LA CONVEXIDAD EN ESPACIOS TOPOLOGICOS ORDENADOS

Por
José M. Muñoz Q.
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E.,Colombia

Alba Leonor Chaux C.
Universidad Surcolombiana y
Secretaría de Educación del Huila
Neiva,Colombia

Resumen

Luego de analizar con cierto detalle los espacios topológicos ordenados, en especial desde el punto de vista de su convexidad, se prueba que ellos son completamente normales, se clasifican sus subconjuntos convexos y se ponen de presente las dificultades para establecer homeomorfismos entre ellos y ciertos subcobjuntos convexos bien conocidos de los números reales no estándar.

I. INTRODUCCION

En el presente artículo $(X,<)$ siempre será un conjunto X no vacío **totalmenete ordenado** por una relación "$<$" de orden estricto.
Para todo par de elementos a, b de X con $a < b$, definimos el **intervalo abierto de extremos** a **y** b como

$$(a,b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$$

Por ejemplo, para $\{1,2,3,4\}$ con el orden $1<2<3<4$, el conjunto de todos sus intervalos abiertos es

$$\{(1,2)=\phi,\ (1,3)=\{2\},\ (1,4)=\{2,3\},\ (2,4)=\{3\}\}$$

Nótese que no existe un intervalo abierto al cual pertenezca ni el primero ni el último elementos del conjunto.

La colección A de los intervalos abiertos de X genera una topología, llamada la **topología del orden** de X, a la cual notaremos $T<$.

Para el ejemplo anterior,

$$T<=\{\phi,\{2\},\{3\},\{2,3\},\{1,2,3,4\}\}.$$

Puesto que la intersección de dos intervalos abiertos es siempre un intervalo abierto, bastará agregar X mismo a la colección A para obtener una base de la topología $T<$. En el ejemplo dado, la única vecindad tanto del primer elemento como del último, es el espacio completo, lo cual muestra que en general $T<$ ni siquiera es un espacio T_0 (de Kolmogoroff), ya que no existe una vecindad del primer elemento al cual no pertenezca el último, ni una del último al cual no pertenezca el primero.

Una cola abierta $(1,\rightarrow)=\{x\in X \mid 1<x\}$, tampoco sería un conjunto abierto ya que su adherencia viene a ser todo el espacio.

Para obtener topologías de orden con posibilidades de poseer algunas propiedades de separación, en adelante cuando digamos ***espacio topológico ordenado*** X, se entenderá un conjunto no vacío totalmente ordenado, **sin primero ni último elementos**, dotado de su topología del orden $T<$.

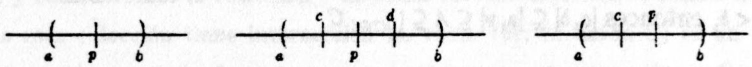
En este caso la sola colección A de los intervalos abiertos es una base de $T<$, ya que si b es cualquier punto de X, existirán $c<b$ (no hay primero) y $d>b$ (no hay último), luego $b\in(c,d)$ y X coincidirá con la unión de todos sus intervalos abiertos.

Las colas abiertas $(\leftarrow,a)$ y $(a,\rightarrow)$ serán entonces **subconjuntos abiertos**, puesto que si por ejemplo $b\in(\leftarrow,a)$, existirá $c<b$ y así b será punto interior de $(\leftarrow,a)$ ya que $b\in(c,a)\subseteq(\leftarrow,a)$. Es entonces inmediato que **el espacio** topológico ordenado **será** T_0 **y** T_1, ya que si $p<q$ son puntos dados, $(\leftarrow,q)$ será una vecindad de p a la cual no pertenece q, y $(p,\rightarrow)$ será una vecindad de q, a la cual no pertenece p. Si entre p y q no existen puntos del espacio, las colas $(\leftarrow,q)$ y $(p,\rightarrow)$ serán vecindades disyuntas de p y q respectivamente. Si existe c entre p y q, o sea, $p<c<q$, entonces $(\leftarrow,c)$ y $(c,\rightarrow)$ serán vecindades disyuntas de p y q respectivamente,

luego el **espacio ordenado** será T_2 (o Hausdorff).
Más aún, tenemos la siguiente

PROPOSICION 1. Un espacio topológico ordenado (¡sin extremos!) es regular.

Sean F un subconjunto cerrado de un espacio ordenado X y p un punto que no pertenece a F. Como $p \in X - F$ y éste es abierto, existe (a, b), vecindad de p, contenida en $X - F$.



i) Si entre a y p no existen puntos de X y entre p y b tampoco,entonces $(a, b) = \{p\}$ será abierto, y como $\{p\}$ es cerrado por ser el espacio T_1, se tiene que $X - \{p\} = (\leftarrow, p) \cup (p, \rightarrow)$ también será abierto. $\{p\}$ y $X - \{p\}$ serán los abiertos que separan a p y F.

ii) Si tanto entre a y p como entre p y b existen puntos c y d de X, digamos $a < c < p < d < b$, entonces (c, d) y $(\leftarrow, c) \cup (d, \rightarrow)$ son abiertos que separan a p y F.

iii) Si existe c en X tal que $a < c < p < b$ pero b es sucesor inmediato de p, entonces (c, b) y $(\leftarrow, c) \cup (p, \rightarrow)$ son los abiertos disyuntos que separan a p de F.

Análogamente se procede si p es sucesor inmediato de a pero entre p y b existen puntos de X, con lo cual se completa la demostración.

II. CONVEXIDAD

Sea $(X, T_<)$ un espacio topológico ordenado.Decimos que un subconjunto S de X es **convexo**, si para todo par de puntos a, b de S con $a < b$,se tiene que $[a, b] \subseteq S$ (Aquí $[a, b] = \{a\} \cup (a, b) \cup \{b\}$).

Claramente todo intervalo abierto, cerrado o semiabierto es convexo, pero éstos no son los únicos subconjuntos convexos de un espacio ordenado; es sencillo ver que tanto el espacio completo como las colas$(\leftarrow, a)$,$(a, \rightarrow)$,etc., son convexos que no son intervalos.

Menos trivialmente, en el espacio $\mathbf{R}^*$ de los números reales no estandar, el conjunto $E(0)$ de los infinitesimales es convexo y no es de ninguno de los tipos antes mencionados (ver [3], prop.6), lo mismo que el conjunto de los reales no estandar finitos o cualquier galaxia (ver [2]).

PROPOSICION 2. En un espacio topológico ordenado, la unión de una colección de subconjuntos convexos con intersección no vacía, es un convexo.

Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos convexos tal que $p \in \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$; si a, b están en $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$ y $a < b$, existen conjuntos A, B en C con $a \in A$ y $b \in B$.

i) Cuando $a < p < b$, se tiene $[a, b] = [a, p] \cup [p, b] \subseteq A \cup B \subseteq \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$

ii) Cuando $p < a < b$, se tiene $[a, b] \subseteq [p, b] \subseteq B \subseteq \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$.

iii)Si $a < p < b$, entonces $[a, b] \subseteq [a, p] \subseteq A \subseteq \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$

Se concluye que $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$ es convexo.

Trivialmente la intersección de una colección de subconjuntos convexos también es convexa.

LEMA 1. Si A es convexo y p es un punto de acumulación de A, entonces $\{p\} \cup A$ es convexo.

i) Si existen $a, b \in A$ tales que $a < p < b$, entonces $p \in [a, b]$ y $[a, b] \subseteq A$, luego $\{p\} \cup A = A$ es convexo.

ii) Supongamos que $(\forall x \in A)(p < x)$.

Afirmamos que si $y \in A$, entonces $(p, y) \subseteq A$. En efecto,sea $z \in (p, y)$, se tiene que $p < z < y$. Tomemos $t < p$; como (t, z) es una vecindad de p y éste es de acumulación de A, existirá q en A, $q \neq p$, tal que $q \in (t, z)$. Por la hipótesis hecha, $p < q$, o sea, $p < q < z < y$.Siendo A convexo, se tiene $[q, y] \subseteq A$, luego $z \in A$ y así $(p, y) \subseteq A$.

Claramente $[p, y] \subseteq \{p\} \cup A$, lo cual demuestra que $\{p\} \cup A$ es convexo, ya que si $u, v \in \{p\} \cup A$ y $u \neq p \neq v$, trivialmente $[u, v] \subseteq A \subseteq A \cup \{p\}$.

iii) Cuando p es mayor que todos los elementos de A, se procede de manera completamente análoga.

PROPOSICION 3. Si A es un subconjunto convexo de un espacio ordenado, entonces $\overline{A}$ también es un convexo.

DEMOSTRACION. Cuando $A = \phi$, el resultado es trivial por ser $\overline{A} = \phi$ y convexo. Supóngamos que $A \neq \phi$. Sea D el conjunto de puntos de acumulación de A; si D es vacío, $\overline{A} = A \cup D = A$ y el resultado se tiene. Supongamos ahora que D no es vacío; en este caso $(\{p\} \cup A)_{p\in D}$ es una familia no vacía de conjuntos convexos (por el lema) con intersección no vacía, luego por la

proposición 2 su unión es un convexo. Pero,

$$\bigcup_{p\in D}(\{p\}\cup A) \quad = D\cup A = \quad \overline{A}.$$

Luego $\overline{A}$ es convexo.

Sea $p \in X$ y consideremos la colección $\mathcal{C}$ de todos los subconjuntos convexos de X que contiene a p; como esta colección tiene intersección no vacía $\{p\}$, su unión C_p es un convexo, el cual claramente contiene a cualquier convexo que contenga a p. A este conjunto C_p se le acostumbra llamar componente convexa de p.

Por la proposición 3, $\overline{C_p}$ también es convexo y como C_p contiene a cualquier convexo al cual pertenezca p, entonces $C_p \supseteq \overline{C_p}$, luego $C_p = \overline{C_p}$ o sea que C_p es cerrado en X.

Si $q \in C_p$, se tiene que $C_q \cap C_p \neq \phi$, luego por la proposición 2, $C_q \cup C_p$ es convexo. La maximalidad de C_q hace que $C_q \supseteq C_q \cup C_p$ y la de C_p hace que $C_p \supseteq C_q \cup C_p$,luego $C_q = C_q \cup C_p = C_p$.

Se concluye además que si $C_r \neq C_s$, entonces $C_r \cap C_s = \phi$.

Sea $S \subseteq X$; dado un punto p de S, se define análogamente la componente convexa de p relativa a S, notada $C_p(S)$, como la unión de todos los subconjuntos convexos de S a los cuales pertenece p. Al igual que el caso anterior, si $q \in C_p(S)$, entonces $C_q(S) = C_p(S)$ y la colección de las componentes convexas relativas a S de los puntos de S, es disyunta dos a dos y tiene como unión al mismo S. Se dice que es la colección de las componentes convexas de S.

PROPOSICION 4. Si S es abierto en X, entonces sus componentes convexas también son abiertas en X.

Sea $C_p(S)$ cualquiera y *veamos* que *todos sus puntos* son interiores. *Tomemos cualquier* $q \in C_p(S)$; como éste es un subconjunto de S, se tiene $q \in S$ y siendo S abierto, existe un intervalo abierto I contenido en S y al cual pertenece q. Pero I es convexo , luego $I \subseteq C_q(S) = C_p(S)$,lo cual termina la demostración.

PROPOSICION 5. Si S es cerrado en X, sus componentes convexas también son cerradas en X.

Supongamos F cerrado en X y sea $C_p(F)$ cualquiera de sus componentes convexas; $C_p(F) \subseteq F$ implica $\overline{C_p(F)} \subseteq \overline{F} = F$ y como $\overline{C_p(F)}$ es convexo, contiene a p y está contenido en F, entonces $\overline{C_p(F)} \subseteq C_p(F)$, probándose que $C_p(F)$ es cerrado en X.

PROPOSICION 6. En un espacio topológico ordenado, el conjunto de las cotas superiores de un conjunto cualquiera, es convexo.

DEMOSTRACION. El conjunto de cotas superiores del vacío es el espacio completo, el cual es convexo. Sea M un subconjunto no vacío del espacio X; si su conjunto de cotas superiores es vacío, es convexo. Supongamos, entonces, que su conjunto S de cotas superiores no es vacío; si $p, q \in S$ y $p < x < q$, claramente x también es una cota superior de M, así que x está en S, quedando la proposición demostrada.

Análogamente se obtiene que el conjunto de las cotas inferiores de un conjunto cualquiera también es convexo. Aun cuando se puede estar tentando a pensar que el conjunto de las cotas superiores es una cola $(a, \rightarrow)$,esto en general no es cierto; así en el espacio de los reales no estandar, el conjunto de cotas superiores del conjunto de los reales no estandar finitos, es el de los reales no estandar infinitos positivos, el cual no es una cola.

PROPOSICION 7. En un espacio topológico ordenado, un subconjunto convexo sin primero ni último elementos es abierto.

Sea A un conjunto tal y sea $x \in A$. Existen p, q en A tales que $p < x < q$; pero $[p, q] \subseteq A$ por ser éste convexo, y con mayor razón $(p, q) \subseteq A$. Luego, x es punto interior de A. De manera similar se prueba la siguiente proposición.

PROPOSICION 8. Sea M convexo.

i) Si no tiene último elemento, entonces para todo p de M el conjunto $\{x \in M \mid p < x\}$ es abierto.

ii) Si M no tiene primer elemento, entonces para cualquier p de M, el conjunto $\{x \in M \mid x < p\}$ es abierto.

Una generalisación de este resultado, es el siguiente.

PROPOSICION 9. Sea M convexo y sean S el conjunto de las cotas superiores estrictas de M y L el conjunto de las cotas inferiores estrictas de M.

i) Si $M \cap \overline{S} = \phi$, entonces para todo $p \in M$, el conjunto $U_p = \{x \in M \mid p < x\}$ es abierto.

ii) Si $M \cap \overline{L} = \phi$, entonces para todo $p \in M$, el conjunto $L_p = \{x \in M \mid x < p\}$ es abierto.

Demostremos i) ya que la prueba de ii) es completamente análoga.

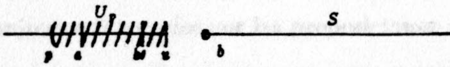
a) Si M no tiene último elemento, U_p es abierto por la proposición anterior.

b)Supongamos que M posee último elemento u; como $u \in M$, se tiene $u \notin \overline{S}$.

Si por casualidad $p = u$, entonces $U_p = \phi$ y es abierto.

Si $p < u$ y como $u \notin \overline{S}$ existen $a, b \in X$ tales que $a < u < b$ y $(a, b) \cap S = \phi$. Siempre es posible tomar $p \leq a$, con lo cual $(a, b) \subseteq M$. Así $U_p = [p, u) \cup (a, b)$ es abierto.

Nótese que b es cota superior estricta de M por ser mayor que el último de M. Necesariamente b es la mínima cota superior estricta de M, ya que si existiera otra $b' < b$, entonces $b' \in (a, b)$, contradiciendo la relación $(a, b) \cap S = \phi$. Un esquema de esta situación sería:



PROPOSICION 10. Sea M convexo y sean S y L como en la proposición 9.

i) Si $M \cap \overline{S} \neq \phi$, entonces $M \cap \overline{S} = \{u\}$ y u es el último de M.

ii) Si $M \cap \underline{L} \neq \phi$ entonces $M \cap \underline{L} = \{p\}$ y p es el primero de M.

Como antes, demostraremos i) solamente. Si $u, s \in M \cap \overline{S}$ con $u < s$,entonces $(\leftarrow, s)$ sería una vecindad de u. En consecuencia, debería intersectar a S en algún punto q, lo cual es contradictorio ya que se tendrá $q < s$ y así q no sería una cota superior de M. Concluimos que $M \cap \overline{S}$ debe ser unitario, digamos $M \cap \overline{S} = \{u\}$.

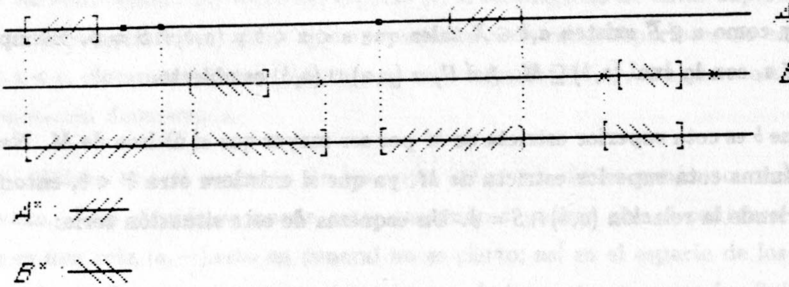
Si existiese en M otro elemento $s > u$, entonces $(\leftarrow, s)$ sería una vecindad de u que no intersectaría a S, lo cual es contradictorio ya que $u \in \overline{S}$. Luego u es el último elemento de M.

III. NORMALIDAD.

Esta sección tiene por objeto demostrar que todo espacio topológico ordenado (sin extremos) es completamente normal, es decir, dados dos subconjuntos A, B tales que $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \phi$, entonces existen abiertos disyuntos V y W tales que $V \supseteq A$ y $W \supseteq B$. La prueba es un tanto laboriosa y en ella seguiremos las ideas sugeridas en [4].

En adelante siempre supondremos que se han dado y mantenido fijos: un espacio topológico ordenado $(X, T_<)$ sin primero ni último, y dos subconjuntos separados A, B de X, es decir tales que $\overline{A} \cap B = \phi = A \cap \overline{B}$.

La estrategia de la demostración consiste en construir, tanto para A como para B, envolventes convexas de sus "pedazos", de tal forma que aún la unión A^* de las envolventes de los "pedazos" de A, sea separada de la unión B^* de las envolventes de los "pedazos" de B. Luego sí se intenta separar con abiertos a A^* de B^*.



Más exactamente, sean

$$A^* = \bigcup\{[a,b] \mid a,b \in A \wedge [a,b] \cap \overline{B} = \phi\}$$
$$B^* = \bigcup\{[c,d] \mid c,d \in B \wedge [c,d] \cap \overline{A} = \phi\}$$

Como para todo x de A, $[a,a] = \{a\} \subseteq A^*$ por ser A disyunto de $\overline{B}$, entonces $A \subseteq A^*$; análogamente, $B \subseteq B^*$.

PROPOSICION 11. $\overline{A} \cap B^* = \phi = A^* \cap \overline{B}$.

Es realmente evidente, ya que, por ejemplo, ninguno de los $[a,b]$ intersecta a $\overline{B}$, entonces su unión A^*, tampoco intersecta a $\overline{B}$. Simétricamente se procede para ver que $B^* \cap \overline{A} = \phi$.

PROPOSICION 12. $A^* \cap B^* = \phi$.

Procederemos por contradicción. Si existiera $p \in A^* \cap B^*$, existirían $a,b \in A$ y $c,d \in B$, tales que $[a,b] \cap \overline{B} = \phi$, $[c,d] \cap \overline{A} = \phi$ y $p \in [a,b] \cap [c,d]$.

Para que $[a,b]$ y $[c,d]$ tengan intersección no vacía se requiere que $c \in [a,b]$ o $a \in [c,d]$. En el primer caso, $B \cap A^* \neq \phi$ y en el segundo $A \cap B^* \neq \phi$, lo cual es contradictorio con la proposición 10.

PROPOSICION 13. $\overline{A^*} \subseteq A^* \cup \overline{A}$.

Supongamos que $p \notin A^* \cup \overline{A}$; entonces existe un intervalo abierto (s,t) que contiene a p y tal que $(s,t) \cap A = \phi$ (pues $p \notin \overline{A}$). Afirmamos que (s,t) no intersecta a A^*; si lo hiciese, existirían

$s, b \in A$ tales que $[s,b] \cap \overline{B} = \phi$ y $(s,t) \cap [a,b] \neq \phi$.Como (s,t) no intersecta a A y $a, b \in A$, entonces $(s,t) \cap (a,b) \neq \phi$ y por la misma razón ni a ni b puede estar en (s,t). La única posibilidad sería $a < s < t < b$ y como $p \in (s,t)$, entonces p estaría en (a,b),o sea, en A^*, lo cual contradice la hipótesis inicial.

Se concluye que $(s,t) \cap A^* = \phi$ y en consecuencia $p \notin \overline{A^*}$.

COROLARIO. Si A es cerrado, entonces A^* es cerrado En efecto, $\overline{A^*} \subseteq A^* \cup \overline{A} = A^* \cup A = A^*$.

PROPOSICION 14. $A^* \cap B^* = \phi = A^* \cap \overline{B^*}$, es decir, A^* y B^* también son separados.

Por la proposición 12, $\overline{A^*} \subseteq A^* \cup \overline{A}$. Luego,

$$\overline{A^*} \cap B^* \subseteq (A^* \cup \overline{A}) \cap B^* = (A^* \cap B^*) \cup (\overline{A} \cap B^*).$$

Pero estos dos últimos conjuntos son vacíos por las proposiciones 11 y 12, luego $\overline{A^*} \cap B^* = \phi$.

Si hubiésemos intercambiado los papeles de A y B, la proposición 13 habría sido $\overline{B^*} \subseteq B^* \cup \overline{B}$ y de aquí se hubiese obtenido similarmente $\overline{B^*} \cap A^* = \phi$.

Expresemos tanto a A^* como a B^* y a $(X - (A^* \cup B^*))$, como uniones de sus componentes convexas:

$$A^* = \bigcup_{i \in I} A_i \qquad B^* = \bigcup_{j \in J} B_j \qquad X - (A^* \cup B^*) = \bigcup_{k \in K} C_k$$

Si $p \in A_i$, estamos notando por A_i a la componente convexa de p relativa a A^*, o sea, a $C_p(A^*)$. Suponemos además que las "enumeraciones" de las componentes son biyectivas, es decir, que si $i \neq i'$,entonces $A_i \neq A_{i'}$, o sea $A_i \cap A_{i'} = \phi$. La colección formada por todas las componentes anteriores es una partición de X y puede a su ves ordenarse con un orden "cociente". Dadas dos componentes convexas M y N con $M \neq N$, tomemos $m \in M$ y $n \in N$; definimos:

$$M < N \text{ si y sólo si } m < n$$

Veamos que este orden entre componentes no depende de los elementos m y n elegidos.Sean $m' \in M$ y $n' \in N$; $m' \neq n'$ ya que $M \cap N = \phi$;es rutinario ver que si se tuviera $n' < m'$, entonces debido a la convexidad de M y N, siempre se llegaría a que $M \cap N \neq \phi$, sin importar la posición de m y n con respecto a m' y n', luego necesariamente $m' < n'$.

Sea $\hat{X}$ la colección de dichas componentes convexas dotada del orden total acabado de definir.

PROPOSICION 15. Sea A_i una componente convexa de A_i y sea S_i el conjunto de cotas superiores estrictas de A_i.Si $A_i \cap \overline{S_i} \neq \phi$,entonces A_i tiene un sucesor inmediato en $\hat{X}$, el cual

es una componente convexa C_k de $X-(A^* \cup B^*)$. DEMOSTRACION: Por la proposición 10, $A_i \cap \overline{S_i}$ es unitario.$A_i \cap \overline{S_i} = \{p\}$ y p es el último A_i. Como $p \in A_i \subseteq A^*$ y $A^* \cap \overline{B^*} = \phi$, entonces $p \in (X - \overline{B^*})$ y este último es abierto en X, de manera que existe (x,y) tal que $p \in (x,y) \subseteq (X - \overline{B^*})$.

Puesto que $p \in \overline{S_i}$, se tendrá $(x,y) \cap S_i \neq \phi$ y siendo p el último de A_i, necesariamente S_i intersecta al intervalo (x,y) en puntos de (p,y), es decir, $(p,y) \cap S_i \neq \phi$.

Claramente (p,y) no intersecta a B^* y $(p,y) \neq \phi$.

Tampoco puede (p,y) intersectar a una componente convexa de A^* distínta de A_i, puesto que si lo hiciese por ejemplo en p', entonces

$$[p,p'] \cap \overline{B} \subseteq [p,y) \cap \overline{B^*} \subseteq (x,y) \cap \overline{B^*} = \phi.$$

Se sigue que $[p,p'] \subseteq A^*$ y $A_i \cup [p,p']$ sería un subconjunto convexo de A^* más grande que A_i, lo cual es contradictorio.

Se concluye que $(p,y) \subseteq X-(A^* \cup B^*)$ y existe entonces una componente convexa C_k de $X-(A^* \cup B^*)$ que contiene al convexo (p,y). Necesariamente C_k será el siguiente de A_i en $\hat{X}$; notémoslo C_{i+}.

Simétricamente, si L_i es el conjunto de cotas inferiores estrictas de A_i y $\overline{L_i} \cap A_i \neq \phi$, entonces A_i tiene un predecesor inmediato en $\tilde{X}$, el cual también es una componente convexa de $X-(A^* \cup B^*)$ y lo denotaremos por C_{i-}.

Si intercambiamos los papeles de A^* y B^*, obtenemos los mismos resultados para las componentes convexas de B^*. En este momento estamos en poder de las herramientas necesarias para demostrar la normalidad completa del espacio ordenado.

PROPOSICION 16. Todo espacio topológico ordenado (sin extremos) es completamente normal. Es decir, dados A, B tales que $\overline{A} \cap B = \phi = A \cap \overline{B}$, existen abiertos disyuntos V y W tales que $V \supseteq A$ y $W \supseteq B$.

DEMOSTRACION: Suponemos A^* y B^* definidos como antes y tanto ellos dos como el complemento de su unión, expresados como uniones de sus componentes convexas:

$$A^* = \bigcup_{i \in I} A_i; \qquad B^* = \bigcup_{j \in J} B_j; \qquad X-(A^* \cup B^*) = \bigcup_{k \in K} C_k.$$

Elijamos en cada C_k un elemento c_k y mantengámoslo fijo en adelante.

Para cada componente convexa A_i de A^*, sea S_i su conjunto de cotas superiores estrictas y L_i su conjunto de cotas inferiores estrictas.

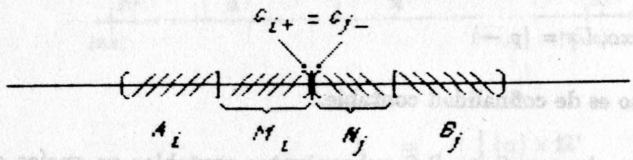
Si $A_i \cap \overline{S}_i \neq \phi$, por la proposición 10 se sabe que $A_i \cap \overline{S}_i = \{p_i\}$ y p_i es el último elemento de A_i.Por la proposición 15, A_i tiene un sucesor inmediato en $\hat{X}$, notado C_{i+}, el cual es una componente convexa de $X - (A^* \cup B^*)$. Sea c_{i+} el elemento fijo que hemos elegido de antemano en C_{i+} y definimos $M_i = [p_i, c_{i+}]$. Así $A_i \cup M_i$ es "abierto a la derecha".

Si $A_i \cap \overline{S}_i = \phi$, entonces A_i ya es "abierto a la derecha", puesto que para cualquier $p \in A_i$, $U_p = \{x \in A_i \mid p < x\}$ es abierto, en virtud de la proposición 9. En este caso definimos $M_i = \phi$.

Simétricamente, si $A_i \cap I_i = \{q_i\}$, q_i es el primero de A_i (Proposición 10) y A_i posee un predecesor inmediato C_{i-} en $\hat{X}$, el cual también es una componente convexa de $X - (A^* \cup B^*)$.Si c_{i-} es elemento fijo elegido en C_{i-}, definimos $N_i = (c_{i-}, q_i]$. En esta forma, $N_i \cup A_i$ es "abierto a la izquierda". Si $I_i \cap A_i = \phi$, entonces A_i ya es "abierto a la izquierda" y en tal caso definimos $N_i = \phi$.

Sea cual fuere el caso, $N_i \cup A_i \cup M_i$ es un conjunto convexo, abierto que contiene a A_i y no intersecta a B^*.

A continuación se procede de manera completamente análoga con cada una de las componentes convexas B_j de B^*, usando la definición de N_j y M_j los mismos c_k fijados de antemano.



En esta forma cada conjunto convexo abierto $N_j \cup B_j \cup M_j$ resulta disyunto de todos los $N_i \cup A_i \cup M_i$, de manera que

$$V = \bigcup_{i \in I} (N_i \cup A_i \cup M_i) \qquad \text{y} \qquad W = \bigcup (N_j \cup B_j \cup M_j)$$

son dos abiertos disyuntos que separan a A^* de B^* y por consiguiente a A de B, quedando demostrado.

IV. CONVEXIDAD EN ESPACIOS SUPERDENSOS.

Recordemos (Ver [3]) que un espacio superdenso es un espacio topológico ordenado $(X, T_<)$ en el cual para todo par de subconjuntos contables A, B de X, no simultáneamente vacíos, con $A < B$ (todo elemento de A menor que todo elemento de B), existe c en X tal que $A < \{c\} < B$. Decimos que un subconjunto M de X es de cofinalidad contable, si existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de M tal que para todo x de M existe un elemento a_n de la sucesión con $x \leq a_n$.

Tratemos en lo que sigue de clasificar los subconjuntos convexos abiertos de un espacio superdenso X, utilizando técnicas similares a las empleadas en el caso de los números reales no estandar (Ver [5]).

Sea A un subconjunto convexo abierto no vacío de un espacio superdenso X. Tomemos $p \in A$, deejémoslo fijo y definamos como antes,

$$U_p = \{x \in A \mid p < x\} \qquad \text{y} \qquad L_p = \{x \in A \mid x < p\}$$

Así $A = L_p \cup \{p\} \cup U_p$ y tanto L_p como U_p son convexos abiertos. Basta analizar la estructura de U_p, ya que con L_p se procede de manera completamente simétrica.

Caso 1. U_p no es acotado.

Claramente por ser convexo, $U_p = (p, \rightarrow)$

Caso 2. U_p es acotado y no es de cofinalidad contable.

Afirmamos que U_p es superdenso. Sean P, Q subconjuntos contables no vacíos de U_p, con $P < Q$. Debido a la superdensidad de X,existe un elemento c en X tal que $P < \{c\} < Q$ y, por la convexidad de U_p, necesariamente $c \in U_p$.

Sea Q un subconjunto contable de U_p. Se tiene que $\{p\} < Q$; por la superdensidad de X, existe $c \in X$ tal que $\{p\} < \{c\} < Q$ y por la convexidad de $\{p\} \cup U_p$ se concluye que c está en U_p.

Sea $P \subseteq U_p$, P contable, numerando biyectivamente así: $P = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ .Como U_p no es de cofinalidad contable, existe x en U_p con $a_n < x$ para todo n, es decir, $P < \{x\}$, con lo cual termina la comprobación de superdensidad de U_p.

Caso 3. U_p es acotado y de cofinalidad contable.

Existe entonces una sucesión estrictamente creciente $(a_n)_{n \in N}$ de puntos de U_p tal que $(\forall x \in U_p)(\exists n)(x \leq a_n)$. Es claro que $U_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (p, a_n)$.

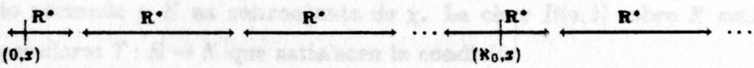
Los tres casos anteriores cubren todas las posibilidades para U_p, existiendo otras tres completamente simétricas para L_p. Las combinaciones dos a dos producen los seis casos posibles para A.

A pesar de la sencillez de la clasificación anterior, no es posible en el caso general establecer isomorfismos con subconjuntos arco-convexos bien conocidos de $\mathbf{R}^*$. La mayor dificultad está en que en general, ni siquiera dos intevalos abiertos distintos de un mismo espacio denso son orden-isomorfos. Si $(X,<)$ es de cardinal $\aleph_1$,él es orden-isomorfo a todos sus subintervalos abiertos (ver [1]), pero si el cardinal es mayor, no puede asegurarse tal cosa, como lo muestran los dos ejemplos siguientes:

Sea $\delta = 2^c$ visto como número ordinal, es decir, δ es el conjunto de todos los números ordinales menores que 2^c, bien ordenado con el orden usual de número ordinal.Sea $X = \delta \times \mathbf{R}^*$ ordenado en la siguiente forma:

$$(\alpha,x) < (\beta,y) \quad \leftrightarrow \quad (\alpha < \beta \vee (\alpha = \beta \wedge x < y))$$

Así $(X,<)$ es equivalente a tomar 2^c copias disyuntas de los reales no estandar $\mathbf{R}^*$, dispuestas en el mismo orden en que se hallan los ordinales menores que 2^c.



$$X = \bigcup_{\alpha<2^c} \{\alpha\} \times \mathbf{R}^*$$

Es fácil comprobar que $(X,<)$ es superdenso. Ahora es claro que el cardinal de X es 2^c. Luego no es posible que $\{0\} \times \mathbf{R}^*$ (orden-isomorfo a $\mathbf{R}^*$ y superdenso) sea orden-isomorfo a $(X,<)$, y menos aún será éste orden-isomorfo con el intervalo $((0,1),(0,2))$ de X, el cual es orden-isomorfo con $(1,2)^* \subseteq \mathbf{R}^*$.

Análogamente si $\sigma = 2^{(2^c)}$ considerado como número ordinal y

$$Y = \sigma \times \mathbf{R}^* = \bigcup_{\alpha<2^{(2^c)}} \{\alpha\} \times \mathbf{R}^*$$

se ordena de manera similar a X, entonces $2^c \in \sigma$ y $((0,1),(2^c,1)) = I$ es un intervalo de $(Y,<)$ que no es orden-isomorfo a $((0,1),(0,2))$ ni a ningún otro intervalo $((\alpha,x),(\beta,y))$ con $\alpha,\beta \leq c$, ya que este último intervalo tiene cardinal c, mientras que I posee cardinal 2^c.

BIBLIOGRAFIA

[1] MUÑOZ Q, JOSE M. "Uso del vaivén en la obtención de isomorfismos entre conjuntos densos y superdensos". Boletín de Mat., Vol XIX, No. 3, 1985. [2] MUÑOZ Q., J. M., MANTILLA. IGNACIO. "La estructura de grupo topológico de R^*". Boletín de Mat., Vol XXI, No. 1 ,1987.

[3] MUÑOZ Q., J. M., CHAUX, ALBA L. "Topología del orden de conjuntos superdensos". Boletín de Mat., Vol XXII. No. 1, 1988.

[4] STEEN, L., SEEBACH, J.A. "Counterexamples in Topology". Holt, Rinehart and Winston,New York, 1970.

[5] TAKEUCHI, YU. "Conjuntos arco-conexos". Apuntes del Seminario del Proyecto de investigación "Métodos analíticos del Análisis no estandar", Univ. Nal. de Col., 1986.