Boletín de Matemáticas
Vol. VIII, pp. 74-88

SOBRE UNA EXTENSION DEL CONCEPTO DE LAPLACIANO EN ESPACIOS DE HILBERT (*)

JAIRO ALVAREZ

Introducción. El carácter de este artículo es esencialmente descriptivo. Su propósito es triple. Se quiere presentar un resultado, incluído en el trabajo de tesis del autor ([14]), pero se desea a la vez dar una perspectiva y una bibliografía básica del frente de trabajo en el cual podría inscribirse dicho resultado. Se quiere además mostrar la utilización, en el análisis de dimensión infinita, de las importantes y sorprendentes interrelaciones entre el análisis (teoría clásica y del potencial) y la teoría de probabilidad (procesos de Markov).

En 1923 N. Wiener dió la primera construcción correcta de un proceso de Markov con trayectorias continuas, fundamentando, desde el punto de vista probabilístico, la formulación que Einstein había dado del movimiento Browniano a principios del siglo. En 1945 Kakutani demostró que la solución del problema de Dirichlet clásico está dada por la esperanza matemática de variables aleatorias determinadas por el movimiento browniano. Posteriormente, en la década del 50 los trabajos

(*) Esta monografía fué presentada al IV Coloquio Colombiano de Matemáticas y contiene un resultado obtenido por el autor. N. del E.

de Doob y Hunt ([2] y [3]), pusieron en evidencia las profundas conexiones entre la teoría de probabilidad, rama de los procesos de Markov, y el análisis clásico, específicamente en la teoría del potencial, haciendo posible, como dice Dynkin ([4]) "no sólo aplicar los resultados y los métodos del análisis a los problemas de la teoría de la probabilidad, sino también la de investigar problemas analíticos utilizando métodos probabilísticos".

Por otro lado los trabajos de Wiener estimularon el desarrollo de teorías de integración, y en general el estudio de algunos teoremas del análisis clásico, en espacios de dimensión infinita, en lo cual las conexiones entre el análisis y la probabilidad mencionadas atrás han resultado de gran utilidad. Dentro de esta línea están los trabajos de Segal, Friedrichs, Shapiro y Gross ([5], [6], [7]) que han producido una teoría de integración sobre espacios de Hilbert. En [7] Gross introduce el concepto de espacio abstracto de Wiener que ha resultado muy adecuado para extender a espacios de dimensión infinita el estudio de la teoría del potencial y en particular el estudio del operador Laplaciano adelantado con buen éxito por él y sus alumnos ([8], [13], [14]). El pequeño resultado que aquí presentamos se puede inscribir dentro de esta línea de trabajo y en su demostración se ha utilizado el mismo "tratamiento probabilístico" haciendo uso del movimiento Browniamo que aparece naturalmente en la construcción del espacio abstracto de Wiener.

*1. **Movimiento Browniano y Laplaciano en $\mathbb{R}^3$**.* Supongamos que se estudia el desplazamiento de una partícula en movimiento Browniano en $\mathbb{R}^3$ cuyo punto de partida es el origen. Al cabo del tiempo t, sea $X(t)$ su posición y $P_t(0,E)$ la probabilidad de que la partícula esté en el conjunto E, $(X(t) \in E)$. Considerando intervalos pequeños de tiempo y partiendo de que en intervalos consecutivos $[r,s]$, y $[s,t]$ los desplazamientos $X(t)-X(s)$, $X(s)-X(r)$ son fenómenos independientes, Eistein pudo concluir que la función de densidad $\rho_t(x)$, asociada con la medida de probabilidad $P_t(0\,.\,\cdot)$, debería satisfacer la ecuación de difusión

$$\frac{\partial \rho_t(x)}{\partial_t} = D\ \Delta\ \rho_t(x)\ ,$$

siendo D una constante positiva ([16]). Si se toma el caso particular $D=\frac{1}{2}$ se puede concluir que

$$\rho_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}}\ e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$$

Es decir, si E es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}^3$ entonces

$$P_t(0,E) = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \int_E e^{-\frac{|x|^2}{2t}}\, dx$$

En cuanto que las características del movimiento no han de cambiar si se modifica el punto de origen del movimiento, se puede concluir que $p_t(x,E) = p_t(0,E-x)$. Esto es, partiendo de x, la probabilidad de que la partícula esté en el conjunto E, al cabo del tiempo t, es igual a la probabilidad de que la partícula esté en el conjunto $E-x$, cuando ha transcurrido el mismo tiempo y ha partido de 0. Las medidas de probabilidad $p_t(x,\cdot)$ se suelen llamar probabilidades de transición del movimiento Browniano.

Dentro de una fundamentación probabilística de la formulación anterior es necesario demostrar la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P_x)$ respecto del cual tenga sentido considerar el evento "estar en E" $(X(t) \in E)$, mencionado anteriormente y cuya probabilidad $P_x(X(t) \in E) = p_t(x,E)$. Es ésta en esencia la fundamentación debida a Wiener y que se podría esquematizar de la siguiente manera.

Puesto que las partículas en el movimiento Browniano siguen trayectorias contínuas, se puede tomar el espacio de todas las curvas continuas, definidas en $[0, \infty)$ y que toman valores en $\mathbb{R}^3$, como el conjunto de todas las trayectorias posibles en el movimiento Browniano. Denotaremos este espacio con Ω. Con este enfoque los vectores $X(t)$, que dan la posición de una partícula en $\mathbb{R}^3$, se pueden interpretar como funciones de Ω en $\mathbb{R}^3$ tales que $X(t)(w) = w(t)$; expresión ésta que da la posición, al cabo del tiempo t, de una partícula que ha seguido la trayectoria w. Para un x fijo, la familia $(P_t(x, \cdot))$ induce la existencia de una medida de probabilidad única P_x, definida sobre la σ - álgebra $\mathcal{B}(\Omega)$ generada sobre $\mathbb{R}^3$ por las funciones $X(t)$ y tal que satisface las siguientes condiciones :

i) $P_x(\{ w : w(0) = x \}) = 1$

ii) Para $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, las variables aleatorias $X(t_j) - X(t_{j-1})$; $j = 1, 2, \dots, n$ son mutuamente independientes, y

$$P_x(\{ w : X(t_j) - X(t_{j-1}) \in E \}) = \frac{1}{(2\pi t_j - t_{j-1})^{2/3}} \int_E e^{-\frac{|y-x|^2}{2(t_j - t_{j-1})}} \, dy$$

En particular se tiene que $P_x(X(t) \in E) = p_t(x, E)$. Denotaremos con $E_x[\ ]$ la esperanza matemática respecto de P_x. El sistema

$$((\Omega, \mathcal{B}(\Omega), X_t), P_x)_{x \in \mathbb{R}^3}$$

define matemáticamente al movimiento Browniano con espacio en $\mathbb{R}^3$.

Para los fines particulares que aquí nos proponemos la conexión entre el movimiento Browniano y el operador Laplaciano se puede visualizar dando una interpretación probabilística del siguiente resultado del cálculo. Sea f una función de clase $C^2(V)$, siendo V subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$. Entonces, para todo x en V se cumple que

$$\lim_{r \to 0} \frac{3 \cdot 2}{r^2} \left[\frac{1}{4 \pi r^2} \int_{\partial B_r(x)} f(y)\, d\sigma(y) - f(x) \right] = \Delta f(x).$$

donde las $B_r(x)$ son esferas de radio r, con centro en x y contenidas en V. El límite de la izquierda se suele denominar Laplaciano generalizado y es importante destacar que el 3 que aparece en dicha expresión está determinado por la dimensión de $\mathbb{R}^3$.

La fórmula puede expresarse en forma probabilística de la siguiente manera. Sea una esfera $B_r(x)$ de radio r alrededor de x y consideremos el movimiento de una partícula respecto de dicha esfera. Sea $\tau_r(w)$ el tiempo que la partícula invierte en salir por primera vez de la esfera considerada. Si E es un subconjunto de Borel en $\partial B_r(x)$, la probabilidad $\pi_r(x, E)$ de que la partícula, iniciando su movimiento en x, escape a través de E estará dada por la expresión

$$\pi_r(x, E) = P_x(\{ w : w(\tau_r) \in E \}).$$

Para x y r fijos $\pi_r(x, \cdot)$ constituye una medida de probabilidad definida sobre los conjuntos de Borel en $\partial B_r(x)$. Puesto que en el movimiento Browniano todas las direcciones son igualmente probables, la medida $\pi_r(x, \cdot)$ distribuye de manera uniforme una masa unitaria sobre $\partial B_r(x)$ resultando así que $\pi_r(x, \cdot) = \dfrac{d\sigma}{4 \pi r^2}$. Es decir, que $\pi_r(x, \cdot)$ es la medida de Lebesgue sobre $\partial B_r(x)$ normalizada. De otro lado se demuestra ([17]), que el tiempo promedio de escape de la partícula, esto es la esperanza matemática de la variable aleatoria τ_r respecto de P_x satisface las siguientes igualdades:

$$E_x[\tau_r] = r^2 E_x[\tau_1] = r^2 \cdot \frac{1}{3}.$$

En estos términos la versión probabilística del Laplaciano generalizado queda:

$$\lim_{r \to o} 2 \left[\frac{\int_{\partial B_r(x)} f(y)\, \pi_r(x, dy) - f(x)}{E_x[\tau_1]\, r^2} \right] = \lim 2 \left[\frac{E_x[f(w(\tau_r)) - f(x)}{E_x[\tau_r]} \right]$$

$$= \Delta f(x) \qquad (*)$$

Es importante destacar finalmente que la conexión entre movimiento Browniano y Laplaciano está en la base de una relación estructural muy profunda entre los procesos de Markov, y los operadores diferenciales de segundo orden. Estas conexiones se establecen a través del estudio de los conceptos de operador infinitesimal y operador característico de un proceso de Markov ([4]). Si f es una función medible y acotada sobre $\mathbb{R}^3$, se puede definir para $t > 0$ la función $p_t f$ mediante la expresión

$$(P_t f)(x) = E_x[f(x(t))] = \int_{\mathbb{R}^3} f(y)\, p_t(x, dy).$$

Para $t = 0$, se define $p_o f = f$. El operador infinitesimal A asociado con el movimiento Browniano se define utilizando la expresión

$$A f(x) = \lim_{t \to o} \frac{(p_t f)(x) - f(x)}{t}$$

Se demuestra ([16] ó [4]) que el conjunto $C_c^2(\mathbb{R}^3)$ de funciones de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$ y de soporte compacto está contenido en el dominio de dicho operador y que para f en $C_c^2(\mathbb{R}^3)$ $Af = \frac{1}{2} \Delta f$. Se demuestra igualmente que las probabilidades de transición $p_t(x, \cdot)$ se pueden reconstruir a partir de A . En cuanto al operador característico asociado con el movimiento Browniani sólo diremos que la expresión $(*)$, establecida antes, podría ser utilizada para dar una definición simplificada de él.

En el espacio de dimensión infinita que presentaremos a continuación toda esta terminología probabilística puede ser transferida sin problemas. Paralelamente se puede estudiar su estructura analítica y dar definiciones que permiten extender el concepto analítico de Laplaciano. Probando que en este nuevo contexto las conexiones anteriores son válidas, ellas pueden ser utilizadas para estudiar las propiedades de la extensión del concepto analítico de Laplaciano.

2. *Espacios Abstractos de Wiener.*

Definición : Sea B un espacio real de Banach y B^* su espacio dual topológico. Un *conjunto cilíndrico* medible C en B es un conjunto de la forma

$$C = \{ x \in B \mid (y_1(x), \ldots, y_n(x)) \in D ,$$

donde $y_i \in B^*$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y D es un conjunto de Borel en $\mathbb{R}^n$. Si K es un subespacio de dimensión finita de B^* del cual $y_1, \ldots, y_n$ son elementos, se dice que C está apoyado o sustentado en K. La colección de todos los conjuntos cilíndricos medibles apoyados en K forman una σ-álgebra que denotaremos $S_K(B)$. La colección de todos los conjuntos cilíndricos medibles en B constituyen un álgebra $\mathfrak{R}(B)$. Una función no-negativa μ definida sobre $\mathfrak{R}(B)$ es llamada una *medida cilíndrica* sobre B, si $\mu(B) = 1$ y μ es numerablemente aditiva sobre $S_K(B)$ para cualquier subespacio K de B^* de dimensión finita. Cuando $B = H$ es un espacio de Hilbert separable los y_i que aparecen en la definición de C pueden ser escogidos de suerte que conformen un conjunto ortonormal de vectores en H. Consecuentemente, todo conjunto cilíndrico en H puede expresarse en la forma $\{ x \in H : P(x) \in D \}$, donde P es una proyección ortogonal de rango finito y D es un subconjunto de Borel de $P(H)$. Para cada $t > 0$, es posible definir sobre H una *medida cilíndrica* μ_t llamada medida de Gauss sobre H con varianza $t > 0$, utilizando la expresión

$$\mu_t(C) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_D exp\left[-\frac{x^2}{2t}\right] dx$$

donde $C = \{ y \in H : P(y) \in D \}$, P es una proyección ortogonal de rango n, D es un subconjunto de Borel de $P(H)$ y dx es la medida de Lebesgue sobre $P(H)$.

Sea H un espacio de Hilbert separable con norma $|\cdot|$ inducida por su producto interno $<,>$. Una norma $\|\cdot\|$ en H se dice que es *medible* si para todo $\epsilon > 0$, existe una proyección de dimensión finita P_ϵ, tal que para cualquier proyección de dimensión finita P ortogonal a P_ϵ, $\mu_1(x \in H \mid \|P(x)\| > \epsilon) < \epsilon$. Sea B el espacio de Banach separable obtenido al completar H respecto de la norma $\|\cdot\|$. Se demuestra ([7]) que :

- La inclusión $i : (H, |\cdot|) \to (B, \|\ \|)$ es continua.
- La transformación $y \longmapsto y|_H : B^* \to H^*$ inyecta B^* en H^* y que B^* es denso en H^*. (Identificaremos H^* y H).
- Para cada $t > 0$, la medida cilíndrica m_t sobre B definida por la expresión $m_t(C) = u_t(C \cap H)$, donde C es en $\mathfrak{R}(B)$, extiende a una medida única p_t definida sobre la σ-álgebra generada por $\mathfrak{R}(B)$ llamada la *medida abstracta de Wiener* sobre B con varianza t. Esta σ-álgebra contiene todos los subconjuntos de Borel de B. La tripla (H, B, i) es llamada un *espacio abstracto de Wiener*. Es importante anotar que para cualquier $t > 0$, $p(H)=0$.

En efecto, puesto que B^* es denso en H es posible escoger una sucesión ortonormal $(x_i)_{i>0}$ de vectores en H que están en B^*. Los conjuntos

$$A_n = \{ y \in B \mid |x_j(y)| \leq n, \quad j = 1, 2, \ldots, k_n \}$$

constituyen una colección de conjuntos cilíndricos tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap H = H$, no importa cómo se escoja la sucesión k_n. Consecuentemente

$$p_t(H) \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_t(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m_t(A_n) = \sum_{n=1} \mu_t(A_n \cap H) .$$

Pero

$$\mu_t(A_n \cap H) = [\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{-n}^{n} exp[-x^2/2t]\, dx]^{k_n}$$

O sea que escogiendo k_n suficientemente grande, $\mu_t(A_n \cap H)$ se puede hacer arbitrariamente pequeño para cada n (la expresión entre corchetes es menor que 1), lo cual permite hacer $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_t(A_n)$ tan pequeño como se quiera. Resulta entonces que $p_t(H) = 0$.

Esta observación permite también observar que las medidas cilíndricas μ_t no son aditivas sobre $\mathcal{R}(H)$ y no admiten extensión como medidas a la σ- álgebra generada por $\mathcal{R}(H)$. La situación es comparable con la que se presenta si se quiere definir la medida de Lebesgue sobre los racionales $(\mathbb{Q})$. Si se define $m[[a,b) \cap \mathbb{Q}] = b-a$ entonces m no admite una extensión como medida a la σ-álgebra generada por los conjuntos de la forma $[a,b) \cap \mathbb{Q}$. En este caso $\mathbb{Q}$ (como H) tiene medida externa 0. Sin embargo, el proceso funciona cuando $\mathbb{Q}$ se completa y m se define sobre intervalos de números reales. Igualmente como ocurre con $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, H juega un papel fundamental en la estructura y propiedades de B a pesar de ser un conjunto de medida p_t nula.

El movimiento Browniano con espacio en B. Como en el caso de $\mathbb{R}^3$, la medida $p_t(\cdot)$ puede ser utilizada para construir la familia de medidas probabilísticas $p_t(x, \cdot)$, que en este contexto, constituyen las versiones de las probabilidades de transición del movimiento Browniano construido por Wiener. Consecuentemente, el número no negativo $p_t(x, E)$ puede atribuírsele el mismo significado que en el caso finito, es decir, puede ser interpretado como la probabilidad de que una partícula en B, que inicia su movimiento Browniano en x esté en el conjunto E al cabo del tiempo t. Se demuestra ([81]) que las medidas $p_t(x, \cdot)$ satisfacen propiedades idénticas a las presentadas en el caso finito y que permiten la construcción de un proceso de Markov con trayectorias continuas y con espacio en B al que tiene sentido llamar movimiento Browniano. La existencia de este "movimiento Browniano" que surge simultáneamente con la construcción del espacio abstracto de Wiener permite de inmediato hablar de Laplaciano en sentido generalizado utilizando la fórmula (*) en página , comprobando, como se comprueba ([81]), que $0 < E_x[\tau_r] < \infty$. Resulta importante destacar que la interpretación probabilística resuelve el problema de la dimensión del espacio que aparece involucrada en la versión puramente analítica en $\mathbb{R}^3$ y que la posibilidad de hablar de Laplaciano generalizado y de integración de funciones sobre una superficie esférica, respecto de una medida que semeja la medida de Lebesgue es un aporte fundamental para el estudio del Laplaciano en su definición analítica que consideramos a continuación.

Diferenciabilidad y Laplaciano en B. Si f es una función definida en un conjunto abierto V de B y valorada en F espacio real de Banach tiene sentido considerar su derivada en un punto x. Siguiendo la definición de derivada de Frechet ([11]), f será diferenciable en x, si existe una transformación lineal acotada $f'(x)$ de B en F tal que $f(x+y) - f(x) - f'(x)(y) = o(\|y\|)$, $y \in B$. Pero más útil que esta diferenciabilidad natural resulta ser la H-diferenciabilidad o diferenciabilidad en "direcciones H". Se dice que f *es H-diferenciable en* x, ó *diferenciable en direcciones* H, si existe una transformación lineal acotada

$Df(x)$ de H en F tal que $f(x+h)-f(x)-Df(x)(h) = o(|h|)$, $h \in H$. Puesto que en H, la norma Hilbertiana $|\cdot|$ es más fuerte que la norma medible $\|\cdot\|$, si f es diferenciable en x entonces también será H- diferenciable y $f'(x)|_H = Df(x)$. Sea T un operador acotado de H en H. Se dice que T es un operador con traza si $sup\{\sum < T(e_i), f_i > \mid \{e_i\}$ y $\{f_i\}$ son sistemas ortonormales completos en $H\} < \infty$. Cuando este es el caso se define $Traza[T] = \sum_i < T(e_i), e_i >$, donde $(e_i)_{i>0}$ es un sistema ortonormal completo en H. Se sabe ([2]), que $Traza[T]$ no depende del sistema ortonormal escogido. Sea f una función real definida en V subconjunto abierto de B, se dice *que f posee laplaciano* en x si f es dos veces H-diferenciable, es decir, $D^2f(x)$ existe como transformación lineal acotada de H en H y es un operador con traza. El laplaciano de f en x se denota como $\Delta f(x)$ y se define por la expresión $\Delta f(x) = Traza[D^2 f(x)]$. La función Δf definida sobre V, cuando f tiene laplaciano en todo punto de su dominio, se llama laplaciano de f.

No es difícil ver que la definición anterior coincide con la definición usual de laplaciano cuando $H = \mathbb{R}^n$. Sinembargo vale la pena destacar de que en este contexto hay diferencias notables con el caso finito. Se puede demostrar por ejemplo que la existencia de $D^2 f(x)$ no implica la existencia del laplaciano ([8]). No ocurre lo mismo con $f''(x)$. Recordando que $B^* \subset H^*$ se demuestra que $f''(x)|_H = D^2 f(x)$ y $D^2 f(x)$ tiene traza bien definida ([7]).

Para nuestros fines, la siguiente definición da una versión en B de las funciones llamadas de clase C^2. Sea f una función definida en V subconjunto abierto de B, diremos que f es $C^2_T(V)$ si cumple las siguientes condiciones:

i) f es $Lip\ 1$ sobre conjuntos acotados de V cuya distancia a ∂V es mayor que cero (se habla de conjuntos propiamente acotados en V). Esto es, si U es un subconjunto propiamente acotado en V, existe C tal que para todo x e y en U

$$\| f(x) - f(y) \| \leq C \| x - y \|$$

ii) Δf existe en V.

iii) Las funciones $Df: V \to H$, $D^2 f: V \to L(H,H)$, $\Delta f: V \to \mathbb{R}$ son continuas y acotadas sobre conjuntos propiamente acotados en V.

3. *Resumen de resultados*.

Los siguientes resultados están referidos a un espacio abstracto de Wiener B y constituyen en este contexto extensiones de resultados clásicos del análisis en $\mathbb{R}^3$.

a) ***Operador infinitesimal y Laplaciano***. Esta relación se ha establecido bajo diferentes condiciones ([8]). En particular se puede demostrar que la colección de funciones $C_T^2(B)$ con soporte acotado están en el dominio del operador infinitesimal.

b) ***Laplaciano*** Δ ***y Laplaciano generalizado*** Δ_o. Esta conexión ha sido establecida igualmente bajo diferentes condiciones ([13]). En particular, si f es $C_T^2(V)$ entonces $\Delta_o f$ existe y $\Delta_o f = \Delta f$.

c) ***Ecuación del calor***. Sea f una función acotada definida en B y $Lip\ 1$. Entonces para todo $t > 0$, $p_t f$ es $C_T^2(B)$ y cumple que

$$\frac{\partial\, p_t f(x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta (p_t f)(x) \quad ([8]).$$

d) ***Regularidad de funciones armónicas***. La regularidad de funciones armónicas se estudia en ([9]), pero la definición de función armónica que allí se da es esencialmente probabilística. Se demuestra que funciones armónicas son H-regulares. Combinando con nuestro resultado que se presenta en 3 f y utilizando la definición clásica de función armónica (f armónica si $\Delta f = 0$) se puede demostrar que si f es $C_T^2(V)$ y es armónica entonces f es H-regular en V, es decir, es H-diferenciable un número infinito de veces.

e) ***Teorema de Liouville para funciones armónicas.*** Manteniendo la definición de función armónica dada en [9], se establece en [10] una versión del clásico teorema de Liouville para funciones armónicas (funciones armónicas en $\mathbb{R}^3$ y acotadas son constantes). Como en el caso anterior, se puede utilizar la definición clásica de función armónica, y demostrar que si f es $C_T^2(V)$, armónica y acotada en B entonces f es constante.

f) ***Funciones de valor promedio y funciones armónicas.*** Sea f una función real cuyo dominio contiene a V subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$. Se dice que f es de valor promedio en V o que satisface el principio del promedio esférico en V, si

$$f(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x)} f(y)\, d\sigma(y), \quad \text{siempre que} \quad B_r(x) \subset V.$$

Un resultado muy útil en el estudio de las funciones armónicas en $\mathbb{R}^3$ establece que funciones armónicas satisfacen el principio del promedio esférico. *La extensión de este teorema a espacios abstractos de Wiener es el resultado* que queremos presentar ante este Coloquio. Puesto que:

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x)} f(y)\, d\sigma(y) = \int_{\partial B_r(x)} f(y)\, \pi_r(x, dy),$$

la expresión de la derecha en la igualdad anterior puede ser utilizada para definir funciones de valor promedio en un espacio abstracto de Wiener. Utilizando esta definición hemos establecido ([14]) que *si* f *es una función real definida en* V *subconjunto abierto de* B *y es* $C_T^2(V)$ *con* $\Delta f = 0$ *entonces* f *es de valor promedio en* V.

g) ***Un problema abierto.*** Un problema por resolver, y que vendría a completar el cuadro de resultados anteriores, es el problema de Dirichlet respecto del concepto de Laplaciano que aquí hemos formulado. (Dados, V un conjunto abierto en B y f una función continua y acotada en ∂V, hallar una función u, con laplaciano bien definido en V, tal que $\Delta u = 0$ en V y $\lim\limits_{y \to x \in \partial V} u(y) = f(x)$.)

Este problema ha sido estudiado extensivamente en el análisis clásico y utilizando su interpretación probabilística ya mencionada en la introducción de este ensayo, su formulación en B en términos igualmente probabilísticos es inmediata. No existe sinembargo una demostración para la versión que utiliza la definición analítica de Laplaciano presentada en esta monografía.

Bibliografía

[1] S. Kakutani. "Markov Processes and the Dirichlet problem". Proc. Imp. Acad. Tokyo, 21(1945), 227-233.

[2] J. L. Doob. "Semimartingales and subharmonic functions". Trans.Am.Math. Soc. 77 (1954), 86-121.

A Probability approach to the heat equation. Trans.Am.Math.Soc. 80, 216-280 (1955).

[3] G. Hunt. "Markoff Processes and Potentials I, II". Illinois J. Math. 1 (1957) 44-93, 316-362.

"Some Théorems concerning Brownian motion". Trans.Am.Math.Soc.81(1956) 294-319.

[4] E. B. Dynkin. *Markov Processes Vol. I*. Springer-Verlag, 1965.

[5] I. E. Segal. "Distributions in Hilbert Space and Canonical Systems of Operators". Trans. Am. Math. Soc. 88 (1958) 12-41.

[6] K. O. Friedrichs. "Integration over Hilbert Space and Outer Extensions". Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 43 (1957).

[7] L. Gross. "Abstract Wiener Spaces". Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Stat and Prob. Vol. II, part. 1 (1965-1966).

[8] L. Gross. "Potential Theory on Hilbert Space". Journal of functional Analysis, Vol. 1 (1967), 123-181.

[9] V. Goodman. "Harmonic Functions on Hilbert Space". Journal of functional Analysis 10, No. 4 (1972).

[10] V. Goodman. " A Liouville Theorem for Abstract Wiener Space", American Journal of Mathematics, Vol. XCV, No. 1, Spring 1973.

[11] Dieudoné. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press (1960).

[12] Vilenkin. *Les distributions*. Tome 4, Dunod.

[13] C. Elson. "An Extension of Weyl's lemma to infinite dimensions" Ph.D. Thesis. Univ. of California, San Diego (1971).

[14] J. Alvarez. "The Riesz decomposition theorem for distributions on a Wiener Space". Tesis de doctorado. Cornell University, Ithaca, N.Y. (14850), 1973.

[15] E. Nelson. "An existence theorem for second order paraboloic equations". Trans. Am. Math. Soc. 88 (1958), 414-429.

[16] E. Nelson. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Mathematical Notes. Princeton University, Press (1972).

[17] Dynkin and Yushkevich. *Markov Processes (Theorems and problems)*. Plenum Press 1969.

Universidad del Valle
Departamento de Matemáticas