que f sea asintóticamente regular en algún punto no es vacío. Tal es el caso, por ejemplo, si $f \in D(a,b)$ con $a + 2b < 1$, como se muestra en [8].

NO. 3. LA CLASE $D(a,0)$ con $a \geq 1$.

En esta sección discutiremos la existencia de puntos fijos comunes de pares de operadores, conmutantes, al menos uno de los cuales es no-expansivo (es decir en $D(1,0)$) o a-Lipschitziano con $a > 1$ (es decir, en $D(a,0)$).

Examinemos primero el caso de las no expansiones.

TEOREMA 3.1. Sea K un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo (χ, d). Si $f, g : K \to K$ son tales que:
(i) $fg = gf$,
(ii) $f \in D(1,0)$,

(iii) **existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $d(gx, gy) \leq \alpha d(fx, fy)$, $x, y \in K$,**

entonces, $F_f \cap F_g = \{z\}$ y $(g^n x)_n$ converge a z para todo $x \in K$.

DEMOSTRACION. Puesto que f es una no-expansión, y f, g están relacionados según (iii), entonces g es una α-contracción definida en K, el cual es completo. Por lo tanto, de acuerdo con el Principio de Contracción de Banach, existe un único $z \in K$ tal que $z = g(z)$, y además $g^n x \to z$ para todo $x \in K$. Como f, g conmutan y z es el único punto fijo de g entonces $fz = z$, y por lo tanto, $F_f \cap F_g = \{z\}$∎

En el caso en que F es a-Lipschitziana con $a > 1$, se tiene

TEOREMA 3.2. Si K es un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo, y si $f, g : K \to K$ son tales que

(i) $fg = gf$,

(ii) $f \in D(a, 0)$, **con** $a > 1$,

(iii) **existe $0 < \alpha < \frac{1}{a}$ tal que $d(gx, gy) \leq \alpha d(fx, fy)$, $x, y \in K$,**

entonces $F_f \cap F_g = \{z\}$ y $(g^n x)_n$ converge a z para todo $x \in K$

DEMOSTRACION. En este caso las dos funciones son continuas, puesto que f lo es y f y g están relacionadas por (iii). Además, esta última condición hace de g una α-contracción. Como K es completo, entonces $F_g = \{z\}, z \in K$, y la conclusión resulta de la unicidad de los puntos fijos de g y de la conmutatividad entre f y g. ∎

NO. 4. LA CLASE $D(a, b)$, CON $a \geq 0$, $0 \leq b < 1$.

En esta clase estarán incluidas parte de la clase estudiada en la sección No. 2,así como los operadores a-Lipschitzianos.

LEMA 4.1. Sean K un subconjunto acotado de un espacio métrico completo (χ, d). Si $f, g : K \to K$ son tales que

(i) $fg = gf$,

(ii) **existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $d(gx, gy) \leq \alpha d(fx, fy)$, $x, y \in K$,**

entonces, cualquiera que sea $x \in K$, si $x_n = g^n x$, se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, fx_n) = 0.$$

En particular,

$$\inf_{x\in K} d(x, fx) = 0$$

DEMOSTRACION. Aplicando reiteradamente las condiciones (i) y (ii) se obtiene que

$$\begin{aligned} d(g^n x, fg^n x) &= d(g^n x, gfg^{n-1}x) \leq \alpha d(g^{n-1} fx, g^{n-1} f^2 x) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^n d(f^n x, f^{n+1} x). \end{aligned}$$

Como K es acotado y $0 < \alpha < 1$, pasando al límite cuando $n \to \infty$ concluimos lo deseado. ∎

El resultado principal de esta sección es el siguiente

TEOREMA 4.1. Sea K un subconjunto cerrado y acotado de un espacio métrico completo (χ, d). Si $f, g : K \to K$ son tales que

(i) $fg = gf$

(ii) existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $d(gx, gy) \leq \alpha d(fx, fy)$, $x, y \in K$,

(iii) $f \in D(a, b)$ con $a \geq 0$, $0 \leq b < 1$.

entonces existe $z \in K$, punto fijo común de f y g. Además, $F_f \cap F_g = \{z\}$ y, para cada $x \in K$, $(g^n x)_n$ es una sucesión convergente a z.

DEMOSTRACION. De acuerdo con el LEMA 2.2, y por ser K completo, si $x \in K$ es arbitrario y $x_n = g^n x$, existe $z \in K$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} g^n x = \lim_{n\to\infty} x_n = z. \tag{4.1}$$

Del lema anterior se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = z. \tag{4.2}$$

Veamos que z es un punto fijo de f. Por (iii),

$$d(fg^n x, fz) \leq ad(g^n x, z) + b\{d(g^n x, fg^n x) + d(z, fz)\},$$

y pasando al límite cuando $n \to \infty$ se deduce de esta desigualdad, del lema anterior, de las ecuaciones (4.1) y (4.2) y del hecho de ser $b < 1$, que

$$z = f(z).$$

Como además $d(g^n x, gz) \leq \alpha d(fg^{n-1}x, fz) = \alpha d(fg^{n-1}x, z)$, entonces

$$g(z) = z$$

y la unicidad de z es clara.

El teorema queda demostrado. ∎

El siguiente ejemplo ilustra el anterior resultado, así como los de la sección No. 2

Ejemplo 4.1. Sean $\chi = \mathbf{R}, K = [0,1], f, g : K \to K$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x/4, & x \in \mathbf{Q} \cap [0,1] \\ x/5, & x \in \mathbf{I} \cap [0,1] \end{cases}$$

$g(x) = 0, x \in [0,1]$. Es fácil comprobar que

(i) $fg(x) = gf(x) = 0$, para $x \in [0,1]$,

(ii) $|gx - gy| = 0 \le \alpha|fx - fy|$, $x, y \in [0,1]$, $\alpha \in (0,1)$

(iii) $f \in D(a,b)$, con $a \ge 0$, $b \ge 1/3$,

(iv) $F_f \cap F_g = \{0\}$

AGRADECIMIENTOS. Queremos expresar nuestra gratitud al Profesor Jairo A. Charris de la Universidad Nacional de Colombia, por sus valiosas sugerencias y correcciones del manuscrito del artículo.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOYCE, W.M., "Commuting functions with no common fixed point". Trans, Amer. Math. Soc. 137 (1969), 77-92.

[2] DAS, K.M. and VISWANATHA-NAIK,K.,"Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space". Proc. Amer. Math. Soc. 77 No. 3,(1979), 369-373.

[3] GOEBEL, K., "An elementary proof of the fixed point theorem of Browder and Kirk". Mich. Math. J. 16(1969), 381-383.

[4] GOEBEL, K., KIRK, W.A., SHIMI, T.N.,"A fixed point theorem in uniformly convex spaces". Boll, Un. Mat. Ital. (4) 7(1973), 67-75.

[5] HUNEKE,J.P.,"On common fixed points of commuting continuous functions on an interval". Trans. Amer. Math. Soc. 139(1969), 371-381.

[6] JUNGCK, G., "Commuting mappings and fixed points". Amer. Math. Monthly 83(1976), 1-5, 261-263.

[7] NOVA, L., "Some fixed point theorems". Tesis de doctorado, University of Montana, Missoula, Mt.,1980.

[8] NOVA, L., "Fixed point theorems for some discontinuous operators". Pac. J. of Math., 123(1986), 189-196.

[9] SCHWARTZ,A.J., "Common periodic points of commuting functions". Mich. Mat. J. 12(1965), 353,365.

[10] SMART. D. R., "Fixed point theorems", Cambridge University Press, London, 1974.