Boletín de Matemáticas
Vol. VIII. pp. 95-100

ALGEBRA LINEAL Y GEOMETRIA

JESUS H. PEREZ

Actualmente existe una cierta tendencia a creer que la Geometría Euclideana es una de las ramas de la Matemática ya terminadas, que no tiene nada nuevo que decir o en la cual no hay investigaciones que realizar. Realmente esto no es así y como todo conocimiento también evoluciona aproximándose cada vez más al descubrimiento de nuevas leyes de la naturaleza e integrándose más perfectamente con otros conocimientos y otras ramas de la ciencia. Lo que podemos afirmar es que el período "griego" de esta disciplina ha terminado hace mucho tiempo, sin que esto signifique la desaparición de la geometría euclideana ni tampoco la ineficacia de los conocimientos que nos legaron los griegos. En nuestros días, gracias a los avances de la Matemática en el presente siglo, nos encontramos ante una nueva época de la geometría euclideana que podríamos llamar "época conjuntista". En este artículo, pretendemos hacer una introducción rápida a la "Geometría euclideana conjuntista". Debemos advertir sinembargo que no se debe entender esta última como la Geometría "correcta", ni como la única que se debe aprender o enseñar; pienso que el desarrollo histórico del conocimiento científico debe respetarse, si no estrictamente, al menos en lo fundamental .

(*) Este artículo es el texto de la conferencia dictada por el autor en el IV Coloquio Colombiano de Matemáticas. N. del E.

Supongamos en lo que sigue que, tenemos a nuestra disposición una teoría de conjuntos en la cual definiremos la Geometría Euclideana y presentaremos un modelo de ella.

Geometría Euclideana

Diremos que la Geometría euclideana es el estudio de estructuras del tipo siguiente : tres conjuntos $\mathcal{S}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$ cuyos elementos llamaremos respectivamente *puntos*, *rectas*, *planos* ; y una función d que llamaremos *distancia* y que satisfacen una serie de condiciones (axiomas) que a continuación enumeramos :

Axiomas de Incidencia.

I-0 *Todas las rectas y planos son conjuntos de puntos.*

I-1 *Dados dos puntos diferentes, existe exactamente una recta que los contiene.*

I-2 *Dados tres puntos no colineales existe exactamente un plano que los contiene*

I-3 *Si dos planos diferentes se cortan, entonces su intersección es una recta.*

I-4 *Si dos puntos pertenecen a un plano, entonces la recta que los contiene está contenida en el plano.*

I-5 *Toda recta contiene al menos dos puntos. Todo plano contiene al menos tres puntos no colineales. $\mathcal{S}$ contiene al menos cuatro puntos no coplanares.*

Axiomas de la distancia

D-0 El dominio y codominio de la función d son respectivamente $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ y $\mathbb{R}$.

D-1 Si $x, y \in \mathcal{S}$ entonces $d(x,y) \geq 0$

D-2 Si $x, y \in \mathcal{S}$ entonces $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

D-3 Si $x,y \in \mathcal{S}$ entonces $d(x,y) = d(y,x)$.

Para enunciar el axioma siguiente, necesitamos la definición :

Definición : Se llama sistema de coordenadas para una recta L, toda función biyectiva $f: L \to \mathbb{R}$ tal que si $x, y \in L$ entonces

$$d(x,y) = | f(x) - f(y) |$$

D-4 *Toda recta L admite un sistema de coordenadas.*

Axiomas de separación .

Definición : Si $x,y,z \in \mathcal{S}$ decimos que z está *entre* x e y (y escribimos $x-z-y$) si y sólo si $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$.

Definición : Dados $x, y \in \mathcal{S}$ definimos $\overline{xy}$ como el conjunto de todos los puntos z tales que $x-z-y$.

Definición : un subconjunto K de S se dice convexo si y sólo si siempre que $x,y \in K$ se tiene que $\overline{xy} \in K$.

S-1 *Supongamos que π es un plano y L una recta tales que $L \in \pi$. Existen entonces, H_1, H_2 subconjuntos convexos de π tales que :*

a) $\{ L, H_1, H_2 \}$ *es una partición de* π.

b) *Si* $x \in H_1$, $y \in H_2$ *entonces* $\overline{xy} \cap L$ *es un punto*.

S-2 *Si π es un plano, existen H_1, H_2 subconjuntos convexos de $\mathcal{S}$ tales que :*

a) $\{ \pi, H_1, H_2 \}$ *es una partición de* $\mathcal{S}$.

b) *Si* $x \in H_1$, $y \in H_2$, *entonces* $\overline{xy} \cap \pi$ *es un punto.*

El Modelo

Tomamos como conjunto $\mathcal{S}$ el conjunto $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{L}$ el conjunto de las variedades lineales de dimensión 1 y $\mathcal{P}$ el conjunto de las variedades lineales de dimensión 2. La función d la definimos como $d(x,y) = \| x-y \|$, donde $\| z \| = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{\frac{1}{2}}$ si $z = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Para ver que este es un modelo conjuntista de la Geometría Euclideana debemos comprobar que se satisfacen todos los axiomas enunciados en la definjción que hemos dado anteriormente. Los axiomas de la distancia se comprueban fácilmente y no vamos a demostrar aquí cada uno de los otros. A título de ejemplo, veamos cómo se demuestran algunos de ellos.

I-1.- Supongamos que, $x, y \in \mathbb{R}^3$ y $x \neq y$; entonces, los puntos x, y son baricéntricamente independientes y la variedad $L = \langle \{ x,y \} \rangle$ engendrada por ellos es de dimensión 1 o sea que L es una recta que contiene evidentemente a $\{ x,y \}$. Si L' es una recta que contiene a $\{ x,y \}$, siendo una variedad, debe contener a L pero esto significa que $L = L'$ lo cual nos muestra que no existe sino una sola recta que contiene a $\{ x,y \}$.

El axioma I-2 se comprueba análogamente.

I-3.- Supongamos que π_1, π_2 son planos diferentes tales que $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi$. Tenemos la siguiente relación:

$dim(\pi_1 \vee \pi_2) + dim(\pi_1 \cap \pi_2) = dim(\pi_1) + dim(\pi_2)$, donde $\pi_1 \vee \pi_2$ es la variedad lineal engendrada por $\pi_1 \cup \pi_2$. Como π_1, π_2 son variedades de dimensión 2 tendremos entonces:

$$dim(\pi_1 \vee \pi_2) + dim(\pi_1 \cap \pi_2) = 4 \qquad (1)$$

De otra parte, se tiene que $2 \leq dim\,(\pi_1 \vee \pi_2) \leq 3$ pues de un lado π_1, $\pi_2 \subset \pi_1 \vee \pi_2$ y del otro, la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3. Si suponemos que $dim\,(\pi_1 \vee \pi_2) = 2$ tendríamos que $\pi_1 = \pi_1 \vee \pi_2 = \pi_2$ lo cual no es posible pues hemos supuesto que $\pi_1 \neq \pi_2$. Debemos tener entonces que $dim\,(\pi_1 \vee \pi_2) = 3$ y de la relación (1) deducimos $dim\,(\pi_1 \cap \pi_2) = 1$ es decir, $\pi_1 \cap \pi_2$ es una recta.

S - 2 Supongamos que π es un plano o sea una variedad de dimensión 2. Escogemos $x_o, x_1, x_2 \in \pi$ baricéntricamente independientes y tales que la variedad lineal engendrada por $\{x_o, x_1, x_2\}$ sea π. Como la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, podemos seleccionar $x_3 \subset \mathbb{R}^3$ de manera que los vectores x_o, x_1, x_2, x_3 sean baricéntricamente independientes y que la variedad engendrada por $\{x_o, x_1, x_2, x_3\}$ sea $\mathbb{R}^3$. En estas condiciones definimos

$$H_1 = \{ \sum_{i=o}^{3} \alpha_i x_i \mid \sum_{i=o}^{3} \alpha_i = 1 \quad \text{y} \quad \alpha_3 > 0 \}$$

$$H_2 = \sum_{i=o}^{3} \beta_i x_i \mid \sum_{i=o}^{3} \beta_i = 1 \quad \text{y} \quad \beta_3 < 0 \} .$$

Es fácil darse cuenta que los conjuntos H_1, H_2 son convexos y que $\{\pi, H_1, H_2\}$ es una partición de $\mathbb{R}^3$. Veamos para terminar que el conjunto $\overline{xy} \cap \pi$ se reduce a un punto donde $x = \sum_{i=o}^{3} \alpha_i x_i$ es un punto de H_1 y $y = \sum_{i=o}^{3} \beta_i x_i$ es un punto de H_2. Se trata de ver entonces que existen $t, \gamma_o, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ únicos tales que $0 \leq t \leq 1$, $\gamma_o + \gamma_1 + \gamma_2 = 1$ y que

$$tx + (1-t)\,y = \gamma_o x_o + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \qquad (2)$$

La ecuación (2) es equivalente a

$$(t\alpha_o + (1-t)\beta_o)x_o + (t\alpha_1 + (1-t)\beta_1)x_1 + (t\alpha_2 + (t\alpha_2 + (1-t)\beta_2)x_2 + (t\alpha_3 + (1-t)\beta_3)x_3 = \gamma_o x_o + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + 0 . x_3$$

y utilizando la independencia baricéntrica de los vectores x_o, x_1, x_2, x_3 establecemos el sistema de ecuaciones

$$t\alpha_o + (1-t)\beta_o = \gamma_o$$

$$t\alpha_1 + (1-t)\beta_1 = \gamma_1$$

$$t\alpha_2 + (1-t)\beta_2 = \gamma_2$$

$$t\alpha_3 + (1-t)\beta_3 = 0$$

cuya única solución está dada por :

$$t = \frac{-\beta_3}{-\beta_3 + \alpha_3}$$

$$\gamma_o = \frac{\beta_o\alpha_3 - \beta_3\alpha_o}{-\beta_3 + \alpha_3} \qquad \gamma_1 = \frac{\beta_1\alpha_3 - \beta_3\alpha_1}{-\beta_3 + \alpha_3} \qquad \gamma_2 = \frac{\beta_2\alpha_3 - \beta_3\alpha_2}{-\beta_3 + \alpha_3} \qquad \blacksquare$$