Boletín de Matemáticas
Vol. VIII, pp. 1-20

ALGEBRAS DE BANACH-LA TEORIA DE GELFAND (*)

JANUARIO VARELA

En la presente exposición se tratará la teoría de Gelfand para álgebras de Banach conmutativas; como caso particular se considerarán las C^*-álgebras y se establece la célebre dualidad entre la categoría de los espacios compactos y la categoría de las C^*-álgebras conmutativas con elemento unidad.

La teoría de las álgebras de Banach es más o menos reciente; a su período de gestación están vinculados los nombres de A.D. Michal, R. S. Martin, M. Nagumo, K. Yosida, J. von Neumann, N. Wiener, M. H. Stone y otros.

El nacimiento de la teoría se localiza en 1941 con la aparición del famoso artículo de I. M. Gelfand Normierte Ringe donde se empieza a hacer uso sistemático de la teoría elemental de ideales en el estudio de estas álgebras.

El autor desea agradecer al Dr. Alonso Takahashi, Director del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia, su invitación para participar en el IV Coloquio Colombiano de Matemáticas.

1. **Definición.** Un *álgebra normada* A es un álgebra sobre C provista de una

(*) Este artículo es el texto de la conferencia dictada por el autor en el IV Coloquio Colombiano de Matemáticas. N. del E.

norma tal que

1) $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ para todo $x \in A$, $y \in A$

2) Si A tiene elemento unidad, entonces $\|1\| = 1$

Si además A es completo, es decir si toda sucesión de Cauchy de elementos de A es convergente en A, entonces A se llama *álgebra de Banach*.

2. ***Ejemplos.*** 1) El ejemplo más sencillo de *álgebra de Banach* con elemento unidad es $A = C$, el álgebra de los números complejos con las operaciones y la norma acostumbradas.

2) Sean T un espacio compacto (separado) y $A = C(T)$ el álgebra de todas las funciones continuas de T en C. Las operaciones se definen puntual — mente y la norma está dada por

$$\|f\| = sup\{\,|f(t)| \mid t \in T\,\}$$

para todo $f \in C(T)$.

Sean H un espacio de Hilbert y $\mathcal{L}(H)$ el espacio de todos los operadores lineales acotados sobre H, como multiplicación se toma la composición y como norma

$$\|a\| = sup\,\{\,\|a(v)\| \mid \|v\| \leq 1\,\}$$

3. Sean A un álgebra de Banach con elemento unidad y $a \in A$.

Si a tiene inverso en A, esto es si existe $b \in A$ tal que $ab = ba = 1$, se dice que a es *regular* en caso contrario a es *singular*.

De la completez de A se deduce que si $x \in A$ y $\|x\| < 1$, entonces la serie $1 + x + x^2 + \cdots$ es convergente en A y su suma es $(1-x)^{-1}$. En particular si $a \in A$ es tal que $\|1-a\| < 1$ entonces a es regular.

Si se designa por G el grupo multiplicativo de los elementos regulares de A, entonces la aplicación

$$x \longmapsto x^{-1} : G \longrightarrow G$$

es continua; en efecto,

$$\| x^{-1} - a^{-1} \| = \| x^{-1} (a - x)\, a^{-1} \| \leq \| x^{-1} \| \, \| a - x \| \, \| a^{-1} \| ,$$

además $x = a - b = a\,(1 - a^{-1} b)$ donde $b = a - x$, así que si $\| b \| < \| a^{-1} \|^{-1}$ entonces $x^{-1} = (1 - a^{-1} b)^{-1} a^{-1}$, la existencia de $(1 - a^{-1} b)^{-1}$ está asegurada por $\| b \| < \| a^{-1} \|^{-1}$, más aún $\| x^{-1} \| \leq (1 - \| a^{-1} b \|)^{-1} \| a^{-1} \| \leq (1 - \| a^{-1} \| \, \| b \|)^{-1} \| a^{-1} \|$. Con esto queda establecido que $\| x^{-1} - a^{-1} \|$ es arbitrariamente pequeño cuando $\| x - a \|$ es suficientemente pequeño.

El grupo G de los elementos regulares de A es abierto, porque si $a \in G$ y $b \in A$ es tal que $\| b \| \leq \| a^{-1} \|^{-1}$, entonces $(1 - a^{-1} b)^{-1}$ existe y $(a - b)^{-1} = (1 - a^{-1} b)\, a^{-1}$.

4. Sean A un álgebra sobre C con elemento unidad y $x \in A$. Se llama *espectro* de x y se nota $Sp\,x$ el conjunto de todos los números complejos λ tales que $x - \lambda 1$ es singular en A. Si A es un álgebra de Banach para $\lambda \in Sp\,x$ se tiene $| \lambda | \leq \| x \|$, pues en caso contrario $\| \frac{x}{\lambda} \| < 1$ lo cual aseguraría que $x - \lambda 1 = - \lambda\, (1 - \frac{x}{\lambda})$ es regular contrariamente a la hipótesis .

5. Sean A un álgebra sobre C con elemento unidad, entonces $Sp\, x^n = (Sp\, x)^n$ para todo $x \in A$, en efecto, dado un número complejo se consideran sus n raíces enésimas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces

$$x^n - \lambda 1 = (x - \lambda_1 1)\,(x - \lambda_2 1) \ldots (x - \lambda_n 1) .$$

De manera que $x^n - \lambda 1$ es singular si y sólo si $x - \lambda_i 1$ es singular para algún i, de donde resulta la identidad propuesta.

Más generalmente se tiene $Sp\, p(x) = p(Sp\, x)$ para todo polinomio p con coeficientes complejos, es decir μ pertenece $Sp\, p(x)$ si y sólo si μ es de la forma $\mu = p(\lambda)$ para algún $\lambda \in Sp\, x$.

En efecto, sea $\lambda \in Sp\, x$. Consideremos el siguiente polinomio q en la indeterminada t, $q(t) = p(t) - p(\lambda)$.

Como $q(\lambda) = 0$, entonces q es de la forma $q(t) = \alpha\,(t-\lambda)\,(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_n)$ donde $\alpha, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in C$.

Por hipótesis $x - \lambda 1$ es singular, por consiguiente $q(x) = \alpha\,(x-\lambda 1)\,(x-\lambda_1 1)\ldots(x-\lambda_n 1) = p(x) - p(\lambda)\,1$ es singular, es decir, $p(\lambda) \in Sp\, p(x)$.

Recíprocamente, sea $\mu \in Sp\,(p(x))$. Consideremos el polinomio $q(t) = p(t) - \mu$ en la indeterminada t y denotemos por $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ sus raices, entonces $p(x) - \mu = q(x) = \beta\,(x - \zeta_1 1)\ldots(x-\zeta_m 1)$ para algún $\beta \in C$ y por consiguiente existe λ_i, $1 \leq i \leq m$, tal que $x - \zeta_i 1$ es singular, esto es, μ es de la forma $\mu = p(\zeta_i)$ con $\zeta_i \in Sp\, x$.

Ejercicio. Si $\lambda \in Sp(xy)$ y $\lambda \neq 0$ entonces $\lambda \in Sp(yx)$.

6. Sean A un álgebra sobre C con elemento unidad y $x \in A$. Se define el *radio espectral* $r(x)$ de x mediante la fórmula

$$r(x) = sup \{ |\lambda| \mid \lambda \in Sp\, x \}$$

En virtud de 4, si A es un álgebra de Banach, $r(x) \leq ||x||$ para todo $x \in A$.

7. **Teorema**. *Para todo elemento x de un álgebra de Banach con elemento unidad se tiene*

i) $Sp\ x$ *es un subconjunto compacto y no vacío del plano*

ii) $\lim_{n\to o} \| x^n \|^{1/n} = r(x)$

Demostración. i) $Sp\ x$ es compacto debido a que está acotado por $\|x\|$ y es cerrado pues el conjunto de los elementos regulares es abierto en A.

Ahora supongamos que $Sp\ x$ fuera vacío, en este caso $x - \lambda 1$ sería regular para todo $\lambda \in C$.

Sea l una forma lineal acotada sobre A, se define

$$f(\lambda) = l((x - \lambda 1)^{-1})$$

Esta es una función compleja de variable compleja analítica en todo punto del plano.

Para ver que f es analítica se verifica que $\frac{df}{d\lambda} = l((x - \lambda 1)^{-2})$ haciendo uso de la continuidad de $x \to x^{-1} : G \to G$. Además $\lim_{|\lambda| \to \infty} f(\lambda) = 0$, así que por el teorema de Liouville f es idénticamente igual a 0. En particular $0 = f(0) = l(x^{-1})$. Esto es absurdo puesto que existe una forma lineal acotada l sobre A tal que $l(x^{-1}) \neq 0$. Por consiguiente $Sp\ x$ es nó vacío.

ii) Supongamos que $\lambda \in Sp\ x$. Entonces $\lambda^n \in Sp\ x^n$ y por lo tanto $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$ Esto demuestra que $r(x) \leq \lim\inf \|x^n\|^{1/n}$. Falta por demostrar que

$$r(x) \geq \lim\sup \|x^n\|^{1/n}.$$

Para cada forma lineal acotada l sobre A definamos de nuevo

$$f(\lambda) = l((x - \lambda 1)^{-1})$$

esta función es analítica en $C \setminus Sp\ x$. Por otra parte si $|\lambda| > \|x\|$, esto es, si $\|\frac{x}{\lambda}\| < 1$, entonces

$$(x-\lambda 1)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \text{ , de donde } f(\lambda) = -\frac{l(1)}{\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(x^n)}{\lambda^{n+1}}$$

Pero $\{\lambda \mid |\lambda| > r(x)\} \subset C \setminus Sp\, x$; por consiguiente la serie que representa a $f(\lambda)$ para $|\lambda| > \|x\|$ también la representa para $|\lambda| > r(x)$. En particular la sucesión $\{\frac{l(x^n)}{\lambda^{n+1}}\}$ es acotada para cualquier l que se haya tomado. Por el teorema de Banach Steinhaus se deduce que la sucesión $\{\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\}$ es también acotada para todo λ tal que $|\lambda| > r(x)$. Se ha demostrado que si $|\lambda| > r(x)$, entonces existe una constante K tal que $\|x^n\| \leq K\lambda^{n+1}$, para todo n. Se concluye que $\lim\sup \|x^n\|^{1/n} \leq r(x)$. Por lo tanto $r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$.

8. ***Teorema*** (Gelfand-Mazur). *Sea A un álgebra de Banach con elemento unidad. Si todo elemento x de A diferente de cero es regular, entonces A es isométricamente isomorfa al álgebra C de los números complejos.*

Demostración. Dado $a \in A$, por el teorema 7, $Sp\, a \neq \phi$, esto es, existe $\lambda \in C$ tal que $a - \lambda 1$ es singular, entonces $a - \lambda 1 = 0$, por lo tanto la aplicación $a \to \lambda : A \to C$ establece el isomorfismo requerido.

9. Sea A un álgebra sobre C. Se dice que $I \subset A$ es un *ideal bilátero* de A, o simplemente un *ideal* de A, si I es un subespacio vectorial de A y además para todo $a \in A$ y $b \in I$ se tiene $ab \in I$ y $ba \in I$. Un ideal se llama *propio* si $I \neq A$. Si A tiene elemento unidad, I es propio si y sólo si $1 \notin I$.

Salvo que se diga explícitamente lo contrario todo ideal se supondrá propio.

Por *ideal máximal* de A se entiende un ideal $\mathfrak{M}$ de A que no está contenido en ningún ideal distinto de si mismo.

Si A tiene elemento unidad, todo ideal I de A está contenido en un ideal maximal. Para demostrar esto, designemos por $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los ideales de A que contienen a I. El conjunto $\mathcal{F}$ ordenado por inclusión es inductivo, ya que toda unión de ideales propios resulta ser un ideal propio por no contener a 1. El lema de Zorn nos permite concluir que existe un ideal maximal que contiene a I.

Si A es conmutativa y $x \in A$ no pertenece a ningún ideal maximal de A entonces x regular, en efecto $xA = A$ pues de otra manera $I = xA$ contiene a x y está contenido un ideal maximal de A lo cual es absurdo.

10. Sean A un álgebra de Banach con elemento unidad y $\mathfrak{M}$ un ideal maximal de A, entonces $\mathfrak{M}$ es cerrado, en efecto, la adherencia de $\mathfrak{M}$ es claramente un ideal y es distinto de A pues en caso contrario 1 es adherente a $\mathfrak{M}$, lo cual implica que existe x en $\mathfrak{M}$ tal que $\| 1-x \| < 1$, esto es imposible pues x sería regular y en consecuencia $\mathfrak{M}$ sería igual a A.

De lo anterior se deduce que la adherencia de cualquier ideal propio de A sigue siendo un ideal propio de A.

11. Dado un ideal cerrado I de un álgebra normada A el cociente A/I está provisto de una estructura de espacio normado para la norma

$$\| x + I \| = inf \{ \| x + y \| \mid y \in I \}$$

Es un hecho bien conocido en Análisis Funcional que si A es completo entonces A/I también es completo. Por otra parte es de verificación inmediata que

$$\| xy + I \| \leq \| x + I \| \| y + I \|.$$

para todo $x, y \in A$. Es decir, A/I resulta ser un álgebra normada.

Si A tiene elemento unidad, entonces $\|1+I\| = 1$, pues claramente $\|1+I\| \leq 1$ y si se tuviera $\|1+I\| < 1$, existiría $x \in I$ tal que $\|1+x\| < 1$ con lo cual $x \in I$ sería regular lo cual es imposible.

12. Sea A un álgebra de Banach con elemento unidad. Se llama *carácter* de A toda forma lineal τ sobre A tal que para todo $x, y \in A$, $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$.

El conjunto de todos los caracteres de A se llama *espectro* de A y se denota por $Spec\ A$.

Es claro que $\tau(1) = 1$ para todo $\tau \in Spec\ A$. Dado $x \in A$ y $\tau \in Spec\ A$, se tiene $\tau(x) \in Sp\ x$ ya que $x - \tau(x)\,1 \in ker\ \tau$ es singular, pues de otra manera $ker\ \tau = A$. En particular $|\tau(x)| \leq \|x\|$ para todo $x \in A$, por lo tanto τ resulta continuo y

$$\|\tau\| = sup\ \{\ |\tau(x)| \quad | \quad \|x\| \leq 1\ \} = 1$$

Recíprocamente si A es conmutativa, todo $\lambda \in Sp\ x$ es de la forma $\lambda = \tau(x)$ para algún $\tau \in Spec\ A$, porque si $\mathfrak{M}$ es un ideal maximal de A que contiene al ideal $(x - \lambda 1)A \neq A$, designando por φ la aplicación canónica de A sobre $A/\mathfrak{M}$ y C, entonces $\tau = j \circ \varphi$ es un carácter de A y claramente $\tau(x) = \lambda$.

Todo núcleo de un carácter τ es un ideal maximal ya que $A/ker\ \tau$ es isomorfo a C y recíprocamente si A es conmutativa $A/\mathfrak{M}$ es isomorfo a C y por lo tanto $\mathfrak{M}$ es el núcleo de un carácter de A.

13. De aquí en adelante se supone que A es un álgebra de Banach conmutativa con elemento unidad, a menos que se diga lo contrario. Sea $T = Spec\ A$ y definamos la siguiente aplicación.

$$\hat{}: A \longrightarrow C^T$$

$$a \longmapsto \hat{a} = (\tau(a))_{\tau \in T}$$

Si consideramos C^T provista de su estructura de álgebra producto, la aplicación $\hat{}$ es un homomorfismo de álgebras cuyo núcleo es la intersección de todos los ideales maximales de A. Nos proponemos ahora caracterizar la imagen $\hat{A} \subset C^T$ de A por esta aplicación.

El conjunto $T = Spec\ A$ se dota de la topología menos fina para la cual la función

$$\hat{a} : T \longrightarrow C$$

$$\tau \longmapsto \hat{a}(\tau) = \tau(a)$$

es continua, cualquiera que sea $a \in A$. Con esta topología una vecindad fundamental de $\tau_o \in T$ es intersección finita de conjuntos de la forma

$$\{ \tau \in T \quad | \quad | \tau(a) - \tau_o(a) | < \varepsilon \}.$$

para algún $a \in A$ y $\varepsilon > 0$.

Dicha topología sobre T es la inducida por la topología débil del dual. Consideremos la aplicación

$$\psi : T \longrightarrow \prod_{x \in A} S_x$$

$$\tau \longmapsto (\tau(x))_{x \in A}$$

donde $S_x = \{ \lambda \in C \quad | \quad |\lambda| \leq \|x\| \}$.

Si sobre $\prod_{x \in A} S_x$ se toma la topología producto, entonces la aplicación ψ es un homeomorfismo de T sobre $\psi(T)$. Por otra parte, $\psi(T)$ es un subconjunto cerrado de $\prod_{x \in A} S_x$, en efecto, si ρ es adherente a $\psi(T)$, entonces dados $\varepsilon > 0$, $x, y \in A$, existe un elemento $\tau \in \psi(T)$ tal que

$$|\rho(x) - \tau(x)| < \varepsilon, \ |\rho(y) - \tau(y)| < \varepsilon, \ |\rho(xy) - \tau(xy)| < \varepsilon,$$

pero como $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$, entonces

$$\rho(xy) - \rho(x)\rho(y)| < \varepsilon(1 + \|x\| + \|y\|),$$

para todo $\varepsilon > 0$, por lo tanto $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$. De manera semejante se concluye que $\rho(x+y) = \rho(x) + \rho(y)$, $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$ y $\rho(1) = 1$ para todo $x, y \in A$ y $\lambda \in C$. Por consiguiente, $\psi(T)$ es cerrado en $\prod S_x$, pero $\prod S_x$ es compacto por el Teorema Tychonoff, así que $\psi(T)$ y su copia homeomorfa T son también espacios compactos.

Podemos ahora enunciar el siguiente

14. **Teorema** (Gelfand). *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con elemento unidad. La aplicación $a \to \hat{a} : A \to \hat{A} \subset C(T)$ es un homomorfismo continuo del álgebra A sobre un álgebra $\hat{A}$ de funciones complejas continuas sobre el espacio compacto $T = Spec\ A$.*

Demostración. La aplicación $a \to \hat{a}$, llamada también *morfismo de Gelfand*, es continua ya que

$$\begin{aligned}
\|\hat{a}\| &= \sup\{|\hat{a}(\tau)| \ \ | \tau \in Spec\ A\} \\
&= \sup\{|\tau(a)| \ \ | \tau \in Spec\ A\} \\
&= \sup\{|\lambda| \ \ | \lambda \in Spec\ A\} \\
&\leq \|a\|.
\end{aligned}$$

Los restantes aspectos de este teorema fueron ya considerados en 13.

15. Sean T un espacio compacto y $C(T)$ el álgebra de todas las funciones continuas complejas definidas es T. Para cada $t \in T$, $\mathfrak{M}_t = \{ f \in C(T) \mid f(t) = 0 \}$ es un ideal maximal de $C(T)$, debido a que el núcleo del carácter $f \to f(t)$ es precisamente $\mathfrak{M}_t$.

Recíprocamente, todo ideal maximal $\mathfrak{M}$ de $C(T)$ es de la forma $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_t$ para algún $t \in T$. En efecto, supóngase lo contrario. Entonces para cada $t \in T$ existe $f_t \in \mathfrak{M}$ tal que $f_t(t) \neq 0$. Sea V_t una vecindad de t tal que $f_t(s) \neq 0$ para todo $s \in V_t$.

La familia $\{ V_t \mid t \in T \}$ forma un recubrimiento abierto del espacio compacto T. Existe entonces un sobrecubrimiento finito $V_1, V_2, \ldots, V_n$ de T. Sea $f = f_1 \bar{f}_1 + f_2 \bar{f}_2 + \cdots + f_n \bar{f}_n$; esta función pertenece a $\mathfrak{M}$ y es invertible ya que $f(t) > 0$ para todo $t \in T$, lo cual es absurdo.

Por consiguiente, existe $t \in T$ tal que $\mathfrak{M} = \{ f \in C(T) \mid f(t) = 0 \}$. De lo anterior se deduce que para cada $\tau \in Spec\ C(T)$ existe $t \in T$ (único), tal que $\tau(f) = f(t)$ para todo $f \in C(T)$. Para ver esto basta factorizar τ a través de $A / ker\, \tau$ haciendo uso del hecho que $ker\, \tau = \mathfrak{M}_t$ para algún $t \in T$.

Entonces la aplicación

$$
\begin{aligned}
e : T &\longrightarrow Spec\ C(T) \\
t &\longmapsto \tau
\end{aligned}
$$

donde $\tau(f) = f(t)$ para todo $f \in C(T)$, es una biyección.

Además, para todo $f \in C(T)$, $\hat{f} \circ e = f$. Esto garantiza la continuidad de

e en virtud de que la topología de $Spec\ C(T)$ es la menos fina que hace todas las $\hat{f}$ continuas. Usando la compacidad de T se concluye que e es un homeomorfismo de T sobre $Spec\ C(T)$.

16. Dada un álgebra A sobre C se llama *involución* de A una aplicación de $x \to x^*$ de A en A tal que para todo $x \in A$, $y \in A$, $\lambda \in C$ se cumple

(i) $(x^*)^* = x$

(ii) $(x+y)^* = x^* + y^*$

(iii) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}\, x^*$

(iv) $(xy)^* = y^* x^*$

Obsérvese que si A tiene elemento unidad, entonces $1^* = 1$, ya que $x 1^* = (1 x^*)^* = x^{**} = x$ para todo $x \in A$.

Un álgebra de Banach provista de una involución se llama *álgebra de Banach involutiva*. Si además, para todo $x \in A$, $\|x^* x\| = \|x\|^2$, A recibe el nombre de *C^*-álgebra*.

Si T es un espacio compacto, el álgebra $C(T)$ es una C^*-álgebra, cuya involución viene dada por $f^*(t) = \overline{f(t)}$. Si A es una C^*-álgebra, entonces para todo $x \in A$, se tiene $\|x^*\| = \|x\|$, en efecto, $\|x^*\|\,\|x\| \geq \|x^* x\| = \|x\|^2$, por lo tanto $\|x^*\| \geq \|x\|$. de igual manera $\|x\| = \|x^{**}\| \geq \|x^*\|$.

En razón de que $(x - \lambda 1)^* = x^* - \bar{\lambda} 1$ para todo $\lambda \in C$, se deduce

$$Sp\, x^* = \overline{Sp\, x}$$

17. Un elemento x de un álgebra con involución se llama *hermitiano* o *autoadjunto* si $x = x^*$, se dice *normal* si $x x^* = x^* x$ y si se dice *unitario* si $x^{-1} = x^*$.

Todo elemento x de A se puede escribir de manera única en la forma $x = x_1 + i x_2$ donde x_1 y x_2 son hermitianos. En efecto, definiendo

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*) \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*),$$

se tiene que x_1 y x_2 son hermitianos y $x = x_1 + i x_2$.

Recíprocamente si $x = x_1 + i x_2$ donde x_1 y x_2 son hermitianos, entonces $x^* = x_1 - i x_2$, de donde $x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*)$ y $x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*)$.

18. ***Proposición.*** Si A es una C^*-álgebra y $x \in A$ es normal, entonces

$$\|x\| = \lim \|x^n\|^{1/n}$$

Demostración. Obsérvese que para todo $a \in A$, $b = a^* a$ satisface la relación $\|b^2\| = \|b\|^2$, por ser b un elemento hermitiano de A. Para x normal se tiene,

$\|x\|^4 = \|x^* x\|^2 = \|(x^* x)^2\| = \|(x^2)^* x^2\| = \|x^2\|^2$, por lo tanto $\|x\|^2 = \|x^2\|$.

Por inducción se demuestra que $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$, para todo entero positivo n.

Por consiguiente, $\lim\limits_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} = \|x\|$.

Corolario. Si A es una C^*-álgebra conmutativa con elemento unidad, entonces $\|x\| = r(x)$ para todo $x \in A$.

En efecto, todo elemento de A es normal y en virtud de 7, $r(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n}$.

19. ***Proposición.*** Si x es un elemento hermitiano de una C^*-álgebra entonces $Spec\ x \subset \mathbb{R}$.

Demostración (Arens). Sean $u + iv \in Sp\ x$ y k un número real cualquiera.

Considérese $y = x + ik1$, entonces

$$\lambda = u + i(v + k) \in Sp\, y \qquad \text{y}$$

$$\bar{\lambda} = u - i(v + k) \in Sp\, y^*.$$

Entonces $\lambda\bar{\lambda} = |\lambda\bar{\lambda}| = |\lambda|\,|\bar{\lambda}| \leq \|y\|\,\|y^*\| = \|y\|^2 = \|yy^*\|$. Por lo tanto,

$$u^2 + v^2 + k^2 + 2kv \leq \|x^2 + v^2\| \leq \|x^2\| + k^2,$$

es decir, $u^2 + v^2 + 2kv \leq \|x^2\|$ para todo número real k, lo cual es absurdo si $v \neq 0$.

Nota 1. Sea A una C^*-álgebra con elemento unidad y $\tau \in Spec\, A$, entonces $\tau(x^*) = \overline{\tau(x)}$ para todo $x \in A$; esto se ve fácilmente escribiendo $x = x_1 + ix_2$ con x_1, x_2 hermitianos.

Nota 2. Si u es un elemento unitario de una C^*-álgebra con elemento unidad, entonces $|\lambda| = 1$ para todo $\lambda \in Sp\, u$. En efecto, $\|u\| = 1$ ya que $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\| = 1$, así que $r(u) \leq 1$ y $r(u^{-1}) \leq 1$, por lo tanto $Sp\, u$ y $Sp\, u^{-1} = (Sp\, u)^{-1}$ están contenidas en el disco unidad de C. Se concluye que $|\lambda| = 1$ para todo $\lambda \in Sp\, u$.

20. Teorema (Gelfand - Naimark). *Si A es una C^*-álgebra con elemento unidad el morfismo de Gelfand $x \to \hat{x}: A \to C(Spec\, A)$ es un isomorfismo isométrico entre A y $C(Spec\, A)$.*

Demostración. Para todo $x \in A$.

$$\|\hat{x}\| = \sup\{|\tau(x)| \mid \tau \in Spec\, A\} = r(x) = \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} = \|x\|.$$

Por otra parte, las funciones $\hat{x}$ separan los puntos de $T = Spec\, A$, pues si

$\tau_1 \neq \tau_2$ existe $a \in A$ tal que $\tau_1(a) \neq \tau_2(a)$. Para todo $\lambda \in C$, $(\lambda 1)\hat{}\ (\tau) = \tau(\lambda 1) = \lambda \tau(1) = \lambda$, es decir, las funciones constantes pertenecen a la imagen $\hat{A}$ de A por el morfismo de Gelfand. Finalmente

$$\overline{\hat{a}(\tau)} = \overline{\tau(a)} = \tau(a^*) = (a^*)\hat{}\ (\tau),$$

dicho de otra manera, $\bar{\hat{a}} \in \hat{A}$ para todo $\hat{a} \in \hat{A}$.

Por medio del teorema de Stone-Weierstrass se concluye que $\hat{A} = C(Spec\ A)$.

21. ***Proposición.*** Sean A y B dos C^*-álgebras y f un homomorfismo de álgebras tal que $f(1) = 1$ y $f(x^*) = f(x)^*$ para todo $x \in A$. Entonces

$$\| f(x) \| \leq \| x \|$$

para cada $x \in A$.

Demostración. Es claro que para todo $x \in A$, $Sp\, f(x) \subset Sp\, x$, de donde $r(f(x)) \leq r(x) \leq \|x\|$. Usando 18 se tiene que

$$\| f(x) \|^2 = \| f(x^* x) \| = r(f(x^* x)) \leq \| x^* x \| = \| x \|^2$$

22. Se denota por $\mathfrak{A}$ la categoría de las C^*-álgebras conmutativas con elementos unidad. Los morfismos son homomorfismos de álgebra $f: A \to B$ tales que $f(1) = 1$ y $f(x^*) = f(x)^*$ para todo $x \in A$.

Se denota por $\mathcal{C}$ la categoría de los espacios compactos, los morfismos son las aplicaciones continuas entre tales espacios. $Spec: \mathfrak{A} \to \mathcal{C}$, es un funtor contravariante que un álgebra $A \in \mathfrak{A}$ le hace corresponder su espectro $Spec\ A \in \mathcal{C}$ y a cada morfismo de $\mathfrak{A}$, $f: A \to B$ le asigna la aplicación continua

$Spec\ f : Spec\ B \to Spec\ A$ definida por $(Spec\ f)\ \tau = \tau \circ f$.

También existe un funtor contravariante $C(\cdot)$ de $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{A}$ que asigna a cada $T \in \mathcal{C}$ el álgebra $C(T) \in \mathfrak{A}$ y a una función continua $l : S \to T$ entre espacios compactos le hace corresponder el homomorfismo de álgebras

$$C(l) : f \longmapsto f \circ l : C(T) \longrightarrow C(S)$$

Para cualquier morfismo $f \in \mathfrak{A}$ el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "f"'] & C(\mathrm{Spec}\ A) \arrow[d, "C(\mathrm{Spec}\ f)"] \\
B \arrow[r, "\wedge"] & C(\mathrm{Spec}\ B)
\end{tikzcd}$$

donde $A \xrightarrow{\wedge} C(\mathrm{Spec}\ A)$ y

$B \xrightarrow{\wedge} C(\mathrm{Spec}\ B)$

son isomorfismos por el Teorema de Gelfand Naimark .

Igualmente para cualquier $l \in \mathfrak{A}$, aplicación continua entre espacios compactos, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "e_S"] \arrow[d, "l"'] & \mathrm{Spec}\ C(S) \arrow[d, "\mathrm{Spec}\ C(l)"] \\
T \arrow[r, "e_T"] & \mathrm{Spec}\ C(T)
\end{tikzcd}$$

donde $e_S(s)$ es el carácter τ de $C(S)$ tal $\tau(f) = f(s)$ para todo $f \in C(S)$.

En 15 se demostró que e_S (y e_T) son homeomorfismos. Por lo tanto el par de functores contravariantes $(Spec, C(\cdot))$ establecen una dualidad entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$.

2.3 Sean A un álgebra normada y $a \in A$. Se dice que a es un *divisor topológico de cero a derecha* (resp. *a izquierda*) si existe una sucesión $\{b_n\}$ de elementos de A tales que $\|b_n\| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ y $b_n a \to 0$ (resp. $a b_n \to 0$).

Un *divisor topológico de cero bilátero* es un elemento que es simultáneamente un divisor topológico de cero a derecha y a izquierda.

Proposición. Todo elemento de la frontera del grupo G de los elementos regulares de un álgebra normada es un divisor topológico de cero bilátero.

Demostración. Sea a un elemento de la frontera de G. Como G es abierto, $a \notin G$. Sea $a_n \in G$ tal que $a_n \to a$. Consideremos la sucesión $\{\|a_n^{-1}\|\}$; si esta sucesión fuera acotada, entonces $a_n^{-1} a - 1 = a_n^{-1}(a - a_n) \to 0$, de donde $a_n^{-1} a \in G$ y se tendría $a \in G$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $\{\|a_n^{-1}\|\}$ no es acotada. Supongamos que $\|a_n^{-1}\| \to 0$ y sea $b_n = b_n^{-1} / \|b_n^{-1}\|$, entonces

$$b_n a = b_n(a - a_n) + 1/\|a_n^{-1}\| \to 0$$

$$a b_n = (a - a_n) b_n + 1/\|a_n^{-1}\| \to 0 ,$$

lo cual demuestra que a es un divisor topológico de cero bilátero.

2.4 *Proposición.* Sean A un álgebra de Banach con elemento unidad y B una subálgebra cerrada de A que contiene el elemento unidad de A.

Para todo x en B se tiene

(i) $Sp_A x \subset Sp_B x$

(ii) $Fr\ Sp_B x \subset Fr\ Sp_A x$

Demostración La parte (i) es inmediata (ii) Supongamos que λ pertenece a la frontera de $Sp_B x$. entonces $x - \lambda I$ pertenece a la frontera de los elementos regulares de B . por lo tanto $x - \lambda I$ es un divisor topológico de cero bilátero en B y obviamente también en A Se deduce que $\lambda \quad Sp_A x$ y es fácil ver que

$\lambda \quad Fr\ Sp_A x$

Corolario Si se supone que además el interior de $Sp_B x$ es vacío, entonces

$Sp_B x \quad Sp_A x$

Demostración $Sp_B x \quad Fr\ Sp_B$ porque $Sp_B x$ es cerrado. Por otra parte

$$Fr\ Sp_B x \subset Fr\ Sp_A x \quad Sp_A x \subset Sp_B x \text{ ; así que } Sp_B x = Sp_A x$$

Nota En particular, si $Sp_B x$ es real, entonces $Sp_B x = Sp_A x$

25 ***Proposición*** Sea A una C^*-álgebra con elemento unidad. Supongamos que A es generada por I y x (es decir, A es la menor sub-C^*-álgebra de A que contiene a I y x). entonces $r \mapsto r(x)$ es un homeomorfismo de $Spec\ A$ sobre $Sp\ x$.

Demostración Esta es una aplicación continua y según se vió en 12. su imagen es $Sp\ x$. Ahora si $r(x) = r'(x)$. el conjunto B de los $y \in A$ tales que $r(y) = r'(y)$ es una sub-C^*-álgebra de A que contiene a I y a x. así que $B = A$ y entonces $r = r'$. La aplicación considerada es entonces inyectiva y por lo tanto un homeomorfismo dado que $Spec\ A$ es compacto. Queremos terminar con el siguiente resultado de Wiener.

26. ***Proposición.*** Sea A el espacio de las funciones complejas de variable real de la forma

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{int} \quad \text{con} \quad \alpha_n \in C ,$$

donde

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n| < \infty .$$

Si $x(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $\frac{1}{x(t)}$ también pertenece a A.

Demostración. El espacio A es un álgebra normada para operaciones definidas puntualmente y con la norma $\|x\| = \Sigma\,|\alpha_n|$. El álgebra A es de Banach por ser claramente isomorfa a l_1, además $\|xy\| = \sum_n |\sum_k \alpha_{n-k}\beta_k| \leq \|x\|\,\|y\|$, donde $x(t) = \Sigma\,\alpha_n e^{int}$ y $y(t) = \Sigma\,\beta_n e^{int}$.

Sean x_o el elemento de A tal que $x_o(t) = e^{it}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\tau \in Spec\,A$, entonces $|\tau(x_o)^n| = |\tau(x_o^n)| \leq \|x_o^n\| = 1$, así que $\tau(x_o)$ es de la forma $\tau(x_o) = e^{i\theta}$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces $\tau(x_o^n) = e^{in\theta} = x_o^n(\theta)$ y en virtud de la continuidad de τ se tiene $\tau(x) = x(\theta)$. Como por hipótesis $x(\theta) \neq 0$, entonces x no pertenece al núcleo de τ, cualquiera que sea $\tau \in Spec\,A$. Por lo tanto x es invertible en A.

Bibliografía

[1] J. Dixmier. *Les C^*-algèbres et leur représentations*. 2ème éd. Gauthiers-Villars Paris, 1969

[2] N. Dunford and J. T. Schwartz *Linear Operators*. Part. II. Interscience publishers, New York - London, 1963.

[3] I.M. Gelfand. *Normierte Ringe*. Mat. Sbornik.

[4] I. M. Gelfand. "Ideale und primare Ideale in normierten Ringen". Mat. Sbornik N. S. 9 (51), 41-48, 1941.

[5] I. M. Gelfand, M. A. Naimark. "On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space". Mat. Sbornik N. S. 12 (54), 197-213, (1943).

[6] M. A. Naimark. *Normed rings*. P. Noordhoff N. V., 1964.

[7] C. E. Rickart. *General theory of Banach algebras*. Van Nostrand, 1960.

[8] K. Yosida. *Functional Analysis*. Second Edition. Springer-Verlag New York Inc. 1968.