Boletín de Matemáticas
Vol. VIII, págs. 111-121

ALGUNOS ASPECTOS ESTRUCTURALES EN LA TEORIA DE MEDIDA Y PROBABILIDAD (*)

SIEGFRIED WEBER

Contenido.

I) Caracterización de estructuras medibles :

a) Estructuras generales.

b) Estructuras especiales y relaciones entre estas.

II) Caracterización de espacios de probabilidad :

a) Algebra sobre Ω con probabilidad aditiva y caracterización por un anillo de Boole métrico.

b) Extensión de una álgebra sobre Ω con probabilidad σ-aditiva a una σ-álgebra sobre Ω con una probabilidad σ-aditiva o completación en el sentido topológico.

c) Relación entre σ-álgebra o σ-aditividad en el sentido de la teoría de conjuntos y en el sentido de la teoría de redes (látices).

III) Caracterización de modos de convergencia en la teoría de probabilidad :

a) Espacios de funciones medibles y topologización.

(*) En este artículo se publican las notas de la conferencia dictada por el autor en el IV Coloquio Colombiano de Matemáticas.

b) Caracterizacion de modos de convergencia en el sentido de la probabilidad por convergencia en el sentido de la topología.

I. *Caracterización de estructuras medibles.*

a) Estructuras generales. En un conjunto es posible definir :

1) Estructuras fundamentales
   - estr. relacionales
     - estructuras algebráicas
     - estructuras ordenadas
   - estr. de subconjuntos
     - estructuras topológicas
     - estructuras medibles

Entre conjuntos con estructuras similares es posible definir *morfismos*

2) Morfismos para estructuras
   - algebraicas : homomorfismos
   - ordenadas : aplicaciones crecientes
   - topológicas : aplicaciones continuas
   - medibles : aplicaciones medibles

3) Isomorfismos : = Aplicaciones biyectivas que son morfismos así como sus inversas.

4) Estructuras múltiples:= Unas estructuras fundamentales que son compatibles

5) Estructuras derivables para subconjuntos, productos y cocientes de conjuntos estructurados.

b) Estructuras especiales y relaciones entre estas.

1) (Ω, M) espacio medible : $\Leftrightarrow$ Ω conjunto, M álgebra o σ-álgebra sobre Ω,

$(M, \leq)$ conjunto ordenado con inf y sup para cada dos elementos de M.

$(M, \sqcup, \sqcap)$ latice

$(M, \sqcup, \sqcap, 0, 1, {}^{-})$ álgebra de Boole (o latice de Boole) := latice distributiva y complementaria con nulidad 0 y unidad 1.

$(M, +, \cdot, -, 0, 1)$ anillo de Boole := anillo indempotente con unidad 1 .

Entre estas estructuras hay relaciones :

2) $(M, \leq)$ conjunto ordenado $\Longleftrightarrow$ $(M, \sqcup, \sqcap)$ latice : 2.1) $a \leq b :\Longleftrightarrow a \sqcap b = a$
con inf y sup

$inf(a,b) := a \sqcap b$

$sup(a,b) := a \sqcup b$

2.2) $a \sqcap b := inf(a,b)$

$a \sqcup b := sup(a,b)$

3) M álgebra de Boole $\Longleftrightarrow$ M anillo de Boole : 3.1) $a \sqcap b := a \cdot b$

$a \sqcup b := a + b + (a \cdot b)$

$0 := 0$

$1 := 1$

$\bar{a} := 1 + a$

3.2) $a + b := (a \sqcap \bar{b}) \sqcup (\bar{a} \sqcap b)$

$a \cdot b := a \sqcap b$

$0 := 0$

$1 := 1$

$-a := a$

M es conmutativo $(\cdot)$ y tiene característica 2 $(a + a = 0)$

4) M algebra sobre $\Omega \Rightarrow M$ álgebra de Boole: $\sqcap := \cap$, $\sqcup := \cup$, $0 := \phi$, $1 := \Omega$, $\bar{A} := \complement A$

M álgebra sobre $\Omega \Rightarrow M$ anillo de Boole: $\cdot := \cap$, $+ := \Delta$, $0 = \phi$, $1 = \Omega$, $-A := A$

5) Teorema de Stone :

M anillo de Boole $\Rightarrow \bigvee_{\Omega} \bigvee_{\varphi : \mathbf{M} \to \mathcal{P}(\Omega)}$ φ isomorfismo, $\varphi(\mathbf{M})$ álgebra sobre Ω ,

III. Definición. φ isomorfismo de Stone. $(\Omega, \varphi(\mathbf{M}))$ representación de **M** .

IIIIII. Caracterización de espacios de probabilidad.

a) Algebra sobre Ω con probabilidad aditiva y caracterización por un anillo de Boole métrico.

Hipótesis para esta parte ***a)***: $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ con $\mathbf{A}$ = álgebra sobre Ω, $P : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$

positiva, aditiva (si $A \cap B = \phi$), normada $(P(\Omega) = 1)$

1) $(\mathbf{A}, d)$ es un espacio cuasimétrico : $d(A, B) := P(A \Delta B)$.

Definición. $\mathbf{A}|_P :=$ cociente de $\mathbf{A}$ respecto a la relación equivalencia :

$$A \overset{P}{\sim} B \; :\Longleftrightarrow P(A \Delta B) = 0 \, , \quad \tilde{A} := \{ B \in \mathbf{A} \mid B \overset{P}{\sim} A \} \, .$$

Entonces :

2) $\mathbf{A}|_P$ es un anillo de Boole : $\tilde{A} + \tilde{B} := \widetilde{A \Delta B}$.

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} := \widetilde{A \cap B}$$

$$0 := \tilde{\phi}, \; 1 := \tilde{\Omega}, \; -\tilde{A} := \tilde{A}$$

$\mathbf{A}|_P$ es un álgebra de Boole: $\tilde{A} \sqcap \tilde{B} := \widetilde{A \cap B}$

$$\tilde{A} \sqcup \tilde{B} := \widetilde{A \Delta B \Delta (A \cap B)}$$

$$0 := \tilde{\phi}, \; 1 := \tilde{\Omega}, \; \bar{\tilde{A}} := \widetilde{\complement A}$$

3) $\tilde{P} : \mathbf{A}|_P \to \mathbf{R}$ es estrictamente positiva, $\tilde{P}(\tilde{A}) := P(A)$, aditiva (si $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = 0$), normada $(\tilde{P}(1) = 1)$.

4) $\tilde{d} : \mathbf{A}|_P \times \mathbf{A}|_P \longrightarrow \mathbf{R}$ es una métrica invariante por translaciones, aditiva, normada $(\tilde{d}(1,0) = 1) : \tilde{d}(\tilde{A}, \tilde{B}) := d(A, B)$.

5) $(\mathbf{A}|_P, \tilde{P})$ de 3) $\Longleftrightarrow (\mathbf{A}|_P, \tilde{d})$ de 4) : 5.1) $\tilde{P}(\tilde{A}) := \tilde{d}(\tilde{A}, 0)$

5.2) $\tilde{d}(\tilde{A}, \tilde{B}) := \tilde{P}(\tilde{A} + \tilde{B})$

6) $(\mathbf{A}|_P, \tilde{d}) = (\mathbf{A}|_P ; +, \cdot, 0, 1 ; \tilde{d})$ es una estructura múltiple ; $+, \cdot$ son aplicaciones continuas respecto a la $\tilde{d}$ - topología .

Definición. $(\mathbf{A}|_P, \tilde{d})$ se llama el *anillo de Boole métrico* de $(\Omega, \mathbf{A}, P)$.

Diagrama D.1

$$[1) - 6)] \qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & (\mathbf{A}|_P, \tilde{P}) & \Longleftrightarrow & (\mathbf{A}|_P, \tilde{d}) \\
 & \nearrow & & \nearrow & \\
(\Omega, \mathbf{A}, P) & \Longleftrightarrow & (\Omega, \mathbf{A}, d) & &
\end{array}$$

7) $(\mathbf{M}, \underline{P})$ con $\Longleftrightarrow$ $(\mathbf{M}, \underline{d})$ con : 7.1) $\underline{P}(M) := d(M, 0)$

$\mathbf{M}$ = anillo de Boole | $\mathbf{M}$ = anillo de Boole 7.2) $\underline{d}(M,N) := \underline{P}(M+N)$

$\underline{P} = \mathbf{M} \to \mathbf{R}$ estrictamente positiva | $\underline{d} : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{R}$ métrica

aditiva | invariante por translaciones

normada | aditiva ,

normada

8) ***Nota :*** La representación de 7) es similar a la representación siguiente :

$(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ $\Longleftrightarrow$ $(\mathbf{V}, d)$ con 8.1) $\|M\| := d \to d(M, 0)$

espacio normado | $\mathbf{V}$ = espacio $\mathbf{K}$-lineal 8.2) $d(M,N) := \|M-N\|$

d = métrica homogénea invariante por translaciones.

Definición. $\mathbf{A}|_{P}, \tilde{P})$ se llama un *álgebra de Boole normada* , o *anillo de Boole normado*.

b) Extensión de un álgebra sobre Ω con una probabilidad σ- aditiva una σ- álgebra sobre Ω con una probabilidad σ-aditiva; completación en el sentido topológico .

Hipótesis para esta parte b) : $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ con $\mathbf{A}$ = álgebra sobre Ω . $P: \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ positiva, σ- aditiva, normada.

Nota : Las definiciones y resultados de la parte II a) son válidas en esta parte .

Definición. $\mathbf{B(A)}$:= la σ- álgebra generada por $\mathbf{A}$

$\mathbf{L(A)} := \{ B \Delta M \mid B \subset \mathbf{B(A)},\ M \subseteq N ,\ P(N) = 0 \}$ la σ-álgebra-completación de $\mathbf{B(A)}$.

P^* := la extensión de P a $\mathbf{B(A)}$ [resp. $\mathbf{L(A)}$] con las propiedades de P.

Se llama :

$(\Omega, \mathbf{B(A)}, P^*)$: la *extensión de Borel* de $(\Omega, \mathbf{A}, P)$.

$(\Omega\,.\,\mathbf{L}(\mathbf{A})\,,\,P^*)$: la *extensión de Lebesgue* de $(\Omega\,.\,\mathbf{A}\,.\,P)$ [resp. $(\Omega.\,\mathbf{B}(\mathbf{A})\,,\,P^*)$]

1) Además del diagrama D.1 para $(\Omega\,,\,\mathbf{A}\,.\,P)$ hay diagramas similares para $(\Omega\,.\,\mathbf{B}(\mathbf{A})\,,\,P^*)$ y $(\Omega\,.\,\mathbf{L}(\mathbf{A})\,,\,P^*)$.

2) $i : \mathbf{L}(\mathbf{A})\,|_{P^*} \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{A})\,|_{P^*}$ es un isomorfismo ; pues $\widetilde{B \,\Delta\, M} = \tilde{B}$.

$$\widetilde{B \,\Delta\, M} \rightarrow \tilde{B}$$

3) $(\mathbf{B}(\mathbf{A})\,|_{P^*}\,,\,\tilde{d}^*)$ es un espacio métrico completo con respecto a $\tilde{d}^*$

Definición. $(\widehat{\mathbf{A}\,|_P}\,,\,\hat{d})$ sea la completación métrica de $(\mathbf{A}\,|_P\,,\,\tilde{d})$ con respecto a $\tilde{d}$:

$\widehat{(\mathbf{A}|_P}$:= conjunto de las clases de equivalencia $\widehat{\{\tilde{A}_n\}}$ de sucesiones de Cauchy $\{\tilde{A}_n\}$ en $(\mathbf{A}|_P\,.\,\tilde{d})$ con respecto a la relación de equivalencia $\widehat{\{\tilde{B}_n\}} = \widehat{\{\tilde{A}_n\}} : \Longleftrightarrow \lim\limits_n \tilde{d}(\tilde{A}_n\,.\,\tilde{B}_n) = 0$

$$\hat{d}(\widehat{\{\tilde{A}_n\}}\,.\,\widehat{\{\tilde{B}_n\}}) := \lim_n \tilde{d}(\tilde{A}_n\,.\,\tilde{B}_n)\,.$$

4) $c : \widehat{\mathbf{A}\,|_P} \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{A})|_{P^*}$ es un isomorfismo-isométrico ; (is-is) $\tilde{A}$ es definida por $\mathbf{B}(\mathbf{A})_{P^*}$ es completa y $\lim\limits_n \tilde{d}(\tilde{A}_n\,,\,\tilde{A}) = 0$

$$\widehat{\{\tilde{A}_n\}} \rightarrow \tilde{A}$$

5) $\mathbf{A}$ σ-álgebra $\Rightarrow (\mathbf{B}(\mathbf{A})\,,\,P^*) = (\mathbf{A}\,.\,P)$

$$(\widehat{\mathbf{A}|_P}\,.\,\hat{d}) = (\mathbf{A}_P\,.\,\tilde{d}) \quad \text{espacio métrico-completo}$$

Diagrama D. 2.

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{A}|_P\,.\,\hat{P}) \Longleftrightarrow (\mathbf{A}_P\,.\,\tilde{d}) \arrow[dr, dash] & \\
(\Omega\,.\,\mathbf{A}\,.\,P) \arrow[ur] \arrow[d] & & \\
(\Omega\,.\,\mathbf{B}(\mathbf{A})\,.\,P^*) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbf{B}(\mathbf{A})|_{P^*}\,.\,\widetilde{P^*}) \Longleftrightarrow (\mathbf{B}(\mathbf{A})|_{P^*}\,\tilde{d}^*) \arrow[d, equal, "(\text{is-is})"] \arrow[r, equal, "\text{is.-is.}"] & (\mathbf{A}_P\,\hat{d}) \\
(\Omega\,.\,\mathbf{L}(\mathbf{A})\,.\,P^*) \arrow[r] & (\mathbf{L}(\mathbf{A})\,|_{P^*}\,.\,\widetilde{P^*}) &
\end{tikzcd}$$

c. ***Relaciones entre σ-álgebra o σ-aditividad en el sentido de la teoría de conjuntos y en el sentido de la teoría de latices.***

Hipótesis para esta parte c) : $(\mathbf{M}, \underline{P})$ con $\mathbf{M}$ = álgebra de Boole, $\underline{P}: \mathbf{M} \to \mathbf{R}$ positiva, aditiva, normada.

Nota : Notaciones e hipótesis de la parte II b) serán válidas en esta parte.

Definición. $(\mathbf{M}) \bigsqcup_{u \in \mathbf{N}} M_u \in \mathbf{M}$ sea el supremo de $\{M_u\} \subseteq \mathbf{M} : \Longleftrightarrow (a) \bigwedge_K M_K \leq \bigsqcup M_u$

(b) $M \in \mathbf{M} \wedge \bigwedge_u M_u \leq M \Longrightarrow \bigsqcup_u M_u \leq M$.

$(\mathbf{M}) \bigsqcap_{u \in \mathbf{N}} M_u \in \mathbf{M}$ sea el infinito de $\{M_u\} \subseteq \mathbf{M} : \Longleftrightarrow (a) \bigwedge_K \bigsqcap_u M_u \leq M_K$

(b) $M \in \mathbf{M} \wedge \bigwedge_u M \leq M_u \Longrightarrow M \leq \bigsqcap_u M_u$.

Definición. $\mathbf{M}$ σ-álgebra de Boole : $\Longleftrightarrow \{M_u\} \subseteq \mathbf{M} \Rightarrow (\mathbf{M}) \bigsqcup_{u \in \mathbf{N}} M_u, (\mathbf{M}) \bigsqcap_{u \in \mathbf{N}} M_u \in \mathbf{M}$

(1) $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ es una σ-álgebra de Boole resp. a $(\mathbf{B}(\mathbf{A})) \bigsqcup_{u \in \mathbf{N}} A_u = \bigcup_{u \in \mathbf{N}} A_u$,

$(\mathbf{B}(\mathbf{A})) \bigsqcap_{u \in \mathbf{N}} A_u = \bigcap_{u \in \mathbf{N}} A_u$.

(2) $\mathbf{B}(\mathbf{A})|_{P^*}$ es una σ-álgebra de Boole resp. a $(\mathbf{B}(\mathbf{A})|_{P^*}) \bigsqcup_u \tilde{A}_u = \widetilde{\bigcup_u A_u}$,

$(\mathbf{B}(\mathbf{A})|_{P^*}) \bigsqcap_u \tilde{A}_u = \widetilde{\bigcap_u A_u}$.

Definición. $\underline{P}$ σ-aditiva en $\mathbf{M}$ (con relación a la σ-álgebra de Boole $\mathbf{B}(\mathbf{M})$ generada por $\mathbf{M}$)

$: \Longleftrightarrow \{M_u\} \subseteq \mathbf{M} \wedge \bigwedge_{j \neq K} M_j \sqcap M_K = 0 \wedge (\mathbf{B}(\mathbf{M})) \bigsqcup_{u \in \mathbf{N}} M_u \in \mathbf{M} \Rightarrow \underline{P}(\bigsqcup_u M_u) = \sum_u \underline{P}(M_u)$

(3) En $(\mathbf{A}, P)$ ó $(\mathbf{B}(\mathbf{A}), P^*)$ la σ-aditividad de P ó P^* en el sentido de latices es equivalente a ésta en el sentido de conjuntos.

(4) P^* σ-aditiva en $\mathbf{B}(\mathbf{A}) \Longleftrightarrow \widetilde{P^*}$ σ-aditiva en $\mathbf{B}(\mathbf{A})|_{P^*}$.

Nota : Como una extensión de I, b,5) es válido aún el Teorema de Stone.

(5) Sean $\varphi: \mathbf{M} \to \varphi(\mathbf{M})$ el isomorfismo y $(\Omega, \varphi(\mathbf{M}))$ la representación de $\mathbf{M}$ de Stone; $\mu := \underline{P} \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathbf{M}) \to \mathbf{R}$ la compuesta de φ^{-1} con $\underline{P}$. Entonces

μ es positiva, σ-aditiva (!), normada en el álgebra $\varphi(\mathbf{M})$ sobre Ω.

Nota: Como una generalización de II b(4) es válida aún:

(6) Sean $\underline{P}$ estrictamente positiva, $(\mathbf{M}, \underline{P})$ y $(\mathbf{M}, \underline{d})$ de II,a) (7);

$(\hat{\mathbf{M}}, \hat{\underline{d}})$ la completación métrica similar a II, b), $\hat{\underline{P}}(\cdot) := \hat{\underline{d}}(\cdot, o)$;

$(\Omega, \varphi(\mathbf{M}), \mu)$ la representación de $(\mathbf{M}, \underline{P})$ de (5);

$(\Omega, \mathbf{B}(\varphi(\mathbf{M})), \mu^*)$ ó $(\Omega, \mathbf{L}(\varphi(\mathbf{M})), \mu^*)$ las extensiones de Borel o Lebesgue;

$(\mathbf{B}(\varphi(\mathbf{M}))|_{\mu^*}, \widetilde{\mu}^*)$ ó $(\mathbf{L}(\varphi(\mathbf{M}))|_{\mu^*}, \widetilde{\mu}^*)$ los cocientes de estas. Entonces $\hat{\mathbf{M}}$ es una σ-álgebra de Boole, $\hat{\underline{P}}$ es positiva, σ-aditiva (!), normada; $(\mathbf{B}(\varphi(\mathbf{M}))|_{\mu^*}$ y $\mathbf{L}(\varphi(\mathbf{M}))|_{\mu^*}$ son isométrico-isomórfico a $\hat{\mathbf{M}}$.

Diagrama D.3.

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{M}, \underline{P}) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathbf{M}, d) \arrow[ddr] & \\
(\Omega, \varphi(\mathbf{M}), \mu) \arrow[ur, leftrightarrow] & & & \\
 & (\mathbf{B}(\varphi(\mathbf{M}))|_{\mu^*}, \widetilde{\mu}^*) \arrow[r, equal, "is.\, is"] \arrow[d, equal, "is.-is."] & (\hat{\mathbf{M}}, \hat{\underline{P}}) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\hat{\mathbf{M}}, \hat{\underline{d}}) \\
(\Omega, \mathbf{B}(\varphi(\mathbf{M})), \mu^*) \arrow[ur] & (\mathbf{L}(\varphi(\mathbf{M}))|_{\mu^*}, \widetilde{\mu}^*) & & \\
(\Omega, \mathbf{L}(\varphi(\mathbf{M})), \mu^*) \arrow[ur, dashed] & & &
\end{tikzcd}$$

Nota: $\underline{P}$ puede ser solamente aditiva!

III. Caracterización de modos de convergencia en la teoría de probabilidad.

a) Espacios de funciones medibles y topologización.

Hipótesis para las partes a) b) de III: $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ espacio con probabilidad fija, es decir, $\mathbf{B} = \sigma$-álgebra sobre Ω. $P: \mathbf{B} \to \mathbf{R}$ positiva, σ-aditiva, normada. $E(f) := \int_\Omega f\, dP$ la esperanza de la variable aleatoria $f: \Omega \to \mathbf{R}$.

Definición. $\mathbf{R}^\Omega := \{ f \mid f: \Omega \to \mathbf{R} \}$

$\mathbf{Z} := \{ f \mid f : \Omega \to \mathbf{R}$ variable aleatoria $\}$.

$L_q := \{ f \mid f : \Omega \to \mathbf{R}$ variable aleatoria, $E(|f|^q) \in \mathbf{R} \}$ para un $q \in \mathbf{R}$, $1 \leq q < \infty$.

$L_\infty := \{ f \mid f : \Omega \to \mathbf{R}$ variable aleatoria, f acotada P-c.s.$\}$.

Definición $\mathbf{Z}|_E :=$ cociente de $\mathbf{Z}$ respecto a la relación de equivalencia:

$$f \overset{E}{\sim} g : \iff f \overset{P\text{-c.s.}}{=\!=} g : \iff P(w \in \Omega \mid f(w) \neq g(w)) = 0 \iff E(f) = E(g).$$

$L_q|_E$ y $L_\infty|_E$ similares. $\tilde{f} := \{ g \mid g \overset{E}{\sim} f \}$.

Nota: $x_A \overset{E}{\sim} x_B \iff A \overset{P}{\sim} B$.

(1) $\mathbf{R}^\Omega, Z, L_q, L_\infty$ son espacios $\mathbf{R}$-lineales respecto a la adición $(+)$ para funciones y la multiplicación $(\cdot)$ entre funciones y escalares con $L_\infty \subseteq L_q \subseteq L_r \subseteq \mathbf{R}^\Omega$ para cada $q \geq r$. Similarmente para los cocientes respecto a $\tilde{f} + \tilde{g} := \widetilde{f+g}$, $\alpha \cdot \tilde{f} := \widetilde{\alpha \cdot f}$ $\quad \tilde{E}(\tilde{f}) := E(f)$.

(2) L_∞ es un espacio cuasinormado con respecto a la cuasinorma

$$|[f]|_\infty := \inf_{\substack{N \in \mathbf{B} \\ P(N) = 0}} \ \sup_{x \in \overline{N}} |f(x)|$$

$L_\infty|_E$ es un espacio normado completo con respecto a la norma $\|\tilde{f}\|_\infty := |[f]|_\infty$.

(3) L_q es un espacio cuasinormado con respecto a la cuasinorma $|[f]|_q := (E(|f|^q))^{1/q}$.

$L_q|_E$ es un espacio normado completo con respecto a la norma $\|\tilde{f}\|_q := |[f]|_q$

(4) $\mathbf{Z}$ es un espacio cuasimétrico con respecto a la cuasimétrica

$$\rho(f, g) := E\left(\frac{|f - g|}{1 + |f - g|}\right).$$

$\mathbf{Z}|_E$ es un espacio métrico completo con respecto a la métrica $\tilde{\rho}(\tilde{f}, \tilde{g}) := \rho(f, g)$

(5) $\mathbf{Z}|_E$ es un espacio $\mathbf{R}$-lineal métrico, es decir:

(a) $\mathbf{Z}|_E$ es un espacio $\mathbb{R}$-lineal según 1)

(b) $\mathbf{Z}|_E$ es un espacio métrico según 4)

(c) $+$, $\cdot$ son continuas respecto a $\tilde{\rho}$.

(6) $\mathbf{Z}|_E$ *no* es un espacio normable según II a 8); pues $\tilde{\rho}$ es invariante por translaciones; $\tilde{\rho}$ *no* es homogénea.

b) Caracterización de modos de convergencia en el sentido de la probabilidad por convergencia en el sentido de la topología.

(1) Convergencia en $L_\infty|_E$ es la convergencia esencial-uniforme: $\tilde{f}_u \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \tilde{f}$

Convergencia en $L_q|_E$ es la convergencia en el medio q-ésimo: $\tilde{f}_u \xrightarrow{\|\cdot\|_q} \tilde{f}$.

Definición. f_u convergente a f en probabilidad:

$$: \Longleftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} P(w \mid |f_u(w) - f(w)| > \varepsilon) \to 0 : f_u \xrightarrow{P} f$$

(2) Convergencia en $\mathbf{Z}|_E$ es la convergencia en probabilidad:

$$\tilde{f}_u \xrightarrow{\tilde{\rho}} \tilde{f} \Longleftrightarrow f_u \xrightarrow{P} f .$$

Directamente siguen por ejemplo estas formas simples para teoremas conocidos:

(3) $$\tilde{f}_u \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \tilde{f} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}_u \xrightarrow{\tilde{\rho}} \tilde{f}$$

(4) $$\tilde{f}_n \xrightarrow{\rho} \tilde{f} \wedge f_n \in L_1 \wedge \left(\bigwedge_n |f_n - f| \leq c\right) \text{ es válida } P\text{-c.s} \Rightarrow$$

$$\tilde{f}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \tilde{f} .$$

Bibliografía

[1] Kappos, Demetrios A.: *Strukturtheorie der wahrscheinlichkeits felder und räume*, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1960.

[2] Meschkowski, Herbert, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Bibliographisches Institut, Mannheim-Zürich, 1968, Hochschul Taschen Buch, 285 1285 a.

[3] Neveu Jacques, *Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeits Theorie*, R. Oldenbourg Verlag, München-Wien, 1969. Hay traducción al francés.

Obras básicas:

Estructuras:

[4] Bourbaki Nicolás, *Eléments de Mathématique, Théorie des ensembles*, Hermann, Paris, 1968.

Medida e integración:

[5] Bartle G. Robert, *The elements of integration*, John Wiley & Sons, Inc, New York-London-Sydney, 1966.

Analysis Funcional:

[6] Taylor E. Angus, *Introduction to functional Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York - London, 2º, 1961.

*   *   *