Boletín de Matemáticas
Volumen VIII, págs. 122-153

CONSTRUCCION DE EJEMPLOS DE CIERTAS CURVAS RECTIFICABLES

YU TAKEUCHI

1. Motivación.

En cierta ocasión mi colega, el profesor Darío Sánchez H. me comentó acerca del siguiente problema planteado a raíz de una duda surgida en la clase de geometría diferencial :

> Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ una función derivable para todo $x \in [a,b]$, si
>
> $$|f'(x)| = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in [a,b] \text{ (ver Nota)} \qquad (1)$$
>
> entonces ¿es f' continua en $[a,b]$?. En caso negativo, dar un contraejemplo.

[1] Si $n=1$ la respuesta es afirmativa. Si f' no fuera constante, o sea, si existieran x_1, x_2 tales que

$$f'(x_1) = 1 \quad , \quad f'(x_2) = -1$$

entonces, aplicando el *teorema del valor intermedio de la derivada*, un teorema poco conocido pero imoortante ([1] [2]), $f'(x)$ podría tomar cualquier valor entre -1 y 1 contradiciendo así la condición (1). Por lo tanto, f' es una función constante (1 ó -1), o sea que f' es continua.

Nota. En a consideramos la derivada por la derecha, $D_+ f(a)$, y en b consideramos la derivada por la izquierda, $D_- f(b)$.

[II] Para $n = 2$ el problema puede plantearse en la siguiente forma explícita :

> Sean f, g dos funciones de valor real derivables en $[a,b]$. Supóngase que
>
> $$\{ f'(t) \}^2 + \{ g'(t) \}^2 = 1 \qquad \text{para todo} \quad t \in [a,b] \tag{2}$$
>
> Entonces : ¿son continuas f' y g'? En caso negativo dar un contraejemplo.

Según *mi intuición* la respuesta era negativa. Y traté de encontrar un contraejemplo sencillo haciendo el siguiente análisis :

(i) Naturalmente el caso más sencillo es cuando f' tiene un sólo punto de discontinuidad, digamos en $c \in (a,b)$. Supongamos que existen los límites :

$$\lim_{t \to c^+} f'(t) = l_1 \, , \quad \lim_{t \to c^-} f'(t) = l_2 \, , \quad l_1 \neq l_2 \, . \tag{3}$$

Entonces la derivada por la derecha de f en c, $D_+ f(c)$, es igual a l_1 (Nota 1), mientras que la derivada por la izquierda de f en c, $D_- f(c)$, es igual a l_2 pero como

$$l_1 = D_+ f(c) \neq D_- f(c) = l_2 \, ,$$

entonces f no es derivable en c (absurdo) (Nota 2). Por lo tanto se debe tener que

$$\lim_{t \to c^+} f'(t) \qquad \text{no existe}$$

ó

$$\lim_{t \to c^-} f'(t) \qquad \text{no existe.}$$

Nota 1. Para $t > c$ tenemos :

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} = f'(\theta)$$

donde $\theta \in (c,t)$ (Teorema del valor medio), luego

$$D_+ f(c) = \lim_{\substack{t \to c \\ (t > c)}} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} = \lim_{\theta \to c} f'(\theta) = l_1 \qquad \bullet$$

Nota 2. Se puede demostrar [2] que si $l_1 = l_2$ entonces f es derivable en c y $f'(c) = l_1 = l_2$. $\bullet$

Se buscará entonces un contraejemplo en el caso en que f' es continua en $(0, b]$ y

$$\lim_{t \to 0^+} f'(t) \quad \text{no existe}.$$

(ii) Si f', g' son acotadas en $[a, b]$, entonces la siguiente ecuación paramétrica

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ \\ y = g(t) \end{array} \right. \qquad t \in [a, b] \qquad (4)$$

determina una *curva rectificable*. De acuerdo con la condición (2) el parámetro t representa la longitud sobre el arco desde $(f(0), g(0))$ hasta $(f(t), g(t))$ (ver Fig. 1). Por lo tanto, nuestro problema consiste en buscar una *curva rectificable* cuya recta tangente *oscila* en la vecindad del extremo de la curva (la curva debe además tener tangente en el punto extremo) y expresar la curva paramétrica utilizando el parámetro que representa la longitud sobre el arco.

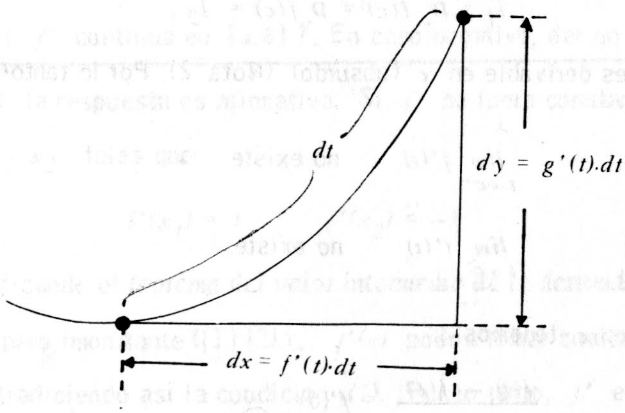

Fig. 1

(iii) Un ejemplo bien conocido de curva rectificable con la propiedad impuesta en (ii) es

$$y = F(x) \quad , \quad x \in [0, 1]$$

con

$$F(x) = x^2 \ sen \ \frac{1}{2} \qquad \text{si} \qquad x \in (0,1],$$

$$F(0) = 0 \ . \tag{5}$$

La longitud del arco de $(0,0)$ a $(x, \ F(x))$ es :

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \{F'(x)\}^2} \ dx$$

$$= \int_0^x \sqrt{1 + (2x \ sen \ \frac{1}{x} - cos \ \frac{1}{x})^2} \ dx. \tag{6}$$

La función $s(x)$ es estrictamente creciente. Sea f la función inversa de s :

$$t = s(x) \quad \text{sí y sólo si} \quad x = f(t) \ \ (= s^{-1}(t)) \ ;$$

entonces la ecuación paramétrica de la curva $y = F(x)$ con el parámetro t es :

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \ , \\ y &= F(f(t)) \ (\equiv g(t)) \ . \end{aligned}\right. \qquad t \in [0, \ s(1)] \tag{7}$$

Este fue el contraejemplo que mostré inicialmente al Dr. Sánchez.

(iv) No sé si la explicación anterior pudo convencer a mi colega, pero me pareció, según mi intuición, que algo estaba mal en el análisis anterior. Así comencé a comprobar, por cálculo, todas las condiciones impuestas en el problema. Es evidente que no hay problema para las dos funciones $f(t) = s^{-1}(t)$, $g(t) = F(f(t))$ si $t \neq 0$. En $t = 0$ tenemos :

$$f'(0) = \lim_{t \to o} \frac{f(t) - f(0)}{t - o} = \lim_{t \to o} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \to o} \frac{x}{s(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to o} \dfrac{s(x)}{x}} = \frac{1}{s'(0)}$$

si $s'(0)$ existe y $s'(0) \neq 0$, y

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\{f(t)\}^2 \, sen \, \dfrac{1}{f(t)} - 0}{t - 0} = \lim \frac{f(t)}{t} . f(t) \cdot sen \, \frac{1}{f(t)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} \cdot \lim_{x \to 0} x \cdot sen \, \frac{1}{x} = f'(0) \cdot 0 = 0 \, .$$

En el parágrafo 3 se demostrará que $s'(0)$ existe y $s'(0) > 1$, luego:

$$f'(0) < 1 \quad , \quad g'(0) = 0$$

o sea que

$$\{f'(0)\}^2 + \{g'(0)\}^2 < 1 \, ,$$

así este ejemplo *no satisface* la condición (2) de nuestro problema en $t = 0$. •

2. *Curvas rectificables con tangente en todo punto.*

I) Sea

$$x = f(t) \quad , \quad y = g(t) \quad , \quad t \in [0, b] \, , \tag{1}$$

la ecuación paramétrica de una curva rectificable donde el parámetro t representa la longitud sobre el arco de $(f(0), g(0))$ a $(f(t), g(t))$. Si f, g son derivables en $[0, b]$, y, f' y g' son continuas en $(0, b]$ entonces (ver Fig. 1):

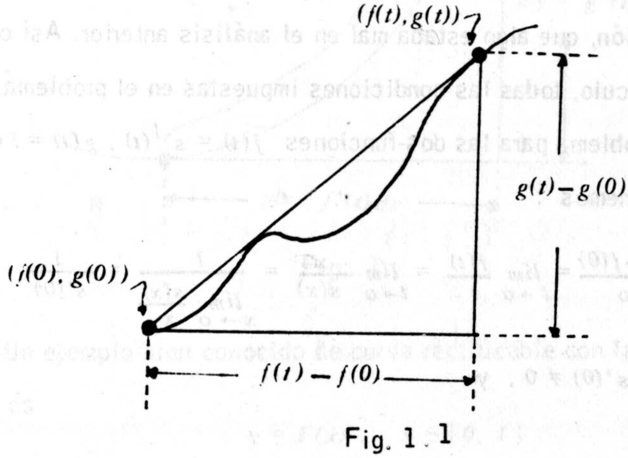

Fig. 1.1

$$\sqrt{\{ f(t) - f(0) \}^2 + \{ g(t) - g(0) \}^2} \leq t ,$$

o

$$\sqrt{\left\{ \frac{f(t) - f(0)}{t} \right\}^2 + \left\{ \frac{g(t) - g(0)}{t} \right\}^2} \leq 1 .$$

Tomando límite cuando $t \to 0^+$ se tiene que :

$$\{ f'(0) \}^2 + \{ g'(0) \}^2 \leq 1 . \tag{2}$$

Ahora, supongamos que f' y g' son continuas en $t=0$. Dado $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < t < \delta \quad \text{implica} \quad | f'(t) - f'(0) | < \varepsilon, \ | g'(t) - g'(0) | < \varepsilon . \tag{3}$$

Como δ es la longitud del arco de $(f(0), g(0))$ a $(f(\delta), g(\delta))$, dado $(\varepsilon\delta) > 0$ existe una partición de $[0, \delta]$, digamos (Nota) :

$$\{ 0 = t_o , t_1 , \dots , t_k , \dots , t_{n-1} , t_n = \delta \}$$

tal que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\{ f(t_k) - f(t_{k-1}) \}^2 + \{ g(t_k) - g(t_{k-1}) \}^2} > \delta - (\varepsilon \delta) . \tag{4}$$

Aplicando el teorema del valor medio a las funciones f y g en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ se tiene :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\{ f'(\xi_k) \}^2 + \{ g'(\eta_k) \}^2} . (t_k - t_{k-1}) > \delta - (\varepsilon \delta) \tag{5}$$

donde $\xi_k , \eta_k \in (t_{k-1} , t_k)$. Reemplazando (3) en (5) :

Nota. La longitud del arco es el extremo superior de la longitud de curvas poligonales inscritas al arco. El primer miembro de la desigualdad *(4)* es la longitud de la curva poligonal inscrita en los puntos $(f(t_k), g(t_k))$, $k = 0, 1, \dots, n$ a la curva dada en *(1)*.

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(|f'(0)|+\varepsilon)^2+(|g'(0)|+\varepsilon)^2} \cdot (t_k-t_{k-1}) > \delta-(\varepsilon\delta) \ ,$$

ó

$$\delta \cdot \sqrt{(|f'(0)|+\varepsilon)^2+(|g'(0)|+\varepsilon)^2} > \delta-(\varepsilon\delta) \ ,$$

esto es,

$$\sqrt{(|f'(0)|+\varepsilon)^2+(|g'(0)|+\varepsilon)^2} > 1-\varepsilon \ . \qquad (6)$$

Como ε es cualquiera se tiene que

$$\sqrt{(f'(0))^2+(g'(0))^2} \geq 1 \ . \qquad (7)$$

De (2) y (7) obtenemos

$$\{f'(0)\}^2+\{g'(0)\}^2 = 1 \ . \qquad (8)$$

Obsérvese que se obtiene la igualdad (8) cuando f' y g' son continuas en 0 ; si f' y g' son discontinuas en 0 es posible tener una desigualdad estricta en (2) .

II) Sean $f(t)$, $g(t)$ derivables en $[0, b]$ con derivadas continuas en $(0, b]$, si

$$\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2 = 1 \quad \text{para todo } t \neq 0 \qquad (9)$$

entonces la curva

$$x = f(t) \quad , \quad y = g(t) \quad , \quad t \in [a, b] \qquad (10)$$

es una curva rectificable ya que f y g son funciones de variación acotada en $[a, b]$.

Para todo $t > \varepsilon > 0$ se tiene que la longitud sobre el arco de $(f(\varepsilon), g(\varepsilon))$ a $(f(t), g(t))$ es igual a :

$$\int_{\varepsilon}^{t} \sqrt{\{f'(\eta)\}^2+\{g'(\eta)\}^2}\, d\eta = \int_{\varepsilon}^{t} 1 \ d\eta = t-\varepsilon \qquad (11)$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$, se tiene que t representa la longitud del arco de $(f(0), g(0))$ a $(f(t), g(t))$.

Ejemplo 1.

$$x = f(t) = \int_0^t \left| sen \frac{1}{\eta} \right| d\eta \,,$$

$$t \in [0, 1] \qquad (12)$$

$$y = g(t) = \int_0^t \left| \cos \frac{1}{\eta} \right| d\eta \,.$$

Como $f'(t) = \left| sen \frac{1}{t} \right|$, $g'(t) = \left| \cos \frac{1}{t} \right|$ $(t \neq 0)$, entonces (12) es la ecuación paramétrica de una curva donde el parámetro t representa la longitud sobre el arco ; f' y g' son discontinuas en $t = 0$, y

$$f'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t \left| sen \frac{1}{\eta} \right| d\eta \,,$$

$$g'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \cos \frac{1}{\eta} \right| d\eta \,.$$

En el parágrafo siguiente se ve que $f'(0)$ y $g'(0)$ existen y que $f'(0) = g'(0) = \frac{2}{\pi}$.

Luego :

$$\{ f'(0) \}^2 + \{ g'(0) \}^2 = \frac{8}{\pi^2} < 1 \,.$$

Ejemplo 2. Sean

$$f'(t) = \sqrt{\frac{1}{t} - (2n-1)} \qquad \text{en} \qquad \left(\frac{1}{2n} \,,\, \frac{1}{2n-1} \right] ,$$

$$= \sqrt{(2n+1) - \frac{1}{t}} \qquad \text{en} \qquad \left(\frac{1}{2n+1} \,,\, \frac{1}{2n} \right] .$$

$$g'(t) = \sqrt{2n - \frac{1}{t}} \qquad \text{en} \qquad \left(\frac{1}{2n} \,,\, \frac{1}{2n-1} \right] ,$$

$$= \sqrt{\frac{1}{t} - 2n} \qquad \text{en} \qquad \left(\frac{1}{2n+1} \,,\, \frac{1}{2n} \right] .$$

para $n \in \mathbb{N}$; entonces

$$\{ f'(t) \}^2 + \{ g'(t) \}^2 = 1 \qquad \text{para todo} \quad t \neq 0 \,.$$

La ecuación :

$$x = f(t) = \int_0^t f'(\eta)\, d\eta \quad ,$$

$$y = g(t) = \int_0^t g'(\eta)\, d\eta$$

es la ecuación paramétrica de una curva rectificable donde el parámetro t representa la distancia sobre el arco. Evidentemente f' y g' son discontinuas en $t = 0$, y

$$f'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t f'(\eta)\, d\eta \, ,$$

$$g'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t g'(\eta)\, d\eta \, .$$

En el parágrafo siguiente se ve que $f'(0)$ y $g'(0)$ existen y que $f'(0) = g'(0) = \frac{2}{3}$, luego

$$\{ f'(0) \}^2 + \{ g'(0) \}^2 = \frac{8}{9} < 1 \, .$$

III) ***Resumen.***

Sean $\alpha(t)$, $\beta(t)$ continuas en $(0, b]$ con $\{\alpha(t)\}^2 + \{\beta(t)\}^2 = 1$ para todo $t \neq 0$. Sean

$$f(t) = \int_0^t \alpha(\eta)\, d\eta \quad , \quad g(t) = \int_0^t \beta(\eta)\, d\eta \tag{13}$$

entonces la ecuación

$$x = f(t) \quad , \quad y = g(t) \quad , \quad t \in [0, b] \tag{14}$$

es la ecuación paramétrica de una curva rectificable donde el parámetro t representa la distancia sobre el arco ; f y g son derivables en $t = 0$ si existen los límites :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha(\eta)\, d\eta \quad , \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t \beta(\eta)\, d\eta . \tag{15}$$

Por (2), se tiene que

$$\{ f'(0) \}^2 + \{ g'(0) \}^2 \leq 1 .$$

En el parágrafo siguiente estudiaremos un método para calcular el valor o límites de la forma *(15)* .

3. *Derivada de una función definida por la integral .*

Sea f una función positiva y decreciente en $[1, \infty)$; si $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \neq \infty$ entonces :

$$\boxed{\lim_{b\to\infty} b \cdot \int_b^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} f(k)} \tag{1}$$

Demostración. Tenemos :

$$\sum_{k=n}^{\infty} f(k) \geq \int_n^{\infty} f(x)\, dx \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=n}^{\infty} f(k) - f(n) ,$$

luego :

$$n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \geq n \int_n^{\infty} f(x)\, dx \geq n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} f(k) - n\, f(n) .$$

Pero como $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \neq \infty$, y $\{ f(k) \}$ es decreciente, se tiene que (ver [3]) :

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot f(n) = 0 \quad , \tag{i}$$

luego :

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \geq \lim_{n\to\infty} n \cdot \int_n^{\infty} f(x)\, dx \geq \lim_{n\to\infty} n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} f(k) ,$$

o sea

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \int_n^{\infty} f(x)\, dx \quad .$$

Por otra parte, si $n = [b]$ (la parte entera de b),

$$b \cdot \int_b^\infty f(x)\,dx = (n + b - n)\left[\int_n^\infty f(x)\,dx - \int_n^b f(x)\,dx\right]$$

$$= n \cdot \int_n^\infty f(x)\,dx + (b-n)\cdot\int_n^\infty f(x)\,dx - b\cdot\int_n^b f(x)\,dx .$$

Tenemos :

$$0 \leq (b-n)\cdot\int_n^\infty f(x)\,dx \leq \int_n^\infty f(x)\,dx \longrightarrow 0 \quad (b \to \infty), \qquad (ii)$$

$$0 \leq b\cdot\int_n^b f(x)\,dx \leq b\cdot f(n) \leq (n+1)\cdot f(n) = n\cdot f(n) + f(n) \longrightarrow 0 \quad (b\to\infty), \quad (iii)$$

por lo tanto se tiene que

$$\lim_{b\to\infty} b\cdot\int_b^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} n\cdot\int_n^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=n}^\infty f(k). \quad \bullet$$

Nota. El resultado *(1)* puede ser generalizado de la siguiente forma :

Sea $\lambda(x)$ una función de valor positivo y derivable con derivada acotada, entonces

$$\boxed{\lim_{b\to\infty} \lambda(b)\cdot\int_b^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \lambda(n)\cdot\sum_{k=n}^\infty f(k)} \qquad (2)$$

Demostración. Sea M una cota de $\lambda'(x)$, aplicando el teorema del valor medio a la función λ en $[1, n]$ se tiene :

$$\lambda(n) - \lambda(1) = |\lambda'(\theta)\cdot(n-1)| \leq M\cdot(n-1).$$

esto es :

$$\lambda(n) = O(n)$$

La demostración anterior sólo sufrirá las siguientes modificaciones técnicas :

Se puede reemplazar el límite en *(i)* por :

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(n)\cdot f(n) = \lim_{n\to\infty} O(n)\cdot f(n) = 0 \ . \qquad (i')$$

y la relación (iii) es reemplazada por :

$$0 \leq \lambda(b)\cdot\int_n^b f(x)\,dx \leq \lambda(b)\cdot f(n) = O(n)\cdot f(n) \longrightarrow 0 \quad (b\to\infty) \ , \qquad (iii')$$

mientras que el límite en (ii) tomará la forma :

$$0 \leq |\,\lambda(b)-\lambda(n)\,|\int_n^\infty f(x)\,dx \leq M\int_n^\infty f(x)\,dx \longrightarrow 0 \quad (b\to\infty) \qquad (ii')$$

puesto que

$$|\,\lambda(b)-\lambda(n)\,| \leq M\cdot(b-n) \leq M \ . \qquad \bullet$$

Ejemplo 1.

(i) $$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \lim\, n\cdot\int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k(\log k)^2} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\int_n^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log n} = \infty$$

(iii) $$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^\lambda} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\int_n^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda-1}\cdot\frac{1}{n^{\lambda-2}}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad 1<\lambda<2 \\ 1 & \text{si} \quad \lambda = 2 \\ 0 & \text{si} \quad \lambda > 2 \ . \end{cases}$$

(iv) $$\lim_{n\to\infty} (\log n)\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k(\log k)^2} = \lim_{n\to\infty} \log n\cdot\int_n^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2} = 1$$

(v) $$\lim_{n\to\infty} n^{\lambda-1}\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^\lambda} = \lim_{n\to\infty} n^{\lambda-1}\cdot\int_n^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{\lambda-1} \quad (\lambda>1) \ . \qquad \bullet$$

II) Sea f una función positiva y decreciente en $[1, \infty)$ tal que $\lim_{n \to \infty} n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \neq \infty$.

Si g es acotada, y

$$\int_k^{k+1} g(x)\,dx = c + o(1) \qquad (k \to \infty)$$

entonces

$$\boxed{\lim_{b \to \infty} b \cdot \int_b^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx = c \cdot \lim_{b \to \infty} b \cdot \int_b^{\infty} f(x)\,dx} \qquad (3)$$

Demostración. Basta demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot \int_n^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx = c \cdot \lim_{n \to \infty} n \cdot \int_n^{\infty} f(x)\,dx . \qquad (3')$$

Tenemos

$$\int_n^{\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx = \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} g(x) \cdot f(x)\,dx$$

Sea

$$f(x) = f(k) + \Delta_k(x) , \quad x \in [k, k+1]$$

entonces

$$|\Delta_k(x)| \leq f(k) - f(k+1) ,$$

luego :

$$\int_k^{k+1} g(x)\,f(x)\,dx = \int_k^{k+1} \{ f(k) + \Delta_k(x) \}\, g(x)\,dx = f(k) \{ c + o(1) \} + \int_k^{k+1} \Delta_k(x)\,g(x)\,dx ,$$

donde

$$\left| \int_k^{k+1} \Delta_k(x)\,g(x)\,dx \right| \leq \int_k^{k+1} |\Delta_k(x)|\,|g(x)|\,dx \leq M(f(k) - f(k+1))$$

(M es una cota de $|g(x)|$).

Por lo tanto :

$$\int_n^{\infty} g(x)\cdot f(x)\, dx = \sum_{k=n}^{\infty} f(k)\cdot\{ c + o(1) \} + \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} \Delta_k(x). g(x)\, dx = c \sum_{k=n}^{\infty} f(k) + \sum_{k=n}^{\infty} f(k)\cdot o(1)$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} \Delta_k(x)\; g(x)\, dx .$$

Pero :

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=n}^{\infty} f(k) \cdot o(1) = 0$$

ya que

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=n}^{\infty} f(k) \neq \infty .$$

$$\left| n\cdot\sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} \Delta_k(x)\; g(x)\, dx \right| \leq n\cdot\sum_{k=n}^{\infty} M \cdot \{ f(k) - f(k+1) \}$$

$$= M \cdot n \cdot f(n) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) ,$$

por lo tanto tenemos :

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\int_n^{\infty} g(x)\cdot f(x)\, dx = c \cdot \lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=n}^{\infty} f(k) = c\cdot\lim_{n\to\infty} n\cdot\int_n^{\infty} f(x)\, dx . \qquad \bullet$$

Nota. El resultado *(3)* puede ser generalizado como sigue :

$$\boxed{\lim_{b\to\infty} \lambda(b)\cdot\int_b^{\infty} g(x)\cdot f(x)\, dx = c \cdot \lim_{b\to\infty} \lambda(b)\cdot\int_b^{\infty} f(x)\, dx} \qquad (4)$$

donde λ es de valor positivo y derivable con derivada acotada. ■

III) Sea f una función positiva y decreciente en $[1, \infty)$ con

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=n}^{\infty} f(k) \neq \infty .$$

Si g es acotada y

$$\int_{a+ns}^{a+(n+1)s} g(x)\, dx = c + o(1) \qquad (n \to \infty)$$

entonces

$$\boxed{\lim_{b\to\infty} b\cdot\int_b^\infty g(x)\cdot f(x)\,dx = \frac{c}{s}\cdot\lim_{b\to\infty} b\int_b^\infty f(x)\,dx} \qquad (5)$$

Demostración. Hacemos el cambio de variable :

$$a + s\cdot y = x$$

entonces

$$\lim_{b\to\infty} b\cdot\int_b^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} b\cdot\int_{\frac{b-a}{s}}^\infty f(a+sy)\cdot s\,.\,dy$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{b-a}{s}\, s^2\cdot\int_{\frac{b-a}{s}}^\infty f(a+s\,.\,y)\,dy$$

$$= s^2\cdot\lim_{B\to\infty} B\int_B^\infty f(a+s\cdot y)\,dy$$

donde

$$B = \frac{b-a}{s}\,.$$

Por otra parte :

$$\int_{a+sn}^{a+s(n+1)} g(x)\,dx = \int_n^{n+1} g(a+sy)\,s\,dy = s\,.\int_n^{n+1} g(a+sy)\,dy\,,$$

luego :

$$\int_n^{n+1} g(a+sy)\,dy = \frac{c}{s} + o(1) \qquad (n\to\infty)\,.$$

Aplicando (3) :

$$\lim_{b\to\infty} b\cdot\int_b^\infty f(x)\,g(x)\,dx = s^2.\lim_{B\to\infty}\int_B^\infty f(a+sy).g(a+sy)\,dy$$

$$= s^2\,.\,\frac{c}{s}\,.\lim_{B\to\infty} B\int_B^\infty f(a+sy)\,dy$$

$$= s^2 \cdot \frac{c}{s} \cdot \frac{1}{s^2} \lim_{b\to\infty} b \cdot \int_b^\infty f(x)\, dx = \frac{c}{s} \lim_{b\to\infty} b \int_b^\infty f(x)\, dx \;. \qquad \bullet$$

Nota. El resultado (5) puede generalizarse como sigue :

$$\boxed{\lim_{b\to\infty} \lambda(b) \int_b^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \frac{c}{s} \lim_{b\to\infty} \lambda(b) \cdot \int_b^\infty f(x)\, dx \;,} \qquad (6)$$

donde λ es del valor positivo y derivable con derivada acotada. •

Ejemplo 1. Sean

$$\begin{cases} f(t) = \int_o^t \cos \frac{1}{\eta}\, d\eta \;, \\ g(t) = \int_o^t \operatorname{sen} \frac{1}{\eta}\, d\eta \;, \end{cases}$$

tenemos :

$$f'(0) = \lim_{t\to o^+} \frac{1}{t} \cdot \int_o^t \cos \frac{1}{\eta}\, d\eta \quad (\frac{1}{\eta} = x) \;=\; \lim_{t\to o^+} (\frac{1}{t}) \int_{(1/t)}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx = 0$$

puesto que

$$\lim_{b\to\infty} b \,.\, \int_b^\infty \frac{dx}{x^2} = 1 \;,$$

$$\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \cos x\, dx = 0 \;.$$

De la misma forma se tiene que

$$g'(0) = 0 \;.$$

Ejemplo 2. (ver Ejemplo 1, parágrafo 2) .

Sean $f(t) = \int_o^t \left| \operatorname{sen} \frac{1}{\eta} \right| d\eta \;,$

$$g(t) = \int_o^t \left| \cos \frac{1}{\eta} \right| d\eta \;.$$

Tenemos :

$$f'(0) = \lim_{t\to o^+} \frac{1}{t} \int_o^t \left| sen \frac{1}{\eta} \right| d\eta \quad (\frac{1}{\eta} = x) = \lim_{t\to o^+} (\frac{1}{t}) \int_{(1/t)}^{\infty} \left| \frac{sen\ x}{x^2} \right| dx = \frac{2}{\pi}$$

puesto que

$$\boxed{\lim_{b\to\infty} b . \int_b^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 ,}$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |sen\ x|\ dx = 2 .$$

De la misma manera, se tiene que

$$g'(0) = \frac{2}{\pi} .$$

Ejemplo 3. (Ver (6) del parágrafo 1).

Sea $s(x) = \int_o^x \sqrt{1 + (2x\ sen \frac{1}{x} - cos \frac{1}{x})^2}\ dx$.

Tenemos :

$$s'(0) = \lim_{x\to o^+} \frac{1}{x} \int_o^x \sqrt{1+(2\eta\ sen \frac{1}{\eta} - cos \frac{1}{\eta})^2}\ d\eta \qquad (\frac{1}{\eta} = t)$$

$$= \lim_{x\to o^+} (\frac{1}{x}) \int_{(1/x)}^{\infty} \frac{\sqrt{1+(cos\ t - \frac{2}{t}\ sen\, t)^2}}{t^2}\ dt \quad .$$

Pero :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sqrt{1 + \{ cos\, t - \frac{2}{t}\ sen\, t \}^2}\ dt$$

$$= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left\{ \sqrt{1 + cos^2 t} + O(\frac{1}{n}) \right\}\ dt$$

$$= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sqrt{1 + cos^2 t}\ dt + O(\frac{1}{n})$$

$$= \sqrt{2} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{2} sen^2 t}\ dt + O(\frac{1}{n})$$

$$= 2\sqrt{2} \int_o^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{2}\ sen^2 t}\ dt + O(\frac{1}{n})$$

$$= 2\sqrt{2}\ E(\frac{1}{\sqrt{2}}) + O(\frac{1}{n})$$

donde $E(\frac{1}{\sqrt{2}})$ es la integral elíptica. (Ver [4])

Por lo tanto se tiene :

$$s'(0) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\ E(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot 0\ 44\,\pi \doteq 1,24\ldots > 1\ .$$

Ejemplo 4. (Ver Ejemplo 2, parágrafo 2).

Sean
$$\alpha(t) = \begin{cases} \sqrt{t-(2n-1)} & \text{en}\quad [2n-1\ ,\ 2n) \\ \sqrt{(2n+1)-t} & \text{en}\quad [2n\ ,\ 2n+1)\ , \end{cases}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} \sqrt{2n-t} & \text{en}\quad [2n-1\ ,\ 2n) \\ \sqrt{t-2n} & \text{en}\quad [2n,\ 2n+1)\ , \end{cases}$$

$$f(t) = \int_o^t \alpha(\frac{1}{\eta})\,d\eta\ ,\quad g(t) = \int_o^t \beta(\frac{1}{\eta})\,d\eta\ .$$

Tenemos :

$$f'(0) = \lim_{t\to o^+}\frac{1}{t}\int_o^t \alpha(\frac{1}{\eta})\,d\eta \quad (\frac{1}{\eta} = x) = \lim_{t\to o^+}(\frac{1}{t})\int_{(1/t)}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{x^2}\,dx = \frac{2}{3}$$

puesto que

$$\int_{2n-1}^{2n+1} \alpha(x)\,dx = \int_{2n-1}^{2n} \sqrt{x-(2n-1)}\,dx + \int_{2n}^{2n+1} \sqrt{(2n+1)-x}\cdot dx$$

$$= \int_o^1 \sqrt{x}\,dx + \int_o^1 \sqrt{1-x}\,dx = \frac{4}{3}\ .$$

De la misma forma se tiene que

$$g'(0) = \frac{2}{3} .$$

***Ejemplo* 5.** Sean

$$f(t) = \int_o^t | \cos e^{1/\eta} | \, d\eta \ , \ g(t) = \int_o^t | \operatorname{sen} e^{1/\eta} | \, d\eta$$

entonces tenemos :

$$f'(0) = \lim_{t \to o^+} \frac{1}{t} \cdot \int_o^t | \cos e^{1/\eta} | \, d\eta \qquad (e^{1/\eta} = x)$$

$$= \lim_{t \to o^+} \left(\frac{1}{t}\right) \int_{e^{1/t}}^{\infty} \frac{| \cos x |}{x (\log x)^2} \, dx \quad (e^{1/t} = b)$$

$$= \lim_{b \to \infty} (\log b) \cdot \int_b^{\infty} \frac{| \cos x |}{x (\log x)^2} \, dx = \frac{2}{\pi} ,$$

puesto que

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} | \cos x | \, dx = 2 ,$$

$$\lim_{b \to \infty} (\log b) \cdot \int_b^{\infty} \frac{dx}{x (\log x)^2} = 1 .$$

De la misma forma se tiene que $g'(0) = \frac{2}{\pi}$, luego :

$$\{ f'(0) \}^2 + \{ g'(0) \}^2 = \frac{8}{\pi^2} < 1 .$$

4 *Construcción del ejemplo deseado.*

I) En los ejemplos del parágrafo anterior obtuvimos funciones $f(t)$ y $g(t)$ derivables en $[0, b]$ tales que

$$\{ f'(t) \}^2 + \{ g'(t) \}^2 = 1 \quad \text{para todo} \quad t \neq 0 \, . \tag{1}$$

pero

$$\{ f'(0) \}^2 + \{ g'(0) \}^2 < 1 \, . \tag{2}$$

Nótese que la desigualdad estricta (2) implica la discontinuidad de f' y de g' en $t = 0$ (II , parágrafo 2) . Con el objeto de buscar las funciones f y g con

$$\{ f'(0) \}^2 + \{ g'(0) \}^2 = 1 \tag{3}$$

tratemos de generalizar el método empleado en el Ejemplo 4 del parágrafo 3 como sigue :

Sea $\alpha(t)$ una función continua y periódica con período τ :

$$\alpha(t + \tau) = \alpha(t) \, , \quad \text{para todo} \quad t \in [0, \infty) \tag{4}$$

tal que

$$0 \leq \alpha(t) \leq 1 \, ,$$

y sea

$$\beta(t) = \sqrt{1 - \{ \alpha(t) \}^2} \, .$$

Definimos :

$$f(t) = \int_0^t \alpha\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta \, , \quad g(t) = \int_0^t \beta\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta \tag{5}$$

entonces

$$f'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta \qquad \left(\frac{1}{\eta} = x\right)$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{1}{t}\right) \int_{(1/t)}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{x^2} \, dx = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{\tau} \alpha(x) \, dx \tag{6}$$

ya que

$$\int_{n\tau}^{n\tau+\tau} \alpha(x)\, dx = \int_0^{\tau} \alpha(x)\, dx \qquad \text{(por (4))}.$$

También :

$$g'(0) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \beta(x)\, dx . \tag{7}$$

Tenemos entonces :

$$\{ f'(0) \}^2 + \{ g'(0) \}^2 = \frac{1}{\tau^2} \int_0^{\tau}\int_0^{\tau} \alpha(x)\, \alpha(y)\, dx\, dy + \frac{1}{\tau^2} \int_0^{\tau}\int_0^{\tau} \beta(x)\, \beta(y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\tau^2} \int_0^{\tau}\int_0^{\tau} \{ \alpha(x)\, \alpha(y) + \beta(x)\, \beta(y) \}\, d(x, y)$$

$$\leq \frac{1}{\tau^2} \int_0^{\tau}\int_0^{\tau} \sqrt{(\alpha(x))^2 + (\beta(x))^2}\, \sqrt{(\alpha(y))^2 + (\beta(y))^2}\, d(x,y) \tag{8}$$

$$= \frac{1}{\tau^2} \int_0^{\tau}\int_0^{\tau} d(x, y) = 1 .$$

En (8) se tiene igualdad sí y sólo si

$(\alpha(x), \beta(x)) = (\alpha(y), \beta(y))$ para toda pareja (x, y), puesto que si

$(\alpha(x_o), \beta(x_o)) \neq (\alpha(y_o), \beta(y_o))$ para alguna pareja (x_o, y_o) entonces

$$\alpha(x_o)\, \alpha(y_o) + \beta(x_o)\, \beta(y_o) < \sqrt{\{\alpha(x_o)\}^2 + \{\beta(x_o)\}^2}\, \sqrt{\{\alpha(y_o)\}^2 + \{\beta(y_o)\}^2} = 1,$$

por la continuidad de $\alpha(x)\cdot\alpha(y) + \beta(x)\cdot\beta(y)$ se tiene que

$$\frac{1}{\tau^2} \int_0^{\tau}\int_0^{\tau} \{ \alpha(x)\, \alpha(y) + \beta(x)\, \beta(y) \}\, d(x, y) < \frac{1}{\tau^2} \cdot \tau^2 = 1 .$$

Por lo tanto, se tiene la igualdad (3) si y sólo si $f'(t) = \alpha(\frac{1}{t})$ = constante ,

$g'(t) = \beta(\frac{1}{t})$ = constante, luego f' y g' son continuas en $t = 0$.

Esto es : *no es posible* encontrar un ejemplo deseado por este método.

II) En el número I se observó que es imposible obtener funciones f y g en la forma (5) tales que f' y g' son discontinuas en 0 con $\{f'(0)\}^2 + \{g'(0)\}^2 = 1$ si se emplea una *función periódica* $\alpha(t)$. Ahora utilizando funciones *no periódicas* construiremos f y g como sigue :

Sean

$$\alpha(x) = \begin{cases} |\operatorname{sen} n(x-n)| & \text{en } [n, n+\frac{\pi}{2n}] \\ 1 & \text{en } [n+\frac{\pi}{2n}, n+1-\frac{\pi}{2n}] \\ |\operatorname{sen} n(x-n-1)| & \text{en } [n+1-\frac{\pi}{2n}, n+1], \end{cases} \tag{9}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} |\cos n(x-n)| & \text{en } [n, n+\frac{\pi}{2n}] \\ 0 & \text{en } [n+\frac{\pi}{2n}, n+1-\frac{\pi}{2n}] \\ |\cos n(x-n-1)| & \text{en } [n+1-\frac{\pi}{2n}, n+1], \end{cases} \tag{10}$$

entonces α y β son continuas para todo x, y

$$\{\alpha(x)\}^2 + \{\beta(x)\}^2 = 1 \quad \text{para todo } x.$$

Además :

$$\int_n^{n+1} \alpha(x)\,dx = 2\cdot\int_0^{\pi/2n} |\operatorname{sen} nx|\,dx + \left(1-\frac{\pi}{n}\right) = 1-\frac{\pi-2}{n} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\int_n^{n+1} \beta(x)\,dx = 2\cdot\int_0^{\pi/2n} |\cos nx|\,dx = \frac{2}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Definimos :

$$f_0(t) = \int_0^t \alpha\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta, \quad g_0(t) = \int_0^t \beta\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta$$

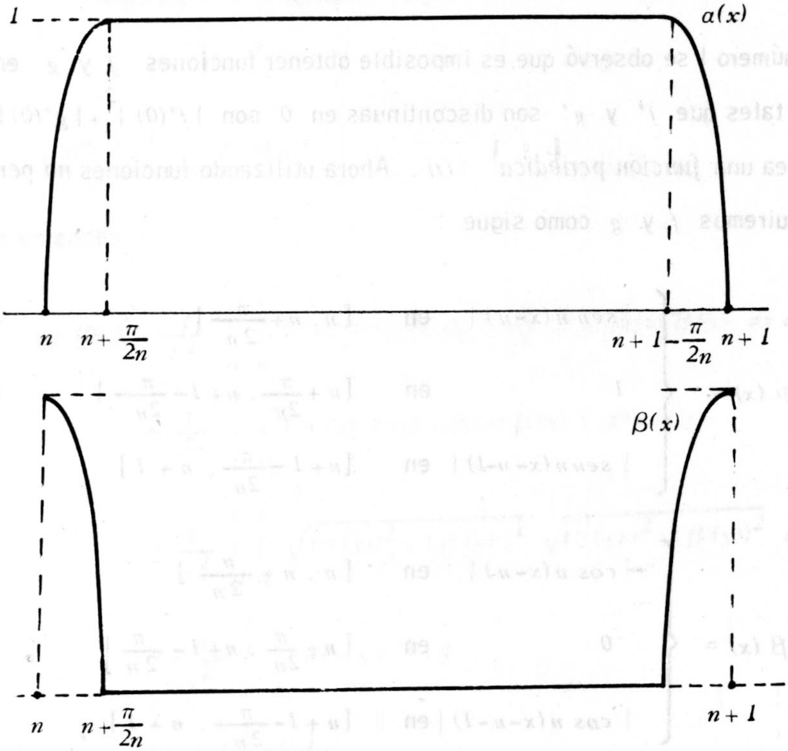

Fig. 1

entonces

$$f_o'(0) = \lim_{t\to o^+} \frac{1}{t} \cdot \int_o^t \alpha\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta \qquad \left(\frac{1}{\eta} = x\right)$$

$$= \lim_{t\to o^+} \left(\frac{1}{t}\right) \cdot \int_{(1/t)}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{x^2}\, dx = 1 \;,$$

$$g_o'(0) = \lim_{t\to o^+} \frac{1}{t} \cdot \int_o^t \beta\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta \qquad \left(\frac{1}{\eta} = x\right)$$

$$= \lim_{t\to o^+} \left(\frac{1}{t}\right) \cdot \int_{(1/t)}^{\infty} \frac{\beta(x)}{x^2}\, dx = 0 \;.$$

Así

$$\{f_o'(0)\}^2 + \{g_o'(0)\}^2 = 1^2 + 0^2 = 1 ,$$

además f_o' y g_o' son discontinuas en $t = 0$, más precisamente, la oscilación de f_o' (ó de g_o') es igual a 1 en $t = 0$. ●

III) En este numeral (ver Nota), utilizando las funciones f_o y g_o obtenidas en [II] , construiremos una pareja f y g tales que $\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2 = 1$ para todo $t \in [0, 1]$, y que el conjunto de *puntos de discontinuidad* de f' (o g') es de *medida mayor que cero* .

Sea $\{x_n\}$ el conjunto de todos los números racionales en $(0, 1)$; sea

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(x_n - \frac{1}{2^{n+2}} , x_n + \frac{1}{2^{n+2}} \right) \cap (0, 1)$$

entonces

$$m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{n+2}} = \frac{1}{2} < 1 .$$

El conjunto A es denso en $[0, 1]$ ya que A contiene todos los números racionales en $(0, 1)$. Como A es abierto, se puede expresarlo como unión disyunta de intervalos abiertos, digamos :

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k , b_k) .$$

(i) En $[a_k , b_k]$ definimos la función $g_k(t)$ como sigue :

$$g_k(t) = g_o(t - a_k) \quad \text{en} \quad [a_k , a_k + j_k] \tag{11}$$

donde j_k es la máxima raíz de $g_o'(x) = 0$ en el intervalo $(0 , \frac{b_k - a_k}{2})$.

Nota. Este es un método similar a la construcción de la función de Volterra [5] .

$$g_k(t) = g_k(a_k + j_k) = g_o(j_k) \qquad \text{en } \left[a_k + j_k, \frac{a_k - b_k}{2} \right] \tag{12}$$

$g_k(t)$ es simétrica con respecto a $\dfrac{a_k + b_k}{2}$ (ver Fig. 2) . (13)

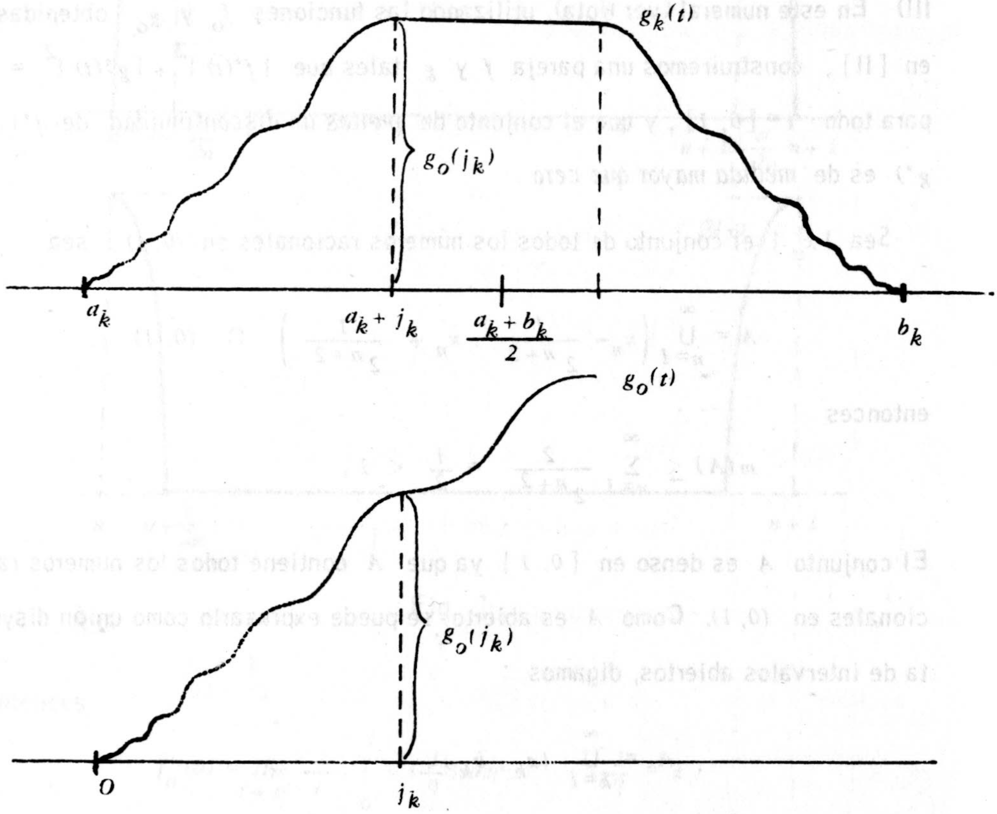

Fig. 2

Se tiene que g_k es derivable en $[a_k, b_k]$, y g'_k es discontinua en $t = a_k$, además :

$$\begin{aligned} D_+ g_k(a_k) &= D_+ g_o(0) = 0 \,, \\ D_- g_k(b_k) &= -D_+ g_o(0) = 0 \,. \end{aligned} \tag{14}$$

Esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe δ tal que

$$0 < t - a_k < \delta \quad \text{implica} \quad 0 \leq g_k(t) \leq \varepsilon\,(t - a_k)\,,$$
$$0 < b_k - t < \delta \quad \text{implica} \quad 0 \leq g_k(t) \leq \varepsilon\,(b_k - t)\,. \qquad (15)$$

Nótese que δ es independiente de k puesto que (15) es la derivabilidad de $g_o(t)$ en $t = 0$.

(ii) Sea ahora

$$g(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \in [0, 1] - A$$
$$g(t) = g_k(t) \quad \text{si} \quad t \in (a_k, b_k)\,. \qquad (16)$$

Vamos a demostrar que g *es derivable en* $[0, 1] - A$, *y que* $g'(t) = 0$ *si* $t \notin A$.

Sea $t_o \in [0, 1] - A$. Dado $\varepsilon > 0$ escogemos $\delta > 0$ que cumple la condición (15) (para todo k).

Si $t \in (t_o - \delta,\ t_o + \delta)$, $t \notin A$ entonces :

$$|\, g(t) - g(t_o) \,| = |\, 0 - 0 \,| = 0 < \varepsilon\,.$$

Si $t \in (t_o, t_o + \delta) \cap (a_i, b_i)$, entonces por (15) :

$$g(t) - g(t_o) = g_i(t) < \varepsilon\,(t - a_i) < \varepsilon\,(t - t_o)\,. \quad \text{(Fig. 3)}$$

Si $t \in (t_o - \delta,\ t_o) \cap (a_j, b_j)$, entonces por (15) tenemos :

$$g(t) - g(t_o) = g_j(t) < \varepsilon\,(b_j - t) < \varepsilon\,(t_o - t) \quad \text{(Fig. 3)}$$

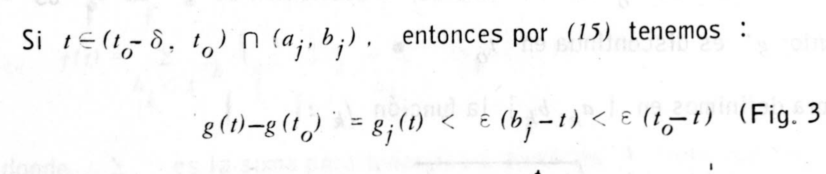

Fig. 3

Por lo tanto tenemos :

$$\left| \frac{g(t) - g(t_o)}{t - t_o} \right| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in (t_o - \delta \, , \, t_o + \delta) \; .$$

esto es :

$$g'(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{g(t) - g(t_o)}{t - t_o} = 0 \; . \quad \bullet$$

Como $g'(t) = g'_i(t)$ en $t \in (a_i, b_i)$, entonces g' es discontinua en $t = a_i$, o más precisamente, la oscilación de g' en a_i es igual a 1.

(iii) g' *es discontinua en* $[0, 1] - A$.

Sea $t_o \in [0, 1] - A$. En cualquier vecindad de t_o existen puntos de A ya que A es denso en $[0, 1]$, esto es, cualquier vecindad de t_o contiene algún a_i (Fig. 4).

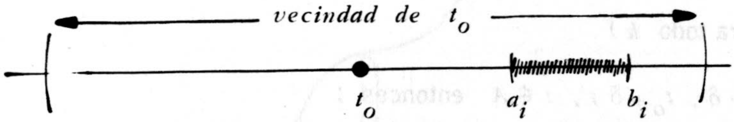

Fig. 4

Como la oscilación de g' en a_i es 1, entonces la oscilación de g' en *cualquier vecindad* de t_o es 1, esto es, la oscilación de g' en t_o es 1, por lo tanto g' es discontinua en t_o. $\bullet$

(iv) Ahora definimos en $[a_k, b_k]$ la función f_k :

$$f_k(t) = \int_{a_k}^{t} \sqrt{1 - (g'_k(\eta))^2} \; d\eta \; . \tag{17}$$

Entonces f_k es derivable en $[a_k, b_k]$, y f'_k es discontinua en $t = a_k$.

Además :

$$D_+ f_k(a_k) = D_+ f_o(0) = 1 \; ,$$

$$D_- f_k(b_k) = D_+ f_o(0) = 1 \; . \tag{18}$$

Esto es : dado $\varepsilon > 0$ existe δ tal que

$$0 < t - a_k < \delta \quad \text{implica} \quad \left| \frac{f_k(t)}{t - a_k} - 1 \right| < \varepsilon \; , \tag{19}$$

$$0 < b_k - t < \delta \quad \text{implica} \quad \left| \frac{f_k(t) - f_k(b_k)}{t - b_k} - 1 \right| < \varepsilon \; . \tag{20}$$

Nótese que δ es independiente de k puesto que *(19)* y *(20)* representan la derivabilidad de la función f_o (definida en el número II) en $t = 0$.

(v) Ahora se define la función $f(t)$ en $[0, 1]$ como sigue :

Si $t \notin A$

$$f(t) = \sum_{b_k \leq t} f_k(b_k) + \{ t - \sum_{b_k \leq t} (b_k - a_k) \} \tag{21}$$

donde $\sum\limits_{b_k \leq t}$ es la suma para todos los subíndices k tales que $b_k \leq t$.

Si $t \in (a_i, b_i)$

$$f(t) = \sum_{b_k < t} f_k(b_k) + \{ a_i - \sum_{b_k < t} (b_k - a_k) \} + f_i(t) \, , \tag{22}$$

donde $\sum\limits_{b_k < t}$ es la suma para todos los subíndices k tales que $b_k < t$.

Como $f'(t) = f'_k(t)$ para $t \in (a_k, b_k)$, entonces f es derivable en A y f' es discontinua en $t = a_k$.

Vamos a demostrar que f es derivable en $[0, 1] - A$, y que $f'(t) = 1$ si $t \notin A$.

Sea $t_o \in [0, 1] - A$. Dado $\varepsilon > 0$ escogemos δ que satisface las condiciones *(19)* y *(20)* (para todo k).

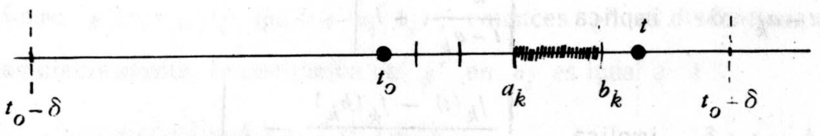

Fig. 5

Si $t \notin A$, $t_o < t < t_o + \delta$ entonces por *(21)* tenemos :

$$f(t) - f(t_o) = \sum_{t_o < b_k \leq t} f_k(b_k) + (t - t_o) - \sum_{t_o < b_k \leq t} (b_k - a_k),$$

ó

$$\{ f(t) - f(t_o) \} - (t - t_o) = \sum_{t_o < b_k \leq t} \left[\frac{f_k(b_k)}{b_k - a_k} - 1 \right] \cdot (b_k - a_k).$$

Por *(19)* se tiene :

$$\left| \frac{f_k(b_k)}{b_k - a_k} - 1 \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad t_o < b_k \leq t, \tag{23}$$

así :

$$| \{ f(t) - f(t_o) \} - (t - t_o) | \leq \sum_{t_o < b_k \leq t} \left| \frac{f_k(b_k)}{b_k - a_k} - 1 \right| (b_k - a_k)$$

$$< \varepsilon \sum_{t_o < b_k \leq t} (b_k - a_k) < \varepsilon \, (t - t_o) \, ,$$

esto es,

$$\left| \frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o} - 1 \right| < \varepsilon \, . \tag{24}$$

De la misma manera, si $t \notin A$, $t_o - \delta < t < t_o$ se tiene también la desigualdad (24).

Si $t \in (a_i, b_i)$, $t_o < t < t_o + \delta$, entonces por (21) y (22) tenemos : Fig. 6)

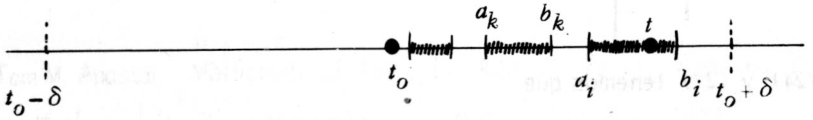

Fig. 6

$$f(t) - f(t_o) = f(t) - f(a_i) + f(a_i) - f(t_o)$$

$$= f_i(t) + \sum_{t_o < b_k < a_i} f_k(b_k) + (a_i - t_o) - \sum_{t_o < b_k < a_i} (b_k - a_k)$$

$$= f_i(t) + (t - t_o) + (a_i - t) + \sum_{t_o < b_k < a_i} \left[\frac{f_k(b_k)}{b_k - a_k} - 1 \right] \cdot (b_k - a_k) \, . \tag{25}$$

Utilizando (23), (25) toma la forma :

$$\{ f(t) - f(t_o) \} - f_i(t) - (t - t_o) - (a_i - t) < \varepsilon \, (t - t_o) \, .$$

o
$$\left| \frac{f(t)-f(t_o)}{t-t_o} - 1 - \frac{f_i(t) + (a_i - t)}{t-t_o} \right| < \varepsilon \tag{26}$$

Pero :

$$\left| - \frac{f_i(t) + (a_i - t)}{t - t_o} \right| = \left| \frac{(t-a_i)}{t-t_o} \left[1 - \frac{f_i(t)}{t-a_i} \right] \right| < \varepsilon \, \frac{t-a_i}{t-t_o} \quad \text{(por (19))},$$

luego :

$$\left| \frac{f(t)-f(t_o)}{t-t_o} - 1 \right| < \varepsilon + \left| \frac{f_i(t) + (a_i - t)}{t-t_o} \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon . \tag{27}$$

De la misma manera, si $t \in A \cap (t_o - \delta , t_o)$ se obtiene también la desigualdad (27) .

De (24) y (27) tenemos que

$$f'(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{f(t)-f(t_o)}{t-t_o} = 1 . \tag{28}$$

(vi) En resumen, f y g son derivables en $[0, 1]$, y

$$f'(t) = 1 , \quad g'(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \in [0, 1] - A . \tag{29}$$

De (17) se tiene que

$$\{ f'(t) \}^2 + \{ g'(t) \}^2 = 1 \quad \text{si} \quad t \in A . \tag{30}$$

De (29) y (30) :

$$\{ f'(t) \}^2 + \{ g'(t) \}^2 = 1 \qquad \text{para todo} \quad t \in [0, 1] . \tag{31}$$

Además g' es continua en A , y discontinua en $[0, 1] - A$. Por (31) se ve que f' es continua en A y discontinua en $[0, 1] - A$. El conjunto de puntos de discontinuidad de f' (o g') es $[0, 1] - A$ cuya medida es mayor que $\frac{1}{2}$, así que f' (o g') no es integrable según Riemann en $[0, 1]$.

NOTA DEL AUTOR.- En general encontrar un ejemplo con determinadas propiedades es una tarea difícil, puesto que se trata de un trabajo es algo parecido al de un detective que persigue a un criminal. En este artículo el autor ha querido mostrar el desarrollo completo de la búsqueda de un ejemplo de un problema surgido en clase, siguiendo paso por paso el camino pisado por el autor para llegar a la meta, con el objeto de que los lectores puedan aprender algunos métodos de estudio matemático.

Referencias

[1] Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison Wesley, Reading, 1957.

[2] Yu Takeuchi, *Análisis Matemático*, U. Nal. de Colombia, 1974.

[3] Yu Takeuchi, *Sucesiones y Series*, Tomo I, U. Nal. de Colombia, 1971.

[4] I. S. Gradshteyn, *Table of integrals*, Academic Press, New York, 1965.

[5] E. Hobson, *The theory of functions of a real variable*, Dover, New York, 1957

* * *