

## **INVESTIGACION DE OPERACIONES**

**JOSE FRANCISCO PARRA**

El tema de esta conferencia abarca muchos aspectos, los cuales serán tratados aquí en su forma más simple; además el principal objetivo de ella es dar a conocer en una forma rápida lo que es la Investigación de Operaciones (I. O.).

Teniendo en cuenta lo anterior se ha creído conveniente incluir una bibliografía (en castellano) sobre el tema, para que así el estudioso pueda profundizar en este aspecto y con ello determinar algunos libros que le puedan servir en su labor docente. Esta bibliografía aparece al final junto con breves comentarios sobre cada uno de los libros, sin pretender con ello discutir la metodología de la enseñanza que cada libro implica y que lógicamente va de acuerdo al autor; solamente se quiere señalar las cualidades de cada uno procurando ver dónde o en qué carrera cumplirán mejor su objetivo.

### ***Introducción a la Investigación de Operaciones.***

Al querer conocer en forma rápida lo que es la I. O. plantea la necesidad de situarnos en el campo de los negocios, donde actualmente la administración está funcionando en un ambiente sometido a muchos más cambios que en cualquier época pasada. El administrador puede iniciar algunos de esos cambios, pero ordinariamente, no ocurre así, sino que los dicta la dinámica de la producción (los ciclos vitales de los productos se hacen más cortos), mientras que la dinámica de

Los mercados (la nueva tecnología y la internacionalización creciente), desplaza los mercados tradicionales. Los ambientes gubernamentales y sociales afectan fuertemente a la empresa en la búsqueda de utilidades. La empresa eficiente, hoy en día, debe depender en gran parte de los computadores y métodos cuantitativos para manejar sus innumerables problemas. Esto exige a la administración de ocuparse de problemas mal estructurados, es decir, no programables y, por lo tanto, de utilizar los computadores para que le ayuden a adoptar algún tipo de modelo de empresa para poder competir con la creciente complejidad de su tarea.

La administración tiene a su disposición varios enfoques para interpretar, analizar y resolver los problemas empresariales; generalmente el problema mismo y su complejidad indican el método de análisis apropiado. Podemos hablar de tres clases de enfoques.

1. *El enfoque convencional* que sigue las técnicas y soluciones conocidas es muy estático; a menudo no ofrece mejoramiento a la administración, estando en contraposición con la dinámica de la empresa.
2. *El enfoque observacional* que consiste en estudiar a otros administradores que se encuentran en situaciones semejantes, para aprender de ellos, no es muy bueno, puesto que dentro de los negocios existe, en forma muy clara, la competencia de unas empresas con otras.
3. *Enfoque sistemático* que utiliza sistemas teóricos que pueden ser ligeramente distintos del problema actual que se estudia. Este enfoque puede ser muy útil para lograr una solución final que utilice la combinación de otros enfoques y especialmente el científico.

## ***Historia de la administración científica***

La administración científica que en un principio se encaminó hacia las actividades de manufactura, puede aplicarse a la mayoría de los problemas, tanto actuales como futuros.

El origen de la administración científica, así como el origen exacto del método científico se desconocen. Se ha dado a Frederick Winslow Taylor el título de "Padre de la Administración científica". Este ingeniero norteamericano centró sus problemas de estudio en un taller donde se ocupó de medir la eficiencia de éste, midiendo también de manera objetiva cuánto podía producir un hombre durante el día. Comprobó que algunos hombres eran más eficientes que otros y que algunos que eran ineficientes en un determinado tipo de trabajo eran eficientes en otros, de donde pasó con esto a la idea de selección y adiestramiento; estableció normas para los trabajadores y utilizó la especialización en la manufactura. Taylor aplicó el análisis científico a los problemas de manufactura dando las siguientes recomendaciones para la administración científica.

1. La administración debe usar el enfoque científico en vez del empírico.
2. Se obtiene una organización armónica asignando el trabajador adecuado para cada serie de operaciones.
3. Hay que lograr la cooperación entre el personal de la administración y el de los trabajadores.
4. Hay que escoger los mejores medios de producción económica.
5. Hay que lograr la especialización de los trabajadores a fin de aumentar la eficiencia de la producción.
6. Hay que crear una tendencia hacia el espíritu de prosperidad empresarial e individual.

También tenemos a Henry L. Gantt conocido por sus trabajos sobre programación de la producción. Estudió los problemas de congestión, es decir, aquello que se refería a la demora que podía tener cada tarea en pasar de una máquina a otra. Hizo además una gran contribución al enfoque científico considerando el aspecto humano de la administración hacia los trabajadores. Gantt recomendó el establecimiento del departamento de personal como parte integrante del enfoque científico de Taylor.

Frank B. y Lillian E. Gilbreth en la década de 1910 dieron un gran adelanto a los estudios de Taylor y Gantt. Se preocuparon ellos en dividir el trabajo en sus elementos más fundamentales para estudiarlos por separado y también para relacionarlos con otros. Estos estudios se relacionaron más que todo con la producción y como consecuencia la creación de métodos de desperdicio mínimo. Sin embargo, Lillian se ocupó más del punto de vista psicológico. Estos estudios de los Gilbreth complementaron, mediante el enfoque científico que ellos le dieron, los estudios de Taylor.

En Europa Henry Joseph Fayol, publicó un libro titulado "Administration Industrielle et Générale", que se ocupaba de los principios generales de la Administración. Fayol estudió los escalones superiores de la empresa, desde los más altos hasta los más bajos. La obra de Fayol se considera como un complemento de la de Taylor, o sea que no sólo estudiaron los niveles opuestos de la organización, sino que también aplicaron el enfoque científico al análisis de los problemas de los negocios. Es entonces importante resaltar la utilización del método científico para determinar lo que debería hacerse en las circunstancias que se presentarán.



## ***Historia de la investigación de operaciones.***

Esta es otra historia en la cual es difícil precisar su iniciación oficial. Como en todos los casos, muchos han hecho trabajos que ahora consideramos como Investigación de Operaciones (I. O.) y que ahora tratamos de reunir para entonces contar la historia.

Ya se ha oído hablar mucho de que las guerras dieron origen a la I. O., así como que también dieron origen a muchas otras cosas. Veamos en este tema algunos casos.

En la Primera Guerra Mundial Thomas Edison tuvo la tarea de averiguar qué maniobras debían hacer los barcos mercantes para disminuir las pérdidas de embarques causadas por los submarinos enemigos. Edison en vez de arriesgar los barcos en condiciones bélicas reales, empleó su ya famoso "Tablero táctico".

En 1930 Horace C. Levison, aplicó algunos modelos matemáticos para el tratamiento de datos, cuyo manejo habría sido completamente imposible de otro modo. Su estudio más importante se centra en una empresa pequeña de correos y cuyo problema consistía en los clientes que se negaban a aceptar paquetes que ella les enviaba por reembolso. Mediante el análisis de datos llegaron a considerar lo que se llamó esfuerzo óptimo de embarque.

En los dos casos anteriores nos salimos de la guerra, pero ahora volvamos a entrar en esta base de lanzamiento de la I. O., y esta vez nos situamos en Inglaterra; cuando en 1937 se pidió a los científicos que ayudaran a los militares a descubrir la mejor manera de utilizar el radar para localizar aviones enemigos. En septiembre de 1939 los científicos que trabajaban en diferentes aspectos del problema, se reunieron en el Cuartel General del Mando de Aviones de Combate (Real Fuerza Aérea). Ese grupo, considerado como el núcleo del primer grupo de

investigación de operaciones, ampliaba continuamente su área de actividades hasta abarcar más allá del problema original del radar.

En septiembre de 1940 se reunió el Grupo de Mando de Investigación contra Aviones para estudiar problemas de puntería contra aviones. Encabezaba el grupo el físico inglés P. M. S. Blackett, quien debería estudiar la actuación del equipo de control de cañones en el campo, especialmente durante su empleo por las tropas contra el enemigo. El grupo estaba formado inicialmente por dos fisiólogos dos físicos matemáticos, un astrofísico, un oficial del ejército y un antiguo agrimensor; más tarde el grupo se completó con un tercer fisiólogo, un físico general y dos matemáticos y se le conoció como el "*Circo de Blackett*". Es evidente la extensa gama de disciplinas que formaban este grupo de hombres de ciencia que más tarde creció y se dividió en dos grupos: el del Ejército y el de la Marina, lo que dio por resultado que las tres fuerzas militares inglesas tuvieran un grupo de I. O., que llevó a cabo investigaciones desde principios de la guerra (1941). Este tipo de actividades se llamó en Inglaterra "Investigación Operacional" muy relacionado con la utilización del radar en operaciones de guerra y por estar constituido el grupo por famosos investigadores.

Sir Robert Watson-Watt, ahora en Estados Unidos, en 1937 quien pretendió ser el iniciador de los dos primeros estudios sobre investigación de operaciones, recomendó que se introdujera la I. O. en los departamentos del Secretario de Guerra y del Secretario de la Marina de los Estados Unidos. En 1942 se introdujo la Investigación de Operaciones a nivel superior. Estudiaron problemas del radar y la creación de convoyes de la marina mercante destinados a aminorar las pérdidas causadas por los submarinos enemigos. En la Fuerza Aérea de los Estados Unidos se le dio el nombre de "Análisis Operacional" y en el Ejército y la Marina

de los Estados Unidos los de "Investigación de Operaciones" y de "Evaluación de Operaciones" respectivamente. Este tipo de actividades no sólo se desarrollaron en Inglaterra y los Estados Unidos, sino también en Canadá y Francia durante la segunda guerra mundial.

Cuando terminó la guerra, Gran Bretaña se enfrentó a problemas de administración, creados por la nacionalización de la industria y la necesidad de reconstruir grandes segmentos de las instalaciones industriales de la marina, los cuales requerían un nuevo enfoque para su tratamiento. Estos problemas fueron enfrentados por los especialistas de la I. O. quienes habían comenzado a ocuparse de problemas gubernamentales e industriales. Se aceptaron las consultas administrativas que nunca habían sido populares en Inglaterra, se quería probar un nuevo enfoque para aumentar la productividad y ese era la investigación de operaciones.

Algunos años después, los grupos de I. O. que actuaban en las empresas eran pequeños. En 1950 ya los grupos fueron aumentando sus componentes para así competir con la demanda creciente dentro de sus propias empresas. La I. O. pues cogió un auge sorprendente y hoy en día se puede hablar de empresas en las cuales un grupo de Investigación de Operaciones está compuesto por 80 o 60 miembros. En Inglaterra la I. O. ha conquistado una posición muy sólida en el gobierno y los negocios para la solución de problemas difíciles y complejos.

En los Estados Unidos la "Investigación de Operaciones" (I. O.) (llamada así primeramente en ese país por McCloskey y Trefethen en 1940), tomó un camino ligeramente distinto. Las investigaciones militares aumentaron al terminar la guerra; el personal dedicado a ella también aumentó. La industria y el gobierno fueron algo indiferentes a ella hasta 1950 cuando aparecieron los computadores y los Estados Unidos comenzaron a tomar en serio la I. O. Los computadores trajeron

consigo nuevos problemas de sistemas para los cuales no había experiencia pasada adecuada. Los grupos de I. O. aprovecharon esta salida y se reunieron entonces los industriales y los investigadores de operaciones en una actividad que aún sigue creciendo y desarrollándose.

En 1950 la Programación Lineal dio un gran ímpetu a la Investigación Industrial de Operaciones. Muchas técnicas poco conocidas ya fueron más comunes como el Pert, Control de Inventarios y Simulación de los cuales hablamos ahora con más propiedad y en un lenguaje más amplio. La Estadística y la Probabilidad que son básicas en cualquier trabajo de I. O., introdujeron las nociones de límites de confianza y de probabilidad de ocurrencia.

La I. O. se convirtió en un importante instrumento en las batallas de los presupuestos y de los contratos.

La primera conferencia sobre la I. O. celebrada en 1951 en el Instituto Case de Tecnología de Cleveland (Estados Unidos) dependió de estudios militares, ya que fue casi imposible encontrar estudios industriales para presentarlos. Actualmente muchas revistas se ocupan de la I. O., se han formado sociedades y son muchas las instituciones que ofrecen cursos y especialización sobre el tema.

### **Características de la I. O.**

Por lo que se ha dicho sobre la Historia de la I. O. nos podemos dar cuenta de cuatro características esenciales de ella.

**1. Examen de las relaciones funcionales de un sistema.** Ella significa que la actividad de cualquier función o parte de una empresa tiene algún efecto en la actividad de cualquier otra función o parte.

Cuando se conocen todos los factores que afectan a un sistema puede construir-

se un modelo matemático. La solución de ese modelo, que haya relacionado debidamente las funciones y la de sus partes componentes debe dar por resultado el mejoramiento de las utilidades de la empresa en general, esto es lo que se llama a menudo "optimización". La "suboptimización" se refiere generalmente a las diversas funciones de la empresa cuando no se aumentan individualmente al máximo sus objetivos especiales de utilidades.

**2. Utilización del grupo interdisciplinario.** Las diversas disciplinas describen diferentes formas de estudiar el mismo problema. Si se hace que los hombres de ciencia de muchas disciplinas trabajen colectivamente en un problema, se aumentan los posibles enfoques para resolverlo.

Una de las principales razones de la existencia de grupos de investigación de operaciones es que aplican al problema los conocimientos científicos más importantes, y es igualmente importante su capacidad para desarrollar nuevos métodos, procedimientos y sistemas que son más eficaces para tratar el problema que cualesquiera de los que puede disponer actualmente. Esto tiene sentido, porque nadie tiene el tiempo suficiente para adquirir toda la información científica útil de todas las disciplinas para disponer inmediatamente de ella. El enfoque interdisciplinario tiene además otras ventajas adicionales.

- a) Reconocer que la mayor parte de los problemas de negocios tienen aspectos contables, biológicos, económicos, matemáticos, físicos, psicológicos, estadísticos e ingenieriles.
- b) Es perfectamente razonable que las fases individuales de un problema se comprendan y analicen mejor por los que tienen el adiestramiento necesario en los campos apropiados.

**3. Adopción de un enfoque planeado (método científico).** Como otras muchas dis-

ciplinas la I. O. utiliza el método científico.

El I. O. no puede manipular el sistema que estudia. Construye Modelos Matemáticos que son una representación del problema o sistema real que se estudia. Un modelo que representa la estructura del sistema real en términos cuantitativos puede manipularse y analizarse, lo que permite toda clase de experimentación, porque la limitación básica se ha establecido previamente. El I. O. puede cambiar ciertas variables y mantener otras constantes, para tratar de averiguar cómo se afectaría el sistema. Por consiguiente, es posible simular el mundo real y experimentar con él en términos abstractos.

La solución de una ecuación o modelo matemático puede considerarse como una función de variables controlables (precios de venta, número de artículos producidos, aspectos de costos, número de vendedores y restricción presupuestales) y variables no controlables (precios de los competidores, costo de las materias primas, costo de mano de obra, demanda de los clientes y localización de los mismos) relacionados en alguna forma matemática precisa.

La ecuación objetivo desarrollada (utilizando las variables controlables y no controlables), puede necesitar complementarse con una serie de expresiones restrictivas sobre los posibles valores de las variables controlables. Por ejemplo, en las matemáticas teóricas es posible tratar con valores negativos, lo que no es posible en los problemas de negocios, porque cada artículo se produce o no se produce. Del mismo modo el dinero se gasta o no se gasta. La serie de restricción se expresa en una serie de ecuaciones suplementarias o desigualdades en las que se usan las condiciones de mayor que y menor que. Esto es evidente en programación lineal.

Básicamente los objetivos de los modelos de I. O. son de dos tipos :



- a) La disminución de los costos en términos de entradas, y
- b) El máximo de la salida, o sea las utilidades de las ventas de la empresa.

Como ya lo hemos mencionado, el enfoque básico del grupo de I. O. es el método científico y sus pasos teóricos son los siguientes :

- 1) Observación
- 2) Definición del problema
- 3) Formulación de una hipótesis
- 4) Experimentación
- 5) Verificación

Pasos tradicionales a los cuales podemos añadir una versión actualizada que serían :

- 6) Utilización de modelos matemáticos
- 7) Utilización de las técnicas normales de I. O.
- 8) Establecimiento de controles adecuados
- 9) Utilización de una computadora en muchos casos.

**4. Descubrimiento de nuevos problemas para su estudio .** En la solución de un problema de I. O. se descubren nuevos problemas. Los problemas interrelacionados que descubre el enfoque de I. O. no tienen que resolverse todos al mismo tiempo. Sin embargo, cada uno de ellos habrá de resolverse considerando los demás; a fin de obtener los máximos beneficios. Puede decirse que la I. O. no se utiliza eficazmente si se restringe a programas de un solo objetivo. Pueden obtenerse mayores beneficios mediante la continuidad de las investigaciones.

#### **Definición de la I. O.**

Como en el caso de la Estadística son muchas las definiciones que se han dado sobre la I. O. y cada una de ellas trata de dar la visión que de ella tiene su au-

tor y principalmente de acuerdo al problema en el cual ha estado él desempeñándose. Veamos alguna de ellas para llegar a una definición enunciada de acuerdo con las características de la I. O.

G. W. Churchman, R. L. Ackoff y E. L. Arnoff en su libro *Introduction to Operations Research*, definen la I. O. de este modo : "En un sentido general, la I. O. puede considerarse como la aplicación de métodos científicos, técnicas e instrumentos, a los problemas relacionados con la operación de los sistemas, a fin de proporcionar a los que controlan las operaciones las soluciones óptimas para los problemas ". Adolece esta definición de las características esenciales de la I. O.

Morse y Kimball dan una de las primeras definiciones que dice lo siguiente : "La investigación de operaciones es un método científico para dar a los departamentos ejecutivos una base cuantitativa para las decisiones relacionadas con las operaciones que están bajo su control". Esta definición presenta deficiencias ya que no plantea diferencia entre la I. O. y otra disciplina de los negocios, por ejemplo, contabilidad de costos.

Miller y Starr consideran también que la investigación de operaciones se aplica a los problemas de tipo ejecutivo, y la definen así : "La I. O. es la teoría de la decisión aplicada. La investigación de operaciones usa cualquier método científico, matemático o lógico para tratar los problemas a que se enfrenta el ejecutivo cuando pretende lograr una racionalidad absoluta al ocuparse de sus problemas de decisión". Aparentemente esa definición es demasiado general y tiene los mismos defectos que las demás.

El Comité de Investigación de Operaciones del Consejo Nacional de Investigadores (Estados Unidos) presentó la siguiente definición : "La I. O. es la aplicación del método científico al estudio de las operaciones de las grandes y com-

plejas organizaciones o actividades". El Comité indicó que la Investigación de Operaciones "puede proporcionar a los administradores de alto nivel una base cuantitativa para las decisiones que aumentan la eficacia de esas organizaciones para llevar a cabo sus propósitos básicos".

En las definiciones anteriores se encuentran algunos puntos comunes, tales como el empleo del método científico; el estudio de las relaciones complicadas, y el suministro de una base para la toma de decisiones; esos términos relacionados con las características esenciales de la I. O. nos conducen a la siguiente definición "La Investigación de Operaciones utiliza el enfoque planeado (Método Científico) y un grupo interdisciplinario a fin de representar las complicadas relaciones funcionales como modelos matemáticos para suministrar una base cuantitativa para la toma de decisiones y descubrir nuevos problemas para su análisis cuantitativo". Además de las cuatro características se incluyó lo de la base cuantitativa para la toma de decisiones puesto que los resultados de la I. O. deben aplicarse al problema que se estudia.

Es conveniente que aquí y como consecuencia de esta definición se exprese lo siguiente : La experiencia del administrador, las futuras condiciones del negocio y el resultado de un modelo matemático forman la mejor combinación para la planeación, organización, dirección y control de la empresa.

#### **Definición del modelo**

Dentro de la definición de I. O. se ha hablado de "Modelo Matemático" por ello es conveniente que se de una definición de modelo. El modelo es una representación o abstracción de una situación u objetos reales, que muestra las relaciones (directas o indirectas) y las interrelaciones de la acción y la reacción en términos de causa y efecto. Para que un modelo sea completo, es necesario que

sea representativo de aquellos aspectos de la realidad que están investigándose.

Para descubrir cuáles son las variables importantes o pertinentes que entran en el modelo es necesario tener en cuenta las relaciones que hay entre ellas y para ello se utilizan técnicas cuantitativas como la estadística y la simulación.

### **Tipos de Modelos.**

Los modelos pueden clasificarse de acuerdo con su dimensión, su función, propósito, temas o grados de abstracción. Al hacer la clasificación de los modelos se tendrá una idea más clara de sus características. Se consideran tres tipos básicos de modelos.

1. **Iconicos.** Un modelo icónico es una representación física de algunos objetos, ya sea en forma idealizada o en escala distinta, sus propiedades deben ser las mismas que tiene lo que representa. Son adecuados en un momento específico de tiempo, y sus dimensiones son dos (fotografía, mapa o plano) o máximo tres (globo, automóvil, avión, etc.). Cuando un modelo sobrepasa la tercera dimensión como sucede en I. O., es imposible construirlo físicamente y entonces pertenece a otra categoría de modelos llamados simbólicos o matemáticos.

2. **Analógicos.** Los modelos analógicos pueden representar situaciones dinámicas y se usan más que los icónicos, porque pueden mostrar las características del acontecimiento que se estudia. Es adecuado, a menudo, para representar relaciones cuantitativas entre las propiedades de objetos de varias clases. Un diagrama de flujo es un modelo analógico muy sencillo y eficaz en control de calidad.

3. **Simbólicos (Matemáticos).** Nos interesan principalmente los modelos simbólicos que son verdaderas representaciones de la realidad y toman la forma de cifras y símbolos matemáticos. Un tipo de modelo matemático que se usa comúnmente en

la investigación de operaciones es una ecuación. Se sabe ya lo concisa, lo precisa y lo fácil de manipular de una ecuación. Además este tipo de modelos se presta a las manipulaciones de los computadores.

### ***Tipos de modelos matemáticos.***

No se pretende que al hacer esta clasificación ella sea completa y exhaustiva, lo que si se pretende es tener una idea de las diferencias que hay entre uno y otro modelo de I. O. Ellos son :

**1 Cuantitativos y cualitativos** Los problemas de I. O. que se ocupan de cualidades o propiedades de los componentes se llaman modelos cualitativos.

Cuando se construye un modelo matemático e insertamos símbolos para representar constantes y variables (en gran parte, números), se llama a esto un modelo cuantitativo.

**2. Estandar y hechos a la medida** Se usan modelos estandar para describir las técnicas que han llegado a asociarse con la I. O. Para usar esas técnicas hay que insertar los números apropiados de un problema específico de negocios en el modelo estandar para obtener una respuesta. Se obtiene un modelo hecho a la medida cuando se usan los conceptos básicos de las diversas disciplinas y especialmente los matemáticos, para construir un modelo que se ajuste al problema de que se trata.

**3. Probabilístico y determinístico.** Los modelos que se basan en las Probabilidades y en la Estadística y que se ocupan de incertidumbres futuras se llaman probabilísticos. Los modelos cuantitativos que no contienen consideraciones probabilísticas se llaman modelos determinísticos.

**4 Descriptivos y de optimización.** En algunas situaciones un modelo se constru-

ye sencillamente como descripción matemática de una condición del mundo real. Esos modelos se llaman descriptivos y en el pasado se han usado para poder aprender más sobre algún problema. El modelo descriptivo tiene la capacidad de solución. Sin embargo, en ese modelo no se hace intento alguno para escoger la mejor alternativa.

Cuando se estudia un modelo de optimización se hace un esfuerzo concertado para llegar a una solución óptima cuando se presentan alternativas. Cuando un modelo de optimización se usa en forma apropiada, suministra la mejor alternativa de acuerdo con los criterios de entrada.

**5. Estáticos y dinámicos.** Los modelos estáticos se ocupan de determinar una respuesta para una serie especial de condiciones fijas que probablemente no cambiarán significativamente a corto plazo.

Un modelo dinámico está sujeto al factor de tiempo, que desempeña un papel esencial en la secuencia de las decisiones. Independientemente de cuáles hayan sido las condiciones anteriores, el modelo dinámico nos permite encontrar las decisiones óptimas para los períodos que quedan todavía en el futuro.

**6. Simulación y no simulación.** La simulación es un método que comprende cálculos secuenciales paso por paso, donde puede reproducirse el funcionamiento de problemas o sistemas de gran escala. En muchos casos donde ocurren relaciones complejas tanto de naturaleza predecible como aleatoria, es más fácil preparar una situación simulada en una computadora, que preparar y ampliar un modelo matemático que represente todo el proceso que se estudia. No obstante, en otros casos donde no se dispone de una solución analítica, se busca en la computadora una respuesta que mejore constantemente mediante la solución una serie de alter-



nativas, hasta que pueda aproximarse una solución óptima. Los modelos no simulados que pueden utilizar o no la computadora, tienen técnicas preparadas especialmente para sus soluciones respectivas.

### ***Diversos aspectos del modelo.***

Habiendo ya hecho la clasificación de los modelos, se puede presentar ahora un modelo general de la I. O., que será representativo del sistema que se estudie. El modelo de investigación de operaciones tiene la fórmula  $E = f(X_i, Y_j)$  donde  $E$  representa la efectividad del sistema,  $X_i$  representa las variables que están sujetas a control y  $Y_j$  representa las variables no sujetas a control. Las restricciones de los valores que pueden tomar las variables pueden expresarse en una serie suplementaria de ecuaciones y desigualdades. La obtención de una solución de un modelo de esa índole consiste en determinar los valores de las variables de control  $X_i$  para los que se maximiza la medida de efectividad. En algunos casos la medida de efectividad podría consistir en la minimización.

### ***Métodos de I. O.***

Se han desarrollado muchos métodos de I. O. que se han aplicado a los problemas de los negocios. Aunque el mismo tipo de problema ocurra en muchas industrias distintas, los modelos para solución de problemas pueden agruparse en varias formas básicas, además del material útil de la Teoría de Probabilidades, de las Estadísticas y de las Matemáticas. Esa clasificación puede ser la siguiente:

**1. Teoría de Probabilidades.** La comprensión de los elementos esenciales de la teoría de probabilidades es muy necesaria antes de proseguir con los demás modelos de I. O., porque la probabilidad es parte integrante de muchos de ellos. Podemos referirnos a la toma de decisiones con certeza, riesgo e incertidumbre, depen-

diendo de lo que sepamos sobre las condiciones existentes, o sea los estados de la naturaleza. La teoría de probabilidades es muy útil para reducir la incertidumbre. La Estadística de Bayes desarrolla formas para predecir el futuro, aunque sólo se disponga de una mínima información. El proceso de Markov es un método para pronosticar cambios competitivos en el tiempo.

**2. Técnicas matemáticas.** Se aplican muchas técnicas matemáticas para la comprensión de la I. O. En general, puede decirse que cualquier método matemático puede convertirse en un útil instrumento para los proyectos de investigación de operaciones. Las áreas de matemáticas que se aplican con más frecuencia son : la diferenciación, integración derivadas parciales y el multiplicador de Lagrange. Los vectores, matrices y determinantes son muy útiles para comprender los modelos de programación.

**3. Modelos de secuenciación.** Estos modelos comprenden la determinación de una secuencia para una serie de tareas o eventos, o la mejor secuencia para dar servicios a los clientes, a fin de aminorar el total de tiempo y de costos. El Pert (Evaluación de Programas y Técnica de Revisión)/ Tiempo, Pert /Costo y Pert / Lob son procedimientos para un análisis en redes.

**4. Modelos de reemplazo.** Generalmente los problemas de reemplazo son de dos tipos : los que comprenden artículos que se deterioran a través del tiempo y los que fallan después de determinado período. Las soluciones del primer tipo se obtienen mediante el cálculo y la programación dinámica. El segundo tipo puede resolverse mediante el Muestreo Estadístico y Teoría de Probabilidades.

**5. Modelos de inventario.** Estos modelos se ocupan de dos decisiones : qué cantidad hay que ordenar cada vez y cuándo hay que pedir esa cantidad a fin de

aminorar el costo total. Las reglas de decisión del costo más bajo para la administración de los inventarios pueden obtenerse también por medio del cálculo, la teoría de probabilidades, la programación dinámica y la simulación de computadoras.

**6. Modelos de asignación.** Cuando hay que llevar a cabo varias actividades, maneras alternativas de ejecutarlas e instalaciones y recursos limitados para desempeñar cada una de ellas del modo más efectivo, habrá un problema de asignación de esos recursos escasos. El problema consiste en combinar las actividades y los recursos en forma óptima de modo que la eficacia general se aumente al máximo, o sea que se aumenten las utilidades y se disminuyan los costos. Esto se conoce como "Programación Matemática". Cuando las restricciones se expresan en forma de ecuaciones lineales, esto se conoce como "Programación Lineal". Si alguna restricción no es lineal, se le llama "Programación no Lineal". Además tenemos la teoría de la dualidad de la programación lineal que establece la relación entre dos formulaciones distintas del mismo problema. Además de la programación lineal y no lineal, hay otros tipos de programación: entera, cuadrática, convexa, estocástica, de decisión, paramétrica y dinámica. Difieren en la cantidad de datos que pueden manejar y en la clase de suposiciones que se hacen.

**7. Modelos de Programación Dinámica.** La programación dinámica, un resultado de la programación matemática, es una adición afortunada y relativamente reciente a las técnicas estándar crecientes de la I. O. Estos modelos son sumamente útiles en los procesos que se extienden a cierto número de períodos o eventos. En vez de optimizar cada decisión a medida que ocurre, la programación dinámica toma en cuenta los efectos de las decisiones de hoy sobre los períodos futuros. La

mayor parte de estos problemas de programación dinámica requieren el empleo de una computadora para manipular la gran cantidad de datos

**8 Modelos competitivos** La teoría de los juegos suministra una estructura conceptual dentro de la cual pueden formularse casi todos los problemas de competencia. En los juegos se han usado con éxito la teoría estadística de la decisión y la simulación.

**9 Modelos de líneas de espera.** La teoría de líneas de espera, llamado a veces teoría de colas, se ocupa de las llegadas aleatorias a una instalación de servicio o procesamiento de capacidad limitada. Este modelo tiene por objeto permitir la determinación del número óptimo de personal o de instalaciones que se requieren para dar servicio a los clientes que lleguen en proporciones casuales al considerar el costo de servicio y el de las esperas o congestiones. La teoría de líneas de espera utiliza la teoría de probabilidades y el cálculo.

**10. Técnicas de simulación.** La simulación que también se presta para usarse en una computadora, básicamente es de dos tipos. El primero Monte Carlo genera factores tales como ventas potenciales o embarques demorados, inspeccionando tablas que forman parte integrante del programa. El segundo es la simulación de sistemas, que utiliza datos históricos como entrada. La salida de la computadora muestra los resultados que podían haberse obtenido si se hubiera empleado los criterios de decisión.

La simulación se ha definido como una técnica cuantitativa que se emplea para evaluar cursos alternativos de acción, basada en hechos y suposiciones, con un modelo matemático de computadora, a fin de representar la toma real de decisiones en condiciones de incertidumbre.

**11. Modelos de ruta.** Uno de los más importantes problemas de ruta es el "proble-

ma del agente viajero". El problema consiste en escoger una ruta que comience en la propia ciudad del agente, pase una sola vez por cada ciudad y regrese a su punto de partida por la distancia más corta posible en términos de tiempo y costo.

**12. Modelos de búsqueda y heurísticos.** La teoría de búsqueda emplea la información y experiencia pasadas a fin de estrechar las áreas que tienen los atributos de los objetivos deseados.

Cuando nos referimos a la investigación de operaciones y al empleo de computadoras el término "Métodos heurísticos" denota sistemas de aprendizaje o de adopción automática. El modelo Heurístico emplea reglas empíricas para explorar las sendas más probables y para hacer conjeturas razonables para llegar a una conclusión, lo que reemplaza la verificación de todas las alternativas (demasiado numerosas para otro método cuantitativo), a fin de encontrar la que sea correcta. Esta técnica muy prometedora para el futuro, está relativamente inexplorada.

**13. Métodos combinados de I. O.** Algunos de los métodos, técnicas y modelos precedentes se han reunido para producir un nuevo grupo de instrumentos de I. O. para uso de los administradores. Aunque el procedimiento acostumbrado para la solución de procesos combinados consiste en resolverlos de uno en uno en alguna secuencia lógica, la investigación de operaciones debe combinar inicialmente los modelos cuando tienen interrelaciones, para llegar a una solución óptima.

Finalmente, la dirección futura de la I. O. se estudia en relación con las funciones principales de la empresa.

Las clasificaciones anteriores no comprenden todos los problemas de investigación de operaciones. Sin embargo incluye muchos de los que se han encontrado hasta ahora. Aunque la lista es incompleta, permite que los administradores perciban lo que es común a todos los problemas y les recuerda que hay métodos cuan-

titativos para resolverlos. El lector no debe dejarse influir demasiado por el nombre de modelo, sino que debe mantener la mente abierta a fin de hacer analogías con las situaciones comparables de los negocios. Por ejemplo, los modelos de inventarios se aplican fácilmente a los problemas de capital de trabajo, personal y efectivo. Los de línea de espera se aplican sin dificultad a los inventarios; así que la imaginación puede ser una clave importante para el adelanto de las técnicas.

**Nota.** La mayor parte de lo escrito aquí se ha tomado de Thierauf Robert J. y Grosse Richard A., *Toma de decisiones por medio de Investigación de Operaciones*. Editorial Limusa-Wiley, S. A., México, 1972, Capítulo primero.

### ***Bibliografía comentada***

Thierauf, R. J. - Grosse, R. A. *Toma de decisiones por medio de investigación de operaciones* : Limusa-Wiley, México, 1972, 560 páginas.

Este libro presenta los fundamentos de la I. O. con amplia información acerca de las técnicas cuantitativas mas recientes que se emplean en los negocios para la toma de decisiones. Reune buenas cualidades como libro de texto a nivel introductorio. La exposición es interesante y metódica, el estilo claro y el enfoque didáctico; tiene una serie de ejemplos de gran aplicabilidad en los negocios y una serie de ejercicios propuestos que además tienen respuestas al final del libro. El libro no está sobrecargado con notaciones y pruebas matemáticas rigurosas. Solo se necesita conocer los fundamentos de la estadística, el cálculo de probabilidades y el cálculo que se enseña en las carreras de Contaduría, Economía y Administración de empresas.

Ackoff, R. L. - Sasieni, M. W. *Fundamentos de investigación de operaciones*. Li-



musa - Wiley, México.

Es una introducción a la Investigación de Operaciones; en los primeros capítulos se estudian los aspectos generales de los planeamientos de los problemas y se presenta material sobre el origen de un problema de decisión, la determinación de los objetivos, la construcción de un modelo, la simulación y la teoría de la utilidad. Los capítulos siguientes tratan de modelos matemáticos y las técnicas adecuadas para distintos problemas específicos. Abarcan inventarios, colas, redes y direccionamiento, las técnicas de la **ruta crítica**, programación dinámica y teoría de la búsqueda. A continuación se examina la prueba de un modelo, la solución, la ejecución de la misma y su control. El libro termina con un estudio sobre la proyección de la I. O. en nuevas áreas de aplicación.

Es un libro que resulta adecuado como material de consulta para cualquier curso sobre el tema que se imparta en las carreras de Ingeniería, Física, Matemáticas, Economía, Administración, Estadística.

Sasieni, M. W. - Yaspan, A. - Friedman, L. *Investigación de Operaciones, Métodos y Problemas*. Limusa-Wiley, México.

Es un libro que satisface la necesidad actual de un enfoque claro y definido respecto a la investigación de operaciones y que, a base de ejemplos y problemas, proporciona al estudioso los conocimientos necesarios para formular y resolver modelos matemáticos simples. El libro comienza con una breve exposición de ciertas nociones básicas de probabilidades y estadística. A continuación se presentan capítulos específicos concernientes a inventarios, líneas de espera, teoría de juegos y programación dinámica.

Este libro puede servir de texto para un curso semestral introductorio sobre técnicas de Investigación de Operaciones, bien sea para un nivel profesional avan-

zado, o para estudiantes que se especializan en ingeniería industrial, estadística, economía y matemática aplicada.

Kaufmann, A. *Métodos y modelos de la Investigación de Operaciones*. C. E. C. S. A., México, 1971 - Tomo I, Tomo II, 570 y 567 págs., respectivamente.

El autor consagra este libro a los ingenieros, organizadores, consejeros, administradores, etc. Emplea matemáticas pero evitando los desarrollos complicados y a menudo inútiles, salvo para aquellos que pretendan llegar a ser ingenieros, economistas o analistas de I. O.

A estos últimos, consideramos, esta obra no les aportará ningún conocimiento nuevo, puesto que estimamos que un buen analista debe tener una cultura matemática muy superior a la requerida para comprender este libro. Un buen analista debe ser a la vez un buen matemático completo, un estadístico, un economista previsor y un hombre con gran experiencia.

Este libro (Tomo I y Tomo II) está dividido en dos partes; en la primera, no se precisa ningún conocimiento de matemáticas superior al adquirido en el bachillerato. En la segunda parte se encuentran todos los desarrollos matemáticos, las demostraciones difíciles, los problemas de almacenamientos (stocks), los problemas de reserva y de gestión de equipos, objetos del primer tomo, se trata en el segundo tomo la teoría de gráficos y sus aplicaciones, la programación dinámica y la teoría de juegos de estrategia.

Muller, I. *Iniciación a la organización y a la investigación operativa*. Editores Técnicos Asociados - Barcelona, 1967, 325 págs.

Este libro como dice su autor, está hecho para ingenieros y sus colaboradores; les dará una visión de conjunto sobre la manera útil y práctica de aplicar

las nociones de la estadística, la teoría de las probabilidades y diversos aspectos de las matemáticas modernas. Ilustrado con numerosos ejemplos.

En la primera parte el lector se pondrá en contacto ante todo con los medios que permiten definir las estructuras y clasificar los datos. Un repaso de las nociones fundamentales estadísticas precede a un capítulo importante que se refiere a los modelos. Se pasa a continuación a los múltiples aspectos, psicológicos y tecnológicos, que se refieren a las condiciones de ejecución manuales o automáticas de los trabajos industriales.

En la segunda parte son presentados los principales modelos utilizados en I. O. : programas lineales, programas de afectación o de flujo, problemas de ordenamiento, fenómenos de espera, fenómenos de desgaste (o fatiga), problemas de almacenamiento o de reaprovisionamiento, y, finalmente, algo sobre teoría de la decisión.

McKinsey J. C. C. *Teoría matemática de los juegos*. Editorial Aguilar, Madrid, 1967 ; 377 págs.

Este libro no exige al lector otros conocimientos matemáticos que los usuales del cálculo infinitesimal y el álgebra clásica.

Se pretende que este sea un libro de texto para un curso avanzado. Se supone que el estudiante posee, por lo menos, los conocimientos de análisis que ordinariamente se adquieren en un curso de cálculo avanzado. Se emplean por este motivo sin ninguna explicación conceptos tales como convergencia, continuidad, derivadas, integrales (Riemann), extremos inferiores, extremos superiores y máximos y mínimos.

Este libro incluye : juegos rectangulares, teoremas fundamentales de los juegos rectangulares ; soluciones de un juego rectangular ; métodos de aproximación

para obtener el valor de un juego; juegos en forma extensiva; juegos con intin -  
tas; estrategias ; funciones de distribución ; integrales de Stieltjes ; teorema fun-  
damental de juegos continuos; juegos separables, etc. .

Saaty, T. L. *Elementos de la teoría de colas*. Aguilar, Madrid, 1967 ; 475 págs.

La teoría de colas es una rama de la matemática aplicada que utiliza concep -  
tos del campo de los procesos estocásticos. Ha sido desarrollada en un intento de  
predecir las fluctuaciones de demanda a partir de datos de observación, para esta-  
blecer así un modo de obrar que proporcione a los clientes un servicio adecuado,  
con una espera tolerable.

Aún cuando este libro se destina a estudiantes graduados, con una buena for-  
mación de cálculo, probabilidades, teoría elemental de variable compleja y matri-  
ces, puede también utilizarse por los estudiosos que necesiten familiarizarse rá-  
pidamente con la teoría de colas, sus ideas básicas y métodos particulares. Su  
contenido está dividido en cuatro partes : la primera da el material básico acerca  
de los conceptos y métodos de colas, y la teoría de probabilidades. La segunda  
está dedicada a las colas de Poisson, que, históricamente, encierran el primer  
tratamiento analítico del problema por A. K. Erlang. La tercera parte trata colas  
que no son de Poisson, que se estudian principalmente en aquellos casos donde  
se ha alcanzado el equilibrio estadístico ; en un capítulo particular se estudian  
los tiempos de espera. La cuarta parte, examina el efecto de varias disciplinas  
de cola, redes especiales y varios fenómenos de colas ; figura además algo so-  
bre aplicaciones y sobre la teoría de renovación.

Kaufmann A. - Cruon R. *Los fenómenos de espera : teoría y aplicaciones*. C. E.  
C. S. A. - México, 1966 - 327 págs.

La espera sigue siendo un mal de nuestra época. Prioridad, impaciencia, bloqueo, embotellamiento, son nociones sencillas del lenguaje común y corriente que dan firme testimonio de nuestras preocupaciones, frente a las dificultades que nos ofrece nuestra vida moderna y altamente "civilizada".

Este libro no exige ningún conocimiento especializado previo del lector. Está dirigido a los ingenieros economistas, organizadores, ejecutivos de empresas en pleno desarrollo.

Kaufmann, A. *La ciencia y el hombre de acción*. Ediciones Guadarrama, Madrid, 1967 ; 254 págs.

Esta obra es una introducción a la "praxeología" o ciencia de tomar decisiones, y en ella se demuestran los numerosos procedimientos racionales por los cuales podemos dirigir nuestros pensamientos y cotejar nuestra información antes de tomar una decisión. Esta obra es una original introducción a una ciencia que es nueva pero que está desarrollándose rápidamente. Tanto en los negocios como en la tecnología, los datos reales deben analizarse por medio de sistemas electrónicos, procedimiento que a menudo se piensa excluye de sus cálculos todo lo referente al orden social o ético. Efectivamente, como el autor demuestra, estos valores humanos no están subordinados a métodos electrónicos y matemáticos, pero el saber esto puede hacer más profundo nuestro conocimiento de los problemas relacionados con la elección y la acción, aunque para resolver estas cuestiones sea necesario también el llegar a comprender plenamente la condición humana.

No es un libro de texto, pero si es una obra muy interesante que me permito recomendar.

Por último, citamos dos libros de Programación Lineal, de los cuales ya se

sabe el contenido, siendo uno de ellos muy clásico como libro de texto en varias universidades ; son ellos : Gass, S. I. *Programación Lineal*, C.E.C.S.A. México, 1969 ; 342 págs. Simonnard, M., *Programación Lineal* , Editorial Paraninfo , Madrid, 1972, 527 págs.

\* \* \*

VICTOR SAMUEL ALBIS GONZALEZ

Continuamos aquí el estudio iniciado en (19), de la influencia de Fermat en el desarrollo de la teoría de los números.

3. La ecuación  $x^2 + y^2 = z^2$  : El teorema de Morrell - Weil.

Para discutir mejor estos resultados vamos a introducir los problemas C y C' (19) conduciendo naturalmente a la ecuación  $x^2 + y^2 = z^2$ .

La cual, según el teorema de J. Morrell (10, pág. 238), ha representado un problema fundamental en el desarrollo de la teoría de los números. Comencemos por analizar que la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (20)$$

Para el estudio de esta ecuación, el método de Bachelier, quien en 1921, indicó un método para obtener las soluciones racionales cuando una de ellas  $x, y$  era conocida, este método es el de las tangentes y secantes al gráfico de la ecuación (20), el cual discutiremos más adelante. En la carta que da origen a esta serie de artículos divulgativos (19), Fermat indica que las únicas soluciones enteras de (20) son  $(1, 1, 1)$  y que las puede obtener por descenso infinito. Euler, en 1788, usando el descenso

(\*) Representación correspondiente a la conjetura sobre curvas Elípticas, discutida por el autor en el IV Coloquio Colombiano de Matemáticas, Bogotá, 1972.