Boletín de Matemáticas
Vol. VIII, pp. 154-169

LA METRICA DE LOS MODELOS UNIFORMES EN COSMOLOGIA (*)

EDUARDO BRIEVA

1. ***Introducción.*** El objeto de estas notas es presentar brevemente el problema cosmológico, haciendo énfasis en la obtención de la métrica de los llamados modelos uniformes. La Cosmología se propone investigar el Universo en conjunto, a pesar de que solo una porción es accesible por medio de la observación astronómica. Se trata, pues, de desarrollar una mecánica del sistema de galaxias, utilizando hipótesis simplificadoras convenientemente justificadas, y construir modelos que deberán reproducir, en la medida de lo posible, los fenómenos observados. Es evidente que la representación del Universo real por un modelo cosmológico uniforme constituye una simplificación extrema; no obstante, este tipo de modelo proporciona una primera aproximación en el estudio del problema.

La observación muestra una distribución discontinua de estrellas y materia interestelar, elementos que se agrupan en vastas aglomeraciones, las galaxias, separadas por regiones en que la densidad de materia espiral, la Vía Lactea o Galaxia, cuyas nubes absorbentes de polvo y gas interestelares constituyen un obstá-

(*) Texto de la conferencia dictada por el autor en el IV Coloquio Colombiano de Matemáticas. N. del E.

culo en el estudio del sistema de galaxias ; existen, sin embargo, métodos que permiten tener en cuenta la absorción.

Si se toman fotografías, en direcciones libres de absorción, las placas presentan las siguientes características, en lo que a las galaxias se refiere :

a) Placas con el mismo tiempo de exposición , tomadas en diferentes direcciones, son cualitativamente similares.

b) A mayor poder del instrumento mayor número de galaxias presentes en la placa, sin que parezca existir un límite inferior en su brillo aparente.

c) En cada placa se observa una distribución irregular, con tendencia a la formación de cúmulos.

Por otra parte, el espectro de las galaxias presenta un corrimiento hacia el rojo correspondiente a velocidades de recesión que varían entre los 1000 Km/s y los 100000 Km/s.

Estas velocidades son proporcionales a las distancias, hecho que constituye la Ley de Hubble :

$$v = HD$$

v: velocidad de recesión del objeto,

D : distancia del objeto al observador ,

H : constante de Hubble.

Tal fenómeno se interpreta diciendo que el Universo se halla en expansión, expansión que tiene lugar de manera isótropa.

El conteo de galaxias en función de la magnitud aparente, en grandes porciones de la esfera celeste, muestra que, en primera aproximación, el número aumenta con la distancia al cubo $(N \sim D^3)$, lo que es un índice de uniformidad. Los estudios efectuados hasta el momento sobre la distribución de las radiofuentes extragalácticas no revelan anisotropías significativas. Igualmente, la radiación de fondo cósmico de $3^o K$ es isótropa en alto grado.

El marco teórico, al cual deben referirse los fenómenos someramente descritos, está constituido por la Teoría de la Relatividad General de Einstein. Esta teoría utiliza un espacio de Riemann de cuatro dimensiones cuya métrica, o distancia entre dos puntos vecinos, está dada por la relación

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\ dx^\mu\ dx^\nu \qquad \mu . \nu = 1, 2, 3, 4 \qquad (1)$$

en donde $g_{\mu\nu}$ representa las componentes del tensor métrico y se utiliza la convención de Einstein.

De las cuatro coordenadas necesarias para describir el Universo, tres son espaciales y una temporal ; de allí el nombre de espacio-tiempo dado al espacio de Riemann de la Relatividad General. En este espacio-tiempo, los puntos se denominan eventos. El intervalo entre dos eventos está dado pues por la relación *(1)*.

El espacio-tiempo es, por otro lado, tal que en cada punto (evento) el intervalo ds^2 puede ponerse, mediante una escogencia conveniente de coordenadas, en la forma :

$$ds^2 = (dx^4)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 , \qquad (2)$$

en donde x^4 representa la coordenada temporal. Además, en todo punto del espacio-tiempo el intervalo ds del espacio euclideano tangente es igual al de la Relatividad Especial, o sea el ds de Minkowski :

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] . \qquad (3)$$

en donde c es la velocidad de la luz en el vacío ; x , y, z son coordenadas espaciales y t la coordenada temporal. Es decir, que el espacio-tiempo de la Relatividad General es localmente idéntico al espacio de Minkowski de la Relatividad Especial y, por lo tanto, ésta última tiene validez en la vecindad de un evento dado.

Las propiedades métricas del espacio-tiempo están determinadas por su contenido material y energético :

$$\textit{geometría} \longleftrightarrow \textit{materia energía} .$$

La geometría está definida por las componentes $g_{\mu\nu}$ del tensor métrico ; por su parte, el contenido materia-energía está descrito por medio del llamado tensor de impulsión-energía, de componentes $T_{\mu\nu}$. Se puede entonces escribir simbólicamente :

$$(g_{\mu\nu}) \longleftrightarrow (T_{\mu\nu}) \qquad (4)$$

Al explicitar la relación simbólica *(4)* , se obtienen las ecuaciones del campo de Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\Lambda) = 8\pi G T_{\mu\nu} \qquad (5)$$

$R_{\mu\nu}$: tensor de Ricci ,

R : curvatura escalar ,

Λ : constante cosmológica ,

G : constante gravitacional .

Se trata de determinar la estructura del espacio-tiempo a partir de su contenido material y energético, y encontrar enseguida las trayectorias de las partículas, para lo cual se utiliza el principio de las geodésicas, según el cual una partícula sometida a las fuerzas gravitacionales implícitas en los coeficientes de la métrica describe una trayectoria, o línea de universo, que es una geodésica del espacio-tiempo.

Desde el punto de vista cosmológico el problema consiste en lo siguiente : cuál es la estructura geométrica compatible con el contenido material del Universo en conjunto y con los fenómenos físicos que tienen lugar ? Así planteado, el problema es de gran complejidad. Piensese, por ejemplo, en el sistema real, discontinuo, de galaxias en movimiento relativo; el espacio-tiempo correspondiente contendría singularidades móviles separadas por regiones vacías. Las grandes dificultades encontradas hacen necesaria la introducción de un esquema más sencillo. Entonces, se reemplaza el sistema real de galaxias por una distribución continua,homogénea e isótropa : el fluido perfecto .

Este fluido puede interpretarse físicamente como el resultado de la desintegración de todos los cuerpos del Universo en sus átomos, y su difusión posterior, e instantánea, en todo el espacio. La densidad de este gas representativo en las vecindades del observador puede identificarse con la densidad promedio de materia calculada por los astrónomos. La presión puede tomarse como el equivalente de aquellas formas de energía, distintas de la masa, presentes en el Universo. Las partículas del gas, sometidas a las fuerzas implícitas en los coeficientes de la métrica, describen líneas de universo que son geodésicas del espacio-tiempo.

Las galaxias se utilizan como indicadores del comportamiento de la materia uniformemente distribuida. Por la expansión del Universo, las partículas del fluído se alejan unas de otras radialmente. La observación de este movimiento se hace por medio de la radiación emitida por las galaxias, las cuales, como únicos indicadores de posición, se suponen fijas localmente con respecto a la materia uniforme –

mente distribuida; el observador (Vía Lactea) satisface el mismo requisito. En estas condiciones las coordenadas x^1, x^2, x^3 son constantes, $ds^2 = dt^2$, y el intervalo entre dos eventos es una diferencia de tiempo. Se dice entonces que las fuentes de radiación y el observador se mueven por *líneas especiales de universo*.

Se dijo ya que la Relatividad Especial tiene validez local, puesto que el espacio-tiempo utilizado es localmente idéntico al espacio de Minkowski ; entonces, la radiación se mueve por líneas de universo que son *geodésicas nulas* , tales que $ds = 0$.

2. ***Métrica de Robertson*** . Este elemento, ds^2, constituye la base de los modelos relativistas de Universo y tiene una importancia fundamental en cosmología . Para obtenerlo seguiremos el planteamiento de Robertson [5] . Justificadas por la observación, aunque debe recordarse que sólo es accesible una porción limitada del Universo, se introducen las siguientes hipótesis :

a) La visión del Universo en conjunto es idéntica para dos observadores contemporáneos cualesquiera. Este es el llamado principio cosmológico.

b) El Universo es isótropo.

Se supondrá, además, que todos los observadores poseen relojes, goniómetros, emisores y receptores de radiación.

Consideremos dos galaxias, G y G', que describen líneas de Universo especiales. Señales luminosas enviadas de G a G', generan una superficie bidimensional, Σ, en el espacio-tiempo, la que puede extenderse más allá de G y G' considerando señales originadas antes de G, que viajan hasta más allá de G' (fig. 1). Señales enviadas de G' a G determinan otra superficie Σ'. Las dos su-

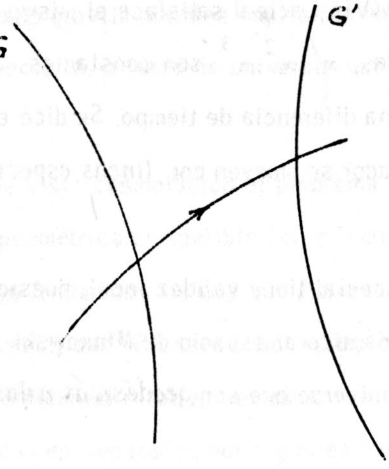

Fig. 1

perficies coinciden pues de otro modo las señales de ida y vuelta determinarían un plano, lo que es contrario a la hipótesis de isotropía. Si una tercera galaxia G'' tiene una porción de su línea de universo en Σ, entonces toda su línea de universo está contenida en Σ. La superficie Σ contiene, pues, una congruencia de líneas de universo especiales, es decir, de líneas de universo especiales que no se intersectan, con excepción de un punto singular situado en el pasado. Pueden distinguirse mediante un cierto parámetro u, continuo, creciente de G a G'; tomaremos $u = 0$ para G.

Se trata ahora de establecer un sistema de coordenadas basado en señales luminosas. El parámetro u no basta, pues una vez fijada la línea de universo es necesario poder distinguir los eventos sobre ella. Cualquier evento E, en Σ, queda especificado por dos señales, en Σ, que pasan por E. Así, un observador en G designa E por medio de las coordenadas :

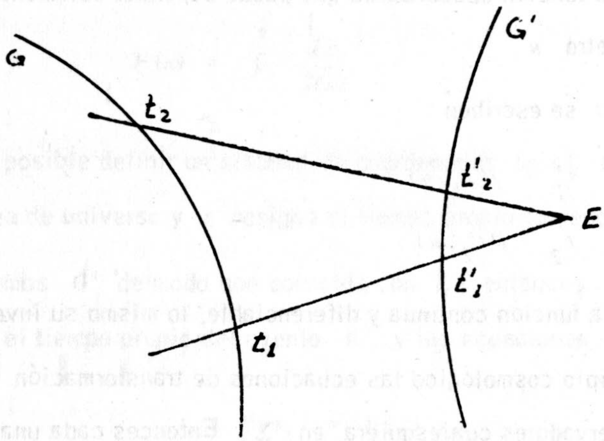

Fig. 2

t_1: tiempo de emisión de la señal $G \rightarrow E$

t_2: tiempo de recepción de la señal $E \rightarrow G$

Un observador en G', utilizando las mismas señales, obtendrá las coordenadas t'_1, t'_2 (fig. 2). Cómo transforman estas coordenadas al pasar de un observador a otro ? Observemos que t_1 y t'_1, como t_2 y t'_2, se refieren a la misma señal. Entonces, t'_1 sólo depende de t_1 y t_2 de t'_2 :

$$t'_1 = p(t_1)$$

$$t_2 = q(t'_2)$$

Las funciones p y q deben ser iguales por el principio cosmológico. La visión del Universo obtenida por G debe ser igual a la obtenida por G'. Entonces

$$t'_1 = p(t_1) \qquad (6)$$
$$t_2 = p(t'_2)$$

en donde p es una función desconocida que puede depender solamente de otra variable : el parámetro u.

Las ecuaciones (6) se escriben :

$$\begin{aligned} t'_1 &= f(t_1, u) \\ t_2 &= f(t'_2, u) \end{aligned} \tag{7}$$

En donde f es una función continua y diferenciable, lo mismo su inversa f^{-1}.

En virtud del principio cosmológico las ecuaciones de transformación (7) son válidas para dos observadores cualesquiera, en Σ. Entonces cada una de las ecuaciones de transformación define un *grupo de automorfismos de un parámetro*. Podemos escoger u de modo que para $u=0$ se tenga el automorfismo idéntico :

$$\begin{aligned} t'_1 &= f(t_1, 0) = t_1 \\ t_2 &= f(t'_2, 0) = t'_2 \end{aligned}$$

Los generadores de los grupos son (véase Apéndice) :

$$S_1(t_1) = \left[\frac{\partial t'_1(t_1, u)}{\partial u}\right]_{u=0} \quad \text{y} \quad S_2(t_2) = \left[\frac{\partial t'_2(t_2, u)}{\partial u}\right]_{u=0}.$$

y haciendo el cálculo resulta $S_1 = -S_2$. Para que existan los grupos de automorfismos es necesario y suficiente que

$$\frac{\partial t'_1}{\partial u} = S(t'_1) \quad , \quad \frac{\partial t'_2}{\partial u} = -S(t'_2) \tag{8}$$

Las soluciones de (8) son,

$$\begin{aligned} F(t'_1) &= F(t_1) + u \\ F(t'_2) &= F(t_2) - u \end{aligned} \tag{9}$$

en donde la función F está dada por :

$$F(x) = \int^{x} \frac{dx}{S(x)}$$

Ahora es posible definir un sistema de coordenadas (u,t), en donde u determina la línea de universo y t designa el tiempo propio correspondiente.

Si escogemos G' de modo que coincida con E, entonces $t'_1 = t'_2 = t$, en donde t es el tiempo propio del evento E, y las ecuaciones (9) quedan ,

$$F(t_1) = F(t) - u$$
$$(10)$$
$$F(t_2) = F(t) + u$$

t se conoce con el nombre de tiempo cósmico .

Una vez hallada la transformación (10) se puede construir la métrica $ds^2(t_i . dt_j)$ para la superficie Σ, bajo los siguientes requisitos

ds^2 debe ser invariante,

ds^2 debe ser una función cuadrática homogénea en dt_1 y dt_2.

$ds^2 = 0$ representa la trayectoria de los rayos luminosos (geodésicas nulas),

$ds^2 = dt^2$ para u constante (líneas de universo especiales) .

La primera condición implica que ds^2 debe ser únicamente función de los invariantes de la superficie Σ. Para saber cuáles son estos invariantes hagamos $x^1 = F(t_1)$ y $x^2 = F(t_2)$; las ecuaciones (9) quedan,

$$x'^1 = x^1 + u$$
$$x'^2 = x^2 - u$$

con generadores

$$\frac{\partial t_1}{\partial u} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial t_2}{\partial u} = -1$$

Cualquier invariante $\phi(x^i, dx^j)$ debe satisfacer la ecuación (véase Apéndice):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^1} - \frac{\partial \phi}{\partial x^2} = 0 .$$

entonces ϕ puede depender solo de $x^1 + x^2$, dx^1 y dx^2. Pero $x^1 + x^2 = 2F(t)$; luego ds depende solo de t, $dF(t_1)$ y $dF(t_2)$.

La segunda condición impone la forma

$$ds^2 = \alpha(t)[dF(t_1)]^2 + \beta(t)[dF(t_1)]\cdot[dF(t_2)] + \gamma(t)[dF(t_2)]^2 ,$$

pero $ds^2 = 0$ implica $dt_1 = 0$ ó $dt_2 = 0$, luego $\alpha(t) = \gamma(t) = 0$. Introduciendo las ecuaciones de transformación (10) obtenemos :

$$ds^2 = \beta(t)\{[dF(t) - du][dF(t) + du]\}$$

y teniendo en cuenta la definición de F,

$$ds^2 = \frac{\beta(t)}{S^2(t)}[dt^2 - S^2(t)\,du]$$

La cuarta condición implica $\frac{\beta(t)}{S^2(t)} = 1$, y se tiene finalmente,

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t)\,du^2 \qquad (11)$$

$S(t)$: función desconocida del tiempo cósmico.

u : parámetro continuo, definido en Σ.

Por el principio cosmológico, lo anterior es válido para dos galaxias cualesquiera. Cada pareja de líneas de universo especiales posee el mismo generador $S(t)$ y la misma métrica *(11)*.

Consideremos ahora el espacio tridimensional $t = cte.$ Se pueden establecer coordenadas x^i $(i = 1, 2, 3)$ en cada espacio $t = cte$ de modo que los eventos en cada línea especial de universo conserven las mismas coordenadas x^i. El intervalo entre dos eventos vecinos, du, sobre distintas líneas de universo, será función de la posición y no del tiempo cósmico : $du^2(x^i, dx^j)$. La superficie Σ intersecta cualquier espacio $t = cte.$ según una curva $x^i(u)$. Supongamos $x^i(u)$ diferenciable ; podemos escribir,

$$du^2 = h_{ij}(x^k)\, dx^i\, dx^j \qquad i,j,k = 1,\ 2,\ 3 \tag{12}$$

en donde h_{ij} representa las componentes de un tensor en el espacio tridimensional, ya que du^2 es invariante.

El espacio $t = cte.$ admite, en virtud del principio cosmológico y la hipótesis de isotropía, una familia de 6 parámetros de automorfismos métricos. Tres de estos corresponden a las translaciones de un observador al otro ; los restantes representan el número de grados de libertad presentes al orientar el sistema de coordenadas de un observador. El espacio $t = cte.$ admite entonces el grupo máximo de automorfismos métricos y por lo tanto posee curvatura riemaniana, k, constante y su métrica es de la forma :

$$ds^2 = S^{\cdot 2}(t) \frac{N_{ij}\, dx^i\, dx^j}{\left[1 + \frac{K}{4} N_{kl}\, x^k x^l \right]^2} \tag{13}$$

en donde N_{ij} es una matriz diagonal cuyos elementos distintos de cero son ± 1. S' es el radio de curvatura, K es el índice de curvatura $(K = \pm 1)$ y $k = \frac{K}{S'^2}$. La ecuación (13) es válida para $K = 0$ siempre y cuando se tome S', en tal caso, como una constante arbitraria. Por el teorema de Helmholtz-Lie (véase Apéndice), todos los invariantes deben ser funciones de la expresión (13).

Ahora bien, el elemento du^2 es una función cuadrática en dx^i, es invariante y diferente de cero. Esto hace que du^2 sea proporcional - el factor de proporcionalidad puede depender de t - a la expresión (13), y que hagamos $N_{ij} = \delta_{ij}$. Obtenemos la relación,

$$ds^2 = C^2(t)\, S^2(t)\, du^2 = S'^2(t) \frac{dx^i\, dx^i}{[1 + \frac{K}{4} x^j x^j]^2} \qquad (14)$$

en donde $C(t)$ es el factor de proporcionalidad. Siguiendo siempre a Robertson, identificamos $C(t)$ de la siguiente manera : si en la ecuación (11) hacemos $dt = 0$ y multiplicamos por $-c^2$ se obtiene la expresión,

$$c^2 S^2(t)\, du^2 = - c^2\, ds \qquad (15)$$

Comparemos (14) y (15); se ve que podemos hacer $c = C(t)$, $cS = S'$ y tomar

$$du^2 = \frac{dx^i\, dx^i}{[1 + \frac{K}{4} x^j x^j]^2} \qquad (16)$$

Este es el elemento de línea de un espacio de curvatura riemaniana constante $K = 0, \pm 1$. En este caso b_{ij} tiene 3 componentes diferentes de cero, todas iguales a la unidad. Si se emplea otro sistema de coordenadas aparecerán componentes adicionales. El espacio $t = cte.$ posee una curvatura riemaniana constante $K = 0, \pm 1$; Si $K \neq 0$ su radio de curvatura es $cS(t)$.

En cuanto al espacio-tiempo, su métrica es, teniendo en cuenta *(11)* y *(16)*,

$$ds^2 = dt^2 - \frac{S'^2(t)}{c^2} \frac{dx^i dx^i}{[1 + \frac{K}{4} x^j x^j]^2} \tag{17}$$

Este es el elemento de Robertson-Walker, fundamental en cosmología. Introduciendo las coordenadas esféricas r, θ, ϕ, la expresión *(17)* se transforma en

$$ds^2 = dt^2 - \frac{S'^2}{c^2} \cdot \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\phi^2}{[1 + \frac{Kr^2}{4}]^2} \tag{18}$$

$S'(t)$ es una función desconocida del tiempo. Las líneas de universo $r = cte.$ $\theta = cte.$; $\phi = cte.$, son geodésicas del espacio-tiempo y representan entonces soluciones posibles de las ecuaciones de Einstein. Estas son las líneas de universo especiales descritas por los indicadores de posición (galaxias). Como quedó dicho, las galaxias poseen coordenadas r, θ, ϕ, fijas. Entonces $S'(t)$ aparece como un factor de escala. En efecto, para t fijo, la distancia s entre dos galaxias G_1 y G_2, de coordenadas comóviles r_1, θ_1, ϕ_1 y r_2, θ_2, ϕ_2, es igual a la longitud del arco de curva geodésica, obtenida por la integración del elemento *(18)*. En esta integración $S'(t)$ es un factor; todas las distancias son, pues, proporcionales a $S'(t)$. Por otro lado, s y t poseen dimensiones de tiempo y c tiene dimensiones de velocidad, r, θ, ϕ son adimensionales, K es un número puro y S' debe tener dimensiones de longitud. Si $S'(t)$ crece con el tiempo, todas las distancias aumentan y se tiene la expansión del universo.

La métrica cosmológica *(18)* contiene dos incógnitas, la función $S'(t)$ y la curvatura K, las que no son directamente observables. Es necesario relacionarlas con cantidades observables, para poder de este modo intentar una confrontación cuantitativa entre las características de los modelos y los resultados de la observación. En esta forma se puede ver en qué medida los esquemas introducidos representan el Universo real y escoger, por otra parte, el modelo más conveniente. Los datos disponibles en la región del Universo accesible a la observación no permiten hasta el momento privilegiar uno de los modelos. Se sabe que la ley de Hubble no es estrictamente lineal, la expansión estaría retardada, pero no se conoce si el modelo es oscilante o en expansión permanente. Tampoco se puede discriminar entre espacio esférico e hiperbólico. Falta todavía mucho trabajo, tanto en el campo teórico como en el observacional, antes de que el problema cosmológico sea resuelto en forma satisfactoria.

Apéndice : Teoremas utilizados

1) Sea el automorfismo de un parámetro $x'^i = f^i(x^j, a)$, en donde x^i son los puntos de un espacio de n dimensiones, a es un parámetro real continuo, f una función continua y diferenciable.

La condición necesaria y suficiente para que exista el grupo de automorfismos $x'^i(x^j, a)$ es que se satisfaga la ecuación diferencial,

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a} = \xi^i(x') \qquad \text{en donde} \qquad \xi^i(x) = \left[\frac{\partial f^i(x^j, a)}{\partial a} \right]_{a=0}$$

$\xi(x)$ se denomina el generador del grupo.

2) Un espacio de n dimensiones admite, como máximo, $\frac{1}{2}\, n(n+1)$ automor-

fismos métricos. Si ello es así, el espacio tiene curvatura constante.

3) Teorema de Helmholtz-Lie. Es un espacio tridimensional que admite el grupo máximo de automorfismos métricos, todos los invariantes del grupo son funciones del elemento de línea,

$$ds^2 = S'^2 \frac{N_{ij}\, dx^i\, dx^j}{\left[1 + \frac{K}{4} N_{kl} x^k x^l \right]^2}$$

S' es el radio de curvatura, $K = 1, -1, 0$, $k = \frac{K}{S'^2}$. Si $K = 0$, S' es una constante arbitraria.

N_{ij}: matriz diagonal cuyos elementos distintos de cero son ± 1.

Bibliografía

[1] Eisenhart, L. P., *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, 1960.

[2] Heidmann, J., *Introduction a la Cosmologie*, Presses Universitaires de France, 1973

[3] Mavrides, S., "Modeles Cosmologiques en Relativité", Boletím da Universidade do Paraná, Física Teórica No. 3, 1962.

[4] McVittie, G. C., *General Relativity and Cosmology*, Chapman-Hall, 1964.

[5] Robertson, H. P., Noonan, T. W., *Relativity and Cosmology*, Saunders, 1969.