

NOTAS

Sobre algunas funciones trascendentes enteras. En [2] J. Garavito define las siguientes funciones :

$$(1) \quad X_n(x) = 1 + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots + \frac{x^{kn}}{(kn)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{kn}}{(kn)!},$$

las cuales convergen para todo $x \in \mathbb{R}$ y demuestra enseguida que $X_n^{(n)}(x) = X_n(x)$, es decir, que $X_n(x)$ es solución de la ecuación diferencial lineal homogénea $y^{(n)} - y = 0$; usando el método de Euler [1; págs. 110-111] encontramos las siguientes soluciones linealmente independientes

$$y_k(x) = \exp(\zeta_n^k x), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

donde $\zeta_n = \exp(2\pi i/n)$ es una raíz primitiva n -ésima de 1. Es fácil verificar que

$$(2) \quad \exp(\zeta_n^k x) = X_n + \zeta_n^k X_n^{(n-1)} + \dots + \zeta_n^{k(n-2)} X_n'' + \zeta_n^{k(n-1)} X_n^{(n)},$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1,$$

y como el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta_n & \dots & \zeta_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \zeta_n^{n-1} & \dots & \zeta_n^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

(pues es un Vandermonde y las cantidades $1, \zeta_n, \dots, \zeta_n^{n-1}$ son distintas entre

sí), las $X_n, X_n^{(n-1)}, \dots, X_n'', X_n'$ son soluciones reales linealmente independientes. Este resultado lo obtiene Garavito, pero su argumento es incorrecto.

Sumando las ecuaciones en (2) obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp(\zeta_n^k x) = n X_n(x) + X_n^{(n-1)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^k \right) + \dots + X_n'(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^{(n-1)k} \right) = n X_n(x)$$

pues cada suma entre paréntesis, en el miembro derecho, vale cero ya que las $\zeta_n^j, j=1, \dots, n-1$, son las raíces del polinomio $t^{n-1} + \dots + t + 1$; es decir,

$$(3) \quad X_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp(\zeta_n^k x).$$

Poniendo $n=2$ en (3), obtenemos

$$X_n(x) = ch x \quad y \quad X_n'(x) = sh x,$$

resultado que obtiene Garavito usando una integración (en variable compleja; es necesario adivinar en Garavito cuándo pasa de variable real a variable compleja) a lo largo de un camino bastante complicado*. Aplicando la regla de Cramer al sistema (2) se pueden encontrar expresiones más complicadas que (3) para $X_n'(x), \dots, X_n^{(n-1)}(x), n \geq 3$. [Esto no lo menciona Garavito].

Sirviéndose de

$$\exp(\zeta_n x) = X_n + \zeta_n X_n^{(n-1)} + \dots + \zeta_n^{(n-1)} X_n'$$

y de las relaciones

$$\zeta_n^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

Garavito obtiene la siguiente generalización de la fórmula de Euler ($x \in \mathbb{R}$):

* Aquí muestra algún conocimiento sobre las superficies de Riemann

$$(4) \quad \exp(\zeta_n x) = [X_n + X_n^{(n-1)} \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + X_n' \cos \frac{(n-1)2\pi}{n}] \\ + i [X_n^{(n-1)} \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + X_n' \sin \frac{(n-1)2\pi}{n}],$$

la cual coincide con $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ tomando $n=4$, como puede verificarse tras sencillos y rutinarios cálculos.

Usando las otras expresiones en (2), podrían obtenerse expresiones semejantes para $\exp(\zeta_n^k x)$, $k=2, \dots, n-1$.

Luego Garavito estudia con un poco más de detalle el caso $n=3$. Su razonamiento sigue las siguientes pautas: Observa que

$$\exp(\zeta_3 x) = (X_3 - X_3') - \zeta_3 (X_3' - X_3''),$$

y hace

$$u = X_3 - X_3', \quad v = X_3' - X_3'', \quad w = X_3'' - X_3,$$

obteniendo

$$u + v + w = 0$$

$$du/dx = dv/dx = w, \quad dw/dk = u$$

$$(5) \quad \exp(\zeta_3 x) = u - \zeta_3 v$$

Tomando $\zeta_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3} = -\cos \varphi + i \sin \varphi$, $\varphi = \pi/3$ y comparando las partes reales e imaginarias de (5), obtiene

$$u = \exp(-x \cos \varphi) [\sin(x \sin \varphi + \pi/3) / \sin \varphi],$$

$$v = \exp(-x \cos \varphi) [\sin(x \sin \varphi + \pi) / \sin \varphi],$$

$$w = \exp(-x \cos \varphi) [\sin(x \sin \varphi + 4\pi/3) / \sin \varphi].$$

¡Esta última es incorrecta pues debiera aparecer $2\pi/3$ en vez de $4\pi/3$! Observa entonces que u, v, w se parecen a las funciones auxiliares $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ de Ja-

cobi, que permiten estudiar las funciones elípticas [cfr. A. Markushévich, Teoría de las funciones analíticas, t. 2, Mir, Moscú, 1970], pero de allí no pasa.

Otra pregunta que no absuelve Garavito es la de las propiedades de la función inversa de $X_n(x)$. Parece desconocer el procedimiento de inversión de Lagrange [A. Markushévich, Teoría de las funciones analíticas, t.1, Mir, Moscú, 1970, págs. 476-481]. Para $n > 1$, obtenemos

$$(6) \quad \varphi_n(\omega) = z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}} \left(Y_n(\zeta)^{-k/n} \right)_{\zeta=0} (\omega-1)^{k/n},$$

donde $\omega = X_n(z)$ y

$$(7) \quad Y_n(\zeta) = \frac{1}{n!} + \frac{\zeta^n}{(2n)!} + \frac{\zeta^{2n}}{(3n)!} + \dots,$$

siendo válida la expresión (6) en una vecindad del punto 1, a excepción del mismo punto 1. De aquí se deduce que $\varphi_n(\omega) = z$ es una función analítica n -forme con un punto de ramificación algebraico de orden $n-1$ en el punto 1. (Véase [3; pág. 481]). Usando (7) es posible, teóricamente, encontrar los primeros términos de (6). Así, por ejemplo, para $n=2$, obtenemos

$$\text{Arc ch } \omega = \frac{\sqrt{2}}{2!} (\omega-1)^{1/2} - \frac{\sqrt{2}}{3!} (\omega-1)^{3/2} + \dots$$

Comentarios : La mayoría de los resultados de Garavito en su trabajo se obtienen fácilmente del estudio cuidadoso de la ecuación diferencial lineal $y^{(n)} = y$, usando el método de Euler. El desconocimiento del procedimiento de Lagrange, le impidió estudiar las inversas de $X_n(z) = \omega$, $n > 1$, las cuales difieren esencialmente de $\varphi_1(\omega) = \log \omega = z$. La pregunta sobre las funciones u, v, w y su relación con algunas (hipotéticas) funciones semejantes a las elípticas es interesante, pero no pasa de allí Garavito; ojalá alguien esté interesado en responder-

1a. En resumen, se trata de verdaderos *elementos*, cuyo estudio posterior nunca fue hecho, posiblemente por falta de aplicaciones y motivación. El profesor Yu Takeuchi, señala, por otra parte, que el comportamiento asintótico de las soluciones $X_n, X'_n, \dots, X_n^{(n-1)}$ de $y^{(n)} = y$, no ofrece mayor interés.

Bibliografía

1. L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, Mir, Moscú, 1969.
2. J. Garavito, *Elementos de algunas funciones trascendentes enteras*, Anales de Ingeniería, 24(1916), 150-157.
3. A. Markushévich, *Teoría de las funciones analíticas*, 2 tomos, Mir, Moscú, 1970.

Proyecto de Investigaciones Históricas
Sociedad Colombiana de Matemáticas - Colciencias