

EL DOMINIO DE CONVERGENCIA DE LA SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{|x - x_n|}$$

YU TAKEUCHI

§ 1. Introducción.

Sea D un conjunto contable y denso en $[0,1]$, y $\{\alpha_n\}$ una sucesión de números positivos que tiende a cero. Sea

$$D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (1)$$

un ordenamiento de los puntos del conjunto D , en el presente trabajo se van a estudiar los dos conjuntos (ver Apéndice).

$$A_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} N(x_n, \frac{\alpha_n}{j}) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} N(x_n, \frac{\alpha_n}{j}) \right\} \quad (2)$$

$$A_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, \alpha_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_n, \alpha_k) \right\} \quad (3)$$

donde $N(x_k, \alpha_k) = (x_k - \alpha_k, x_k + \alpha_k)$ es la vecindad del punto x_k con radio α_k . Nótese que los dos conjuntos A_1 y A_2 dependen del ordenamiento de los puntos del conjunto D .

Las siguientes propiedades de A_1 y de A_2 son bien conocidas.

(i) A_1 y A_2 son densos en $[0,1]$. ([2])

(ii) A_1 y A_2 son conjuntos no-contables. ([6], [3])

(iii) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces :

$$m(A_1) = 0 \quad , \quad m(A_2) = 0 \quad . \quad ([2])$$

(iv) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, la medida de A_2 depende del ordenamiento de D . Existe un ordenamiento especial de D para el cual $m(A_2) = 1$. ([2]).

En el párrafo 3, generalizando la propiedad (iv) se demuestra que dado un número c ($0 \leq c \leq 1$) existe un ordenamiento del conjunto D que satisface :

$$1) \quad m(A_1) = c \quad (\text{ó} \quad m(A_2) = c)$$

2) El complemento de A_1 (ó de A_2) es denso en $[0, 1]$.

En el párrafo 2 estudiaremos algunas propiedades preliminares para facilitar el desarrollo del párrafo 3. En el párrafo 4 se observa que el dominio de divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_n|} \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n < +\infty \quad , \quad (4)$$

o sea, el conjunto :

$$\{x \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_n|} = +\infty\} \quad (5)$$

está estrechamente relacionado con conjuntos del tipo A_1 ó del tipo A_2 e investigamos bajo qué condiciones la serie (4) converge para casi todo x . En el último párrafo veremos algunas aplicaciones del párrafo 4.

§ 2. Algunas relaciones preliminares.

Lema 1. Sean $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ sucesiones decrecientes de conjuntos :

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \quad ; \quad B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots \quad (1)$$

entonces :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n] = \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right] \cup \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right]. \quad (2)$$

Demostración. Se tiene evidentemente que :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n] \supset \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right] \cup \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right] \quad (3)$$

puesto que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n] \quad , \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n].$$

Vamos a demostrar la inclusión en el sentido contrario. Sea

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n]$$

entonces $x \in A_n \cup B_n$ para todo n . Evidentemente uno de los siguientes dos conjuntos es infinito :

$$\{n \mid x \in A_n\} \quad , \quad \{n \mid x \in B_n\} \quad ; \quad (4)$$

supongamos que el primero es infinito. Sea

$$\{n \mid x \in A_n\} = \{s(k) \mid k \in \mathbb{N}\} \quad , \quad s(1) < s(2) < s(3) < \dots$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ existe $s(k)$ tal que $s(k) > n$, luego :

$$x \in A_{s(k)} \subset A_n$$

esto es :

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

De la misma forma, si el segundo conjunto en (4) es infinito se tiene que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

Por lo tanto, en cualquier caso obtenemos que

$$x \in \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right] \cup \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right],$$

y así

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n] \subset \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right] \cup \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right]. \quad (5)$$

De (3) y (5) se tiene la igualdad (2) ■

Nota : Las condiciones en (1) son indispensables para obtener la igualdad (2). Por ejemplo, si

$$A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad B_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

entonces :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1] = (0, 1],$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{1\}, \quad \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right] \cup \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right] = \{1\}. \quad \blacksquare$$

Lema 2. Sea B un conjunto denso en $[a, b]$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ una serie divergente de términos positivos entonces existen

$$y_1, y_2, \dots, y_M \in B$$

tales que

$$\bigcup_{k=1}^M N(y_k, \alpha_k) \supset [a, b].$$

Demostración. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$ existe M tal que

$$\sum_{k=1}^M \alpha_k \geq b - a.$$

Consideremos los siguientes puntos (ver Fig. 1) :

$$x_0 = a, \quad x_M = b,$$

$$x_k = a + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \quad (k = 1, 2, \dots, M-1).$$

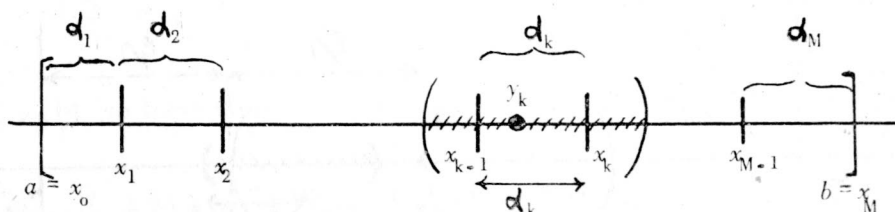


Fig. 1

El intervalo (x_{k-1}, x_k) contiene por lo menos un punto de B , digamos $y_k \in B$. Entonces

$$N(y_k, \alpha_k) \supset [x_{k-1}, x_k].$$

luego :

$$\bigcup_{k=1}^M N(y_k, \alpha_k) \supset \bigcup_{k=1}^M [x_{k-1}, x_k] = [a, b] \quad . \quad \blacksquare$$

Lema 3. Sean $\{y_n\}$ una sucesión convergente y $\{\alpha_n\} \rightarrow 0$. Entonces los siguientes conjuntos son de medida nula :

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N(y_n, \alpha_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(y_k, \alpha_k) \right\} \quad (6)$$

$$(ii) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} N(y_k, \frac{1}{j} \alpha_k) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(y_k, \frac{1}{j} \alpha_k) \right\} \quad (7)$$

Demostración. Supongamos que $\{y_n\} \rightarrow y_0$; dado $\varepsilon > 0$ existe K tal que

$$\left. \begin{aligned} |y_k - y_0| &< \frac{1}{4} \varepsilon \\ 0 &< \alpha_k < \frac{1}{4} \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad \text{para todo } k > K. \quad (8)$$

(i) Tenemos :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(y_k, \alpha_k) \right\} \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} N(y_k, \alpha_k) \quad (\text{para todo } n) \quad (9)$$

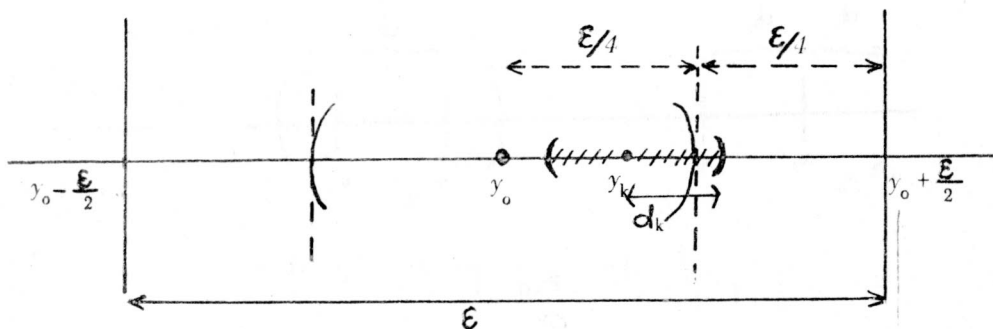


Fig. 2

De (8) tenemos :

$$N(y_k, \alpha_k) \subset N(y_0, \frac{1}{2} \varepsilon) \quad \text{para todo } k > K.$$

luego :

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} N(y_k, \alpha_k) \subset N(y_0, \frac{1}{2} \varepsilon) \quad \text{si } n > K. \quad (10)$$

De (9) y (10) se tiene que :

$$m \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(y_k, \alpha_k) \right\} \right] < \varepsilon. \quad (11)$$

Como ε es cualquiera, se tiene que el conjunto (6) es de medida cero.

(ii) De (10) :

$$\bigcup_{k=K+1}^{\infty} N(y_k, \frac{1}{j} \alpha_k) \subset N(y_0, \frac{1}{2} \varepsilon) \quad (12)$$

puesto que $\frac{1}{j} \alpha_k \leq \alpha_k$ para todo j . Si

$$j > \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_K)}{\varepsilon} \quad (13)$$

entonces

$$m \left[\bigcup_{k=1}^K N(y_k, \frac{1}{j} \alpha_k) \right] \leq \frac{2}{j} (\alpha_1 + \dots + \alpha_K) < \varepsilon. \quad (14)$$

De (12) y (14) se tiene que :

$$m \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} N(y_k, \frac{1}{j} \alpha_k) \right] \leq m \left[\bigcup_{k=1}^K N(y_k, \frac{1}{j} \alpha_k) \right] + m \left[\bigcup_{k=K+1}^{\infty} N(y_k, \frac{1}{j} \alpha_k) \right] < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \quad (15)$$

esto es, el conjunto (7) tiene la medida nula. ■

Teorema 1. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ una serie convergente de términos positivos y

$D = \{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto contable denso en $[0,1]$, entonces la siguiente función de la variable real t ,

$$f(t) = m \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t) \right] \cap [0,1] \quad (16)$$

es creciente y continua.

Demostración. (i) Si $t' > t$ entonces :

$$N(x_k, \alpha_k t') \supset N(x_k, \alpha_k t) \quad \text{para todo } k=1, 2, 3, \dots$$

luego :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t') \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t),$$

y por lo tanto :

$$f(t') = m \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t') \right] \cap [0,1] \geq m \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t) \right] \cap [0,1] = f(t) \quad (17)$$

(ii) Si $t' > t$ entonces tenemos :

$$\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t') - \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t) \right\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ N(x_k, \alpha_k t') - N(x_k, \alpha_k t) \}. \quad (18)$$

Tenemos también

$$m[N(x_k, \alpha_k t') - N(x_k, \alpha_k t)] = 2t'\alpha_k - 2t\alpha_k = 2(t' - t)\alpha_k,$$

por lo tanto se tiene que :

$$0 \leq f(t') - f(t) = m \left[\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t') - \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t) \right\} \cap [0,1] \right]$$

$$\leq m \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \{ N(x_k, \alpha_k t) \cap [0, 1] \} \right]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2(t' - t) \alpha_k = 2(t' - t) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \quad (19)$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < +\infty$ se tiene que :

$$\lim_{t' \rightarrow t} f(t') = f(t) ,$$

o sea que f es continua en cualquier punto . ■

Corolario . Dado un número real c ($0 < c < 1$) existe un conjunto abierto y denso en $[0, 1]$ cuya medida es igual a c [4] .

Demostración. Sea $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ una serie convergente de términos positivos y sea

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t) .$$

Entonces sabemos que

$$m(A) = 0$$

ya que

$$m(A) \leq m \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t) \right] \leq 2t \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0) .$$

Por la continuidad de la medida se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0 \quad (20)$$

Además :

$$f\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) = m \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} N\left(x_k, \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\right) \cap [0, 1] \right] \geq m \left[N\left(x_1, 1\right) \cap [0, 1] \right] = m([0, 1]) = 1 ,$$

o sea :

$$f\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) = 1. \quad (21)$$

De (20) y (21) , dado c ($0 < c < 1$) existe t_0 tal que

$$f(t_0) = c \quad (\text{Teorema del valor intermedio}), \quad (22)$$

o sea que

$$m\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t_0)\right] = c. \quad \blacksquare$$

§ 3. Ordenaciones especiales del conjunto D .

Lema 4. Sean $\{\alpha_k\}$ una sucesión de términos positivos tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty, \quad \alpha_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \quad (1)$$

y $\{\beta_j\}$ una sucesión de términos positivos. Dado un conjunto D contable y denso en $[a, b]$, existe un ordenamiento de los puntos de D , $D = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, tal que

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \beta_j \alpha_k) \right\} \supset [a, b] \quad (2)$$

Demostración. Sea $\{\alpha_{s(k)}\}$ una subsucesión de $\{\alpha_k\}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{s(k)} < +\infty; \quad (3)$$

entonces $\mathbb{N} - \{s(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ es contablemente infinito. Sea

$$\mathbb{N} - \{s(k) \mid k \in \mathbb{N}\} = \{t(k) \mid k \in \mathbb{N}\},$$

entonces, por (1), se debe tener que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{t(k)} = +\infty . \quad (4)$$

Sea D_1 un subconjunto de D contablemente infinito cuyo complemento $D_0 = D - D_1$ sea denso en $[a, b]$. Escogemos

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{p_1} \in D_0$$

tales que

$$\bigcup_{k=1}^{p_1} N(\tilde{x}_k, \beta_1 \alpha_{t(k)}) \supset [a, b] \quad (\text{por el Lema 2}). \quad (5)$$

Como $\sum_{k=p_1+1}^{\infty} \beta_2 \cdot \alpha_{t(k)} = +\infty$, podemos escoger :

$$\tilde{x}_{p_1+1}, \tilde{x}_{p_1+2}, \dots, \tilde{x}_{p_2} \in D_0$$

tales que

$$\bigcup_{k=p_1+1}^{p_2} N(\tilde{x}_k, \beta_2 \alpha_{t(k)}) \supset [a, b] \quad (\text{Lema 2}) \quad (6)$$

y así sucesivamente. En general, para $j = 1, 2, 3, \dots$, escogemos :

$$\tilde{x}_{p_j+1}, \tilde{x}_{p_j+2}, \dots, \tilde{x}_{p_{j+1}} \in D_0$$

tales que

$$\bigcup_{k=p_j+1}^{p_{j+1}} N(\tilde{x}_k, \beta_j \alpha_{t(k)}) \supset [a, b] . \quad (7)$$

$D - \{ \tilde{x}_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ es contablemente infinito ya que

$$D = \{ \tilde{x}_k \mid k \in \mathbb{N} \} \supset D_1.$$

Sea

$$D = \{ \tilde{x}_k \mid k \in \mathbb{N} \} = \{ \tilde{\tilde{x}}_k \mid k \in \mathbb{N} \}.$$

Vamos a demostrar que el siguiente ordenamiento de los puntos de D satisface la relación (2) :

$$D = \{ x_k \mid k \in \mathbb{N} \} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_{t(k)} = \tilde{x}_k \\ x_{s(k)} = \tilde{\tilde{x}}_k \end{cases} \quad (8)$$

De (7) , para todo j , tenemos :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{x}_k, \beta_j \alpha_{t(k)}) \supset \bigcup_{k=p_j+1}^{p_{j+1}} N(\tilde{x}_k, \beta_j \alpha_{t(k)}) \supset [a, b] \quad (9)$$

luego :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \beta_j \alpha_k) \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{x}_k, \beta_j \alpha_{t(k)}) \supset [a, b] , \quad (\text{para todo } j) . \quad (10)$$

Por lo tanto se obtiene la relación (2) . ■

Corolario 1. Sea $\{ \alpha_k \}$ una sucesión de términos positivos tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty , \quad \alpha_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) .$$

Dado un conjunto D contable y denso en $[a, b]$, existe un ordenamiento de D , $D = \{ x_k \mid k \in \mathbb{N} \}$, tal que

$$A_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \frac{1}{j} \alpha_k) \right\} = [a, b] . \quad (11)$$

Demostración. En el lema 4, tomando :

$$\beta_j = \frac{1}{j} ,$$

se tiene que

$$A_1 \supset [a, b] . \quad (12)$$

Sea

$$\alpha_o = \text{máximo de } \{ \alpha_k \mid k \in \mathbb{N} \} ,$$

entonces

$$N(x_k, \frac{1}{j} \alpha_k) \subset N(x_k, \frac{1}{j} \alpha_o) \subset (a - \frac{1}{j} \alpha_o, b + \frac{1}{j} \alpha_o) \text{ (para todo } k \text{ y todo } j) .$$

luego :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \frac{1}{j} \alpha_k) \subset (a - \frac{1}{j} \alpha_o, b + \frac{1}{j} \alpha_o) .$$

y así :

$$A_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \frac{1}{j} \alpha_k) \right\} \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} (a - \frac{1}{j} \alpha_o, b + \frac{1}{j} \alpha_o) = [a, b] . \quad (13)$$

De (12) y (13) se deduce la igualdad (11) . ■

Corolario 2. Bajo la misma hipótesis del Corolario 1, existe un ordenamiento de D , $D = \{ x_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ tal que

$$A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \right\} = [a, b] . \quad (14)$$

Demostración. En el lema 4, tomamos $\beta_j = 1$ para todo j . Dado n cual-

quiera, de (7) se tiene que :

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \supset \bigcup_{k=p_j+1}^{\infty} N(\tilde{x}_k, \alpha_{t(k)}) \supset [a, b] \quad , \quad (15)$$

donde la primera inclusión se cumple para algún p_j suficientemente grande. De (15), tomando la intersección para todo $n=1, 2, 3, \dots$, obtenemos :

$$A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \right\} \supset [a, b] \quad . \quad (16)$$

Como $\alpha_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$, dado $\varepsilon > 0$ existe n tal que

$$\alpha_k < \varepsilon \quad \text{para todo } k \geq n \quad .$$

Luego :

$$N(x_k, \alpha_k) \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \quad \text{para todo } k \geq n \quad .$$

Por lo tanto obtenemos la siguiente inclusión, para ε cualquiera :

$$A_2 \subset \bigcap_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \quad . \quad (17)$$

De (16) y (17) se tiene la igualdad (14). ■

Lema 5. Sea $\{\alpha_k\}$ una sucesión de términos positivos tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty \quad , \quad \alpha_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad .$$

Sean D y B conjuntos contables densos en $[a, b]$ con $D \cap B = \phi$.

(i) Existe un ordenamiento de los puntos de D , $D = \{x_k \mid k \in \mathbf{N}\}$, tal que

$$[a, b] - A_1 \supset B, \quad m(A_1) = b - a \quad (18)$$

donde

$$A_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N\left(x_k, \frac{1}{j} \alpha_k\right) \right\}.$$

(ii) Existe un ordenamiento de los puntos de D , $D = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$[a, b] - A_2 \supset B, \quad m(A_2) = b - a, \quad (19)$$

donde

$$A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \right\}.$$

Nota: Nótese que $A_1 \subset [a, b]$, $A_2 \subset [a, b]$. De (18) (ó 19) :

El complemento de $A_i = [a, b] - A_i$ es denso en $[a, b]$.

Demostración. Daremos solamente una demostración de (ii); se puede demostrar (i) en forma prácticamente idéntica.

Sean $B = \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ y $D = \{y_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ y sea d_k = la distancia mínima entre los puntos $\{a, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, y_k, b\}$; entonces se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0 \quad (20)$$

puesto que B es denso en $[a, b]$.

Como $\alpha_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha_k < \frac{1}{2} d_1 \quad \text{para todo } k > p_1. \quad (21)$$

Sean $\{x_1, x_2, \dots, x_{p_1}\}$, p_1 puntos cualesquiera del conjunto D . El

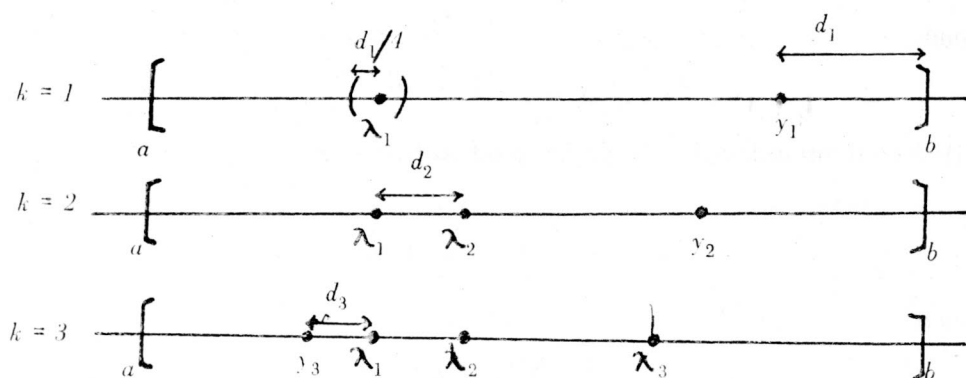


Fig. 3

conjunto $[a, b] - N(\lambda_1, \frac{1}{4}d_1)$ es la unión de dos intervalos cerrados de longitud mayor que $\frac{3}{4}d_1$ (ver Fig. 3, $k=1$), luego es posible cubrirlo con un número finito de vecindades de puntos de D con radio α_k ($k > p_1$); así podemos escoger (ver Fig. 4, $k=1$):

$$x_{p_1+1}, x_{p_1+2}, \dots, x_{p_2} \in D.$$

tales que :

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \bigcup_{j=p_1+1}^{p_2} N(x_j, \alpha_j) \supset [a, b] - N(\lambda_1, \frac{1}{4}d_1) \\ \lambda_1 &\notin B_1, \quad y_1 \in \{x_1, x_2, \dots, x_{p_1}, \dots, x_{p_2}\} \\ \alpha_k &< \frac{1}{2}d_2 \quad \text{para todo } k > p_2. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Ahora, escogemos (ver Fig. 4, $k=2$):

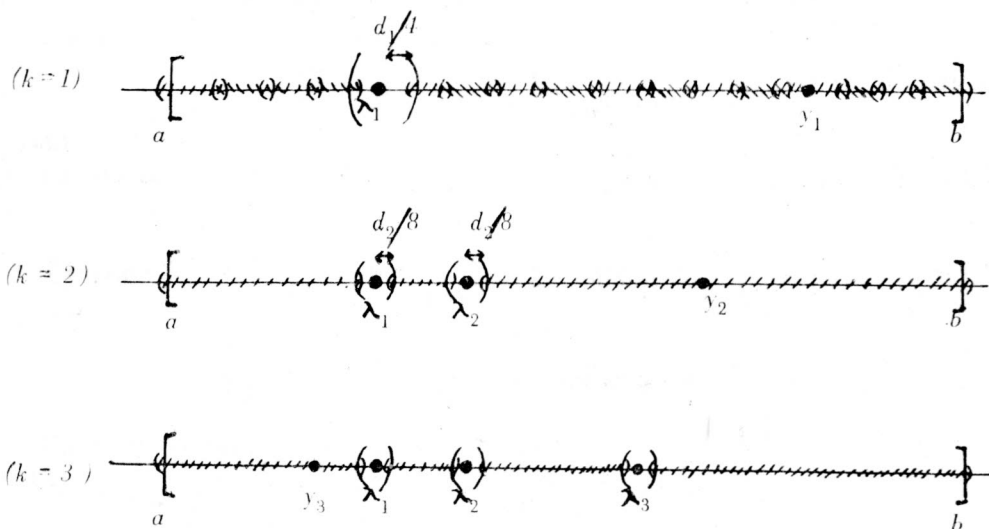


Fig. 4

$$x_{p_2+1}, x_{p_2+2}, \dots, x_{p_3} \in D$$

tales que :

$$B_2 = \bigcup_{j=p_2+1}^{p_3} N(x_j, \alpha_j) \cap [a, b] = \bigcup_{i=1}^2 N(\lambda_i, \frac{1}{8} d_2)$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \notin B_2 \quad y_2 \in \{x_1, x_2, \dots, x_{p_3}\} \quad (23)$$

$$\alpha_k < \frac{1}{2} d_3 \quad \text{para todo } k > p_3$$

Y así sucesivamente. En general, escogemos :

$$x_{p_n+1}, x_{p_n+2}, \dots, x_{p_{n+1}} \in D$$

tales que

$$\begin{aligned}
 (I) \quad B_n &= \bigcup_{j=p_{n+1}}^{p_{n+1}} N(x_j, \alpha_j) \supset [a, b] - \bigcup_{i=1}^n N(\lambda_i, \frac{1}{4n} d_n) \\
 (II) \quad y_n &\in \{x_1, x_2, \dots, x_{p_{n+1}}\} \\
 (III) \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n &\notin B_n \\
 (IV) \quad \alpha_k &< \frac{1}{2} d_{n+1} \quad \text{para todo } k > p_{n+1}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Por la condición (II) se tiene que :

$$D = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} . \tag{25}$$

Tenemos también que :

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \right\} \\
 &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=p_{n+1}}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \right\} .
 \end{aligned} \tag{26}$$

Por (III) se tiene que $\lambda_n \notin B_k$ para todo $k \geq n$; luego :

$$\lambda_n \in A_2 \quad (\text{para todo } n) ,$$

esto es :

$$[a, b] - A_2 \supset \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} = B . \tag{27}$$

Por (I) tenemos :

$$m(B_k) \geq (b-a) - k \frac{2}{4k} d_k = (b-a) - \frac{1}{2} d_k ,$$

luego

$$m \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \right) \geq b - a \quad (\text{para todo } n).$$

y así,

$$m(A_2) = m \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \right\} \right) = b - a \quad (28)$$

puesto que $A_2 \subset [a, b]$. ■

Teorema 2. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de términos positivos tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty, \quad \alpha_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Dado un conjunto D denso y contable en $[0, 1]$, y dado un número c ($0 \leq c \leq 1$),

[I] existe un ordenamiento de D , $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, tal que

(i) $m(A_1) = c$ donde $A_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \frac{1}{j} \alpha_k) \right\}$.

(ii) $[0, 1] - A_1$ y A_1 son densos en $[0, 1]$.

[II] Existe un ordenamiento de D , $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, tal que

(i) $m(A_2) = c$ donde $A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \right\}$.

(ii) $[0, 1] - A_2$ y A_2 son densos en $[0, 1]$.

Demostración. Vamos a dar la demostración de [I] y dejaremos [II] a los lectores ya que su demostración es prácticamente idéntica a la de [I].

Supongamos que $c \neq 1$ ya que, cuando $c = 1$, el teorema es un caso particular del Lema 5.

Como $\alpha_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), existe una subsucesión de $\{\alpha_n\}$, digamos $\{\alpha_{s(k)}\}$, tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{s(k)} < +\infty. \quad (29)$$

Sea

$$\{t(k) \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} - \{s(k) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{t(k)} = +\infty. \quad (30)$$

Primer caso: $c \neq 0$.

Sean $D_0 = \{x \in D \mid 0 \leq x \leq c\}$ y $D_1 = D - D_0$.

Entonces D_1 es un conjunto contablemente infinito, digamos

$$D_1 = \{\tilde{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Por el Lema 5, existe un ordenamiento de los puntos del conjunto D_0 .

$D_0 = \{\tilde{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, tal que

(i) $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{x}_k, \frac{1}{j} \alpha_{t(k)}) \right\}$ es un conjunto de medida c .

(ii) $A \subset [0, c]$

(iii) $[0, c] - A$ es denso en $[0, c]$.

Por otra parte, si

$$\tilde{A} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \frac{1}{j} \alpha_{s(k)}) \right\}$$

entonces :

$$(i) \quad m(\tilde{A}) = 0 \quad (\text{por (29)}).$$

$$(ii) \quad \tilde{A} \subset [c, 1].$$

$$(iii) \quad [c, 1] - \tilde{A} \text{ es denso en } [c, 1] \text{ puesto que } m(\tilde{A}) = 0.$$

Sea $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ el ordenamiento del conjunto D definido por :

$$x_{t(k)} = \tilde{x}_k, \quad x_{s(k)} = \tilde{\tilde{x}}_k, \quad (31)$$

entonces tenemos (Lema 1) :

$$\begin{aligned} A_I &= \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \frac{1}{j} \alpha_k) \right\} \\ &= \bigcap_{j=1}^{\infty} \left[\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{x}_k, \frac{1}{j} \alpha_{t(k)}) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{\tilde{x}}_k, \frac{1}{j} \alpha_{s(k)}) \right\} \right] \\ &= \left[\bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{x}_k, \frac{1}{j} \alpha_{t(k)}) \right\} \right] \cup \left[\bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{\tilde{x}}_k, \frac{1}{j} \alpha_{s(k)}) \right\} \right] \\ &= \tilde{A} \cup \tilde{\tilde{A}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Por lo tanto, A_I satisface todas las condiciones exigidas.

Segundo caso : $c = 0$.

Sea $\{\tilde{x}_k\}$ una sucesión convergente de puntos de D ; entonces

$D = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ es contablemente infinito. Sea

$$D = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{\tilde{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces el ordenamiento definido por (31) cumple la condición del teorema puesto que

$$m(\tilde{A}) = 0 \quad (\text{por el Lema 3})$$

$$m(\tilde{A}) = 0 \quad (\text{por (29)}) , \quad y$$

$$m(A_I) \leq m(A) + \dot{m}(\tilde{A}) = 0 \quad (\text{por (32)}) . \quad \blacksquare$$

§ 4. Dominio de la convergencia. Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \tag{1}$$

una serie convergente de términos positivos. Dado un conjunto $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, contable y denso en $[0, 1]$, vamos a estudiar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ converge la siguiente serie ([1]):

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_n|} \tag{2}$$

(i) Si $x \notin [0, 1]$ la serie (2) converge

En realidad, si

$$r = \text{mínimo} \{ |x - 0| , |x - 1| \}$$

(1) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ diverge, entonces la serie (2) diverge para todo x real.

entonces $|x - x_n| \geq r$ para todo n , puesto que $x_n \in [0, 1]$ para todo n y por lo tanto se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_n|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{r} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} C_n < +\infty.$$

(ii) Sea

$$B = \left\{ x \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_n|} = +\infty \right\}, \quad (3)$$

entonces B es no contable y medible-Lebesgue.

Demostración. Sean $B_{k,j} = \left\{ x \mid \sum_{n=1}^k \frac{C_n}{|x - x_n|} > j \right\}$ (4)

entonces $B_{k,j}$ es abierto para todo j y para todo k . Tenemos:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{k,j} = \left\{ x \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_n|} > j \right\},$$

luego

$$B = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{k,j}.$$

Como B es intersección contable de conjuntos abiertos, entonces se tiene que B es no-contable y medible-Lebesgue. ■

(iii) Sea

$$B_o = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, C_k) \right\} \cup D \quad (5)$$

entonces

$$D \subset B_o \subset B. \quad (6)$$

Demostración. Sea $x \in B_o$, entonces

$$x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, C_k) \quad \text{para todo } n,$$

esto es, existe un conjunto infinito $\{k(j) \mid j \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$x \in N(x_{k(j)}, C_{k(j)}),$$

o sea

$$|x - x_{k(j)}| < C_{k(j)} \quad (7)$$

Entonces tenemos :

$$\frac{C_{k(j)}}{|x - x_{k(j)}|} > 1 \quad (\text{para todo } j) \quad (8)$$

luego :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_n|} > \infty,$$

así que la serie (2) diverge.

(iv) Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{C_n} < \infty \quad (9)$$

entonces B es de medida nula, o sea que la serie (2) converge en casi todo x real.

Demostración. Sea

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \sqrt{C_k}) \right\} \cup D \quad (10)$$

entonces A es de medida nula (por (9)). Si $x \notin A$, entonces

$$x \notin \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \sqrt{C_k}) \quad \text{para algún } n,$$

esto es ,

$$x \notin N(x_k, \sqrt{C_k}) \quad , \quad \text{para todo } k \geq n .$$

luego :

$$|x - x_k| \geq \sqrt{C_k} \quad , \quad \text{para todo } k \geq n . \quad (11)$$

Tenemos entonces que :

$$\frac{\sqrt{C_k}}{|x - x_k|} \leq 1 \quad , \quad \text{para todo } k \geq n ,$$

luego :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sqrt{C_k} \sqrt{C_k}}{|x - x_k|} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \sqrt{C_k} < +\infty ,$$

o sea que la serie (2) converge para todo $x \notin A$. \blacksquare

$$(v) \quad \text{Si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{C_n} = +\infty \quad (12)$$

entonces existe una reordenación de N :

$$\begin{aligned} g : N &\longrightarrow N \\ n &\longrightarrow g(n) \end{aligned} \quad (g \text{ es uno a uno y sobre})$$

tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_{g(n)}|} \quad (13)$$

converge para casi todo x real , ⁽¹⁾ .

(1) En lugar de la serie (13) se puede utilizar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{g^{-1}(n)}}{|x - x_n|} \quad (13')$$

Demostración. Como la serie (1) converge, existe una sucesión de términos positivos $\{\beta_n\}$ tal que⁽²⁾:

$$\{\beta_n\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\beta_n} < +\infty. \quad (14)$$

Por el Teorema 2, existe un ordenamiento del conjunto D , digamos

$D = \{x_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ tal que el conjunto

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k^*, \beta_k) \right\} \quad (15)$$

tiene la medida cero.

Si $x \notin A$ entonces

$$x \notin \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k^*, \beta_k) \quad \text{para algún } n,$$

esto es:

$$x \notin N(x_k^*, \beta_k) \quad \text{para todo } k \geq n,$$

luego:

$$|x - x_k^*| \geq \beta_k \quad \text{para todo } k \geq n. \quad (16)$$

Tenemos entonces que:

$$\frac{\beta_k}{|x - x_k^*|} \leq 1 \quad \text{para todo } k \geq n,$$

luego:

(2) Basta tomar:

$$\beta_n = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} C_k}$$

(ver [5], Sucesiones y Series, Tomo I, pág. 156).

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k^*|} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\beta_k}{|x - x_k^*|} \cdot \frac{C_k}{\beta_k} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k}{\beta_k} < +\infty,$$

o sea que la serie (13) converge si

$$x_{g(n)} = x_n^* \quad n \in \mathbb{N}$$

(vi) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{C_n} = +\infty$ entonces B (el dominio de divergencia de la serie (2)) no siempre tiene la medida nula.

Ejemplo. Sean

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{4} \quad , \quad x_3 = \frac{3}{4}$$

$$x_4 = \frac{1}{8} \quad , \quad x_5 = \frac{3}{8} \quad , \quad x_6 = \frac{5}{8} \quad , \quad x_7 = \frac{7}{8}$$

En general, si

$$2^{n-1} \leq j < 2^n \quad \text{entonces} \quad x_j = \frac{j}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} - 1.$$

Sean

$$C_1 = \frac{1}{2^1 1^\alpha} \quad , \quad C_2 = C_3 = \frac{1}{2^2 2^\alpha}$$

$$C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = \frac{1}{2^3 3^\alpha}.$$

En general,

$$C_j = \frac{1}{2^n n^\alpha} \quad \text{si} \quad 2^{n-1} \leq j < 2^n$$

donde $1 < \alpha < 2$.

Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} C_j = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{2^n n^\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty, \quad (17)$$

puesto que $\alpha > 1$.

Sea $x < \frac{1}{2}$. Supongamos que

$$x_j \leq x < x_{j+1} \quad \text{con} \quad 2^{n-1} \leq j < 2^n.$$

Entonces se tiene:

$$|x - x_{j+i}| < i \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \dots, (2^n - 1 - j).$$

Luego

$$\frac{1}{|x - x_{j+i}|} > \frac{2^{n-1}}{i} \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \dots, (2^n - 1 - j).$$

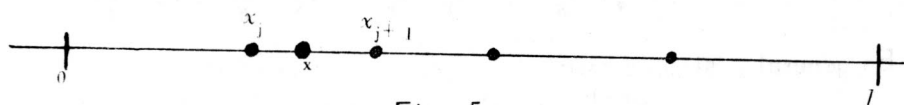


Fig. 5

Así:

$$\sum_{i=1}^{2^n-1-j} \frac{1}{|x - x_{j+i}|} > \sum_{i=1}^{2^n-1-j} \frac{2^{n-1}}{i} > \sum_{i=1}^{2^n-2} \frac{2^{n-1}}{i} > 2^{n-1} \cdot \log(2^n - 2) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} (n-2) (\log 2)$$

ya que

$$j < 2^{n-1} \Rightarrow \frac{2^{n-1}}{2} > 2^{n-1} + 2^{n-2},$$

$$2^n - 1 - j > 2^{n-2} - 1.$$

Por lo tanto tenemos que

$$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{C_i}{|x - x_i|} > \frac{1}{2^{n-\alpha}} \cdot 2^{n-1} \cdot (n-2) \cdot (\log 2) = \frac{(n-2) \cdot (\log 2)}{2 \cdot n^\alpha}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{C_i}{|x - x_i|} \right\} > \frac{(\log 2)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^\alpha} = +\infty \quad (18)$$

puesto que $\alpha < 2$.

De la misma forma se puede demostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|} = +\infty, \quad (19)$$

para todo $x > \frac{1}{2}$.

Así, para todo $x \in [0, 1]$ la serie (19) diverge, o sea que

$$B = \left\{ x \mid \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|} = +\infty \right\} = [0, 1]. \quad \blacksquare$$

§ 5. Aplicación. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ (1)

una serie de términos positivos tal que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n} = \rho < 1. \quad (2)$$

Dado un natural cualquiera l tenemos :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(C_n)^{1/l}} = \rho^{1/l} < 1. \quad (3)$$

así que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_n)^{1/l} \quad \text{converge.} \quad (4)$$

Sea

$$A^{(l)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, (C_k)^{\frac{1}{l+1}}) \right\} \cup D \quad (5)$$

entonces

$$m(A^{(l)}) = 0 \quad \text{para todo } l = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Por un método similar al utilizado en § 4, (iv), podemos demostrar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|^l} \quad (7)$$

converge si $x \notin A^{(l)}$. Sea

$$A = \bigcup_{l=1}^{\infty} A^{(l)} \quad (8)$$

entonces se tiene que $m(A) = 0$ y que la serie (7) converge para todo $x \notin A$; cualquiera sea l . Se definen las siguientes funciones para $x \notin A$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)} \quad (9)$$

$$f_n(x) = (-1)^n n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(i) f y f_n no son acotadas en ningún intervalo.

Demostración. Supongamos que f sea acotada en un intervalo (a, b) y sea M una cota de f en $(a, b) - A$.

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{x - x_k} \right| \leq M \quad \text{para todo } x \in (a, b) - A. \quad (10)$$

Por el criterio de Dirichlet ([3], [5]) la serie

$$b(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{C_k}{x - x_k} \quad (11)$$

converge uniformemente en $(a, b) - A$, o sea que dado $\varepsilon > 0$ existe N_0 tal que

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{C_k}{x - x_k} \right| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > N_0 \text{ y para todo } x \in (a, b) - A \quad (12)$$

Como $\frac{1}{k} \frac{C_k}{x - x_k}$ es continua en $(a, b) - A$ (para todo k) entonces la función b definida por la serie (11) es continua en $(a, b) - A$. Sea $x_0 \in (a, b) - A$; existe una sucesión de puntos de D , $\{x_{u(j)}\}$, que tiende a x_0 :

$$\{x_{u(j)}\} \rightarrow x_0, \quad x_{u(j)} \in D. \quad (13)$$

De (11) tenemos:

$$b(x) = \frac{1}{u(j)} \frac{C_{u(j)}}{x - x_{u(j)}} + \sum_{k=1, (k \neq u(j))}^{n-1} \frac{\frac{1}{k} C_k}{x - x_k} + \sum_{k \geq n} \frac{\frac{1}{k} C_k}{x - x_k} \quad (14)$$

donde n es un número natural fijo mayor que N_0 . La tercera suma en (14) es menor que ε para todo $x \in (a, b) - A$ y la segunda suma es acotada cuando x se acerca a $x_{u(j)}$. Así:

$$b(x) \rightarrow \pm \infty \quad \text{cuando } x \rightarrow x_{u(j)}, \quad x \in (a, b) - A. \quad (15)$$

Como $m(A) = 0$ se tiene que $(a, b) - A$ es denso en (a, b) , luego existen puntos de $(a, b) - A$ en cualquier vecindad de $x_{u(j)}$. Por (13) y (15) se

tiene que b no es acotada en ninguna vecindad de $x_0 \in (a, b) - A$ y esto es imposible puesto que b es continua en $x_0 \in (a, b) - A$.

En la misma forma, f_n no es acotada en ningún intervalo. ■

(ii) f y f_n son discontinuas en cualquier punto de $[0, 1] - A$.

Demostración. Si f fuera continua en algún punto $x \in [0, 1] - A$, entonces f sería acotada en alguna vecindad de x (absurdo por (i)).

(iii) Se tiene que :

$$\left(\frac{C_k}{x - x_k} \right)' = - \frac{C_k}{(x - x_k)^2} ,$$

sin embargo, f_1 no es la derivada de f ya que f no es derivable en ningún punto. La función f no es la integral de f_1 ya que f_1 no es integrable en ningún intervalo. ■

(iv) Si extendemos f y f_n al plano complejo :

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{z - x_k} \\ f_n(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n n! \frac{C_k}{(z - x_k)^{n+1}} \end{aligned} \right\} \quad (z \text{ complejo}) \quad (16)$$

entonces f y f_n son analíticas en el complemento del intervalo real $[0, 1]$ (ver Fig. 6).

Demostración. Sea $z_0 \notin [0, 1]$ y sea δ la distancia del punto z_0 al intervalo real $[0, 1]$ (ver Fig. 6), entonces $\delta > 0$. Consideremos la vecin-

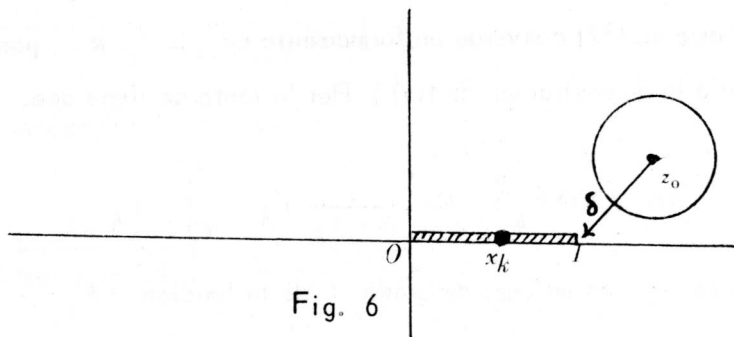


Fig. 6

dad $N(z_0, \frac{1}{2}\delta)$; entonces se tiene que

$$|z - x_k| \geq \frac{1}{2}\delta \quad \text{para todo} \quad z \in N(z_0, \frac{1}{2}\delta).$$

Luego :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{C_k}{x - x_k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\frac{1}{2}\delta} = \frac{2}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} C_k < +\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{C_k}{(z - x_k)^{n+1}} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(\frac{1}{2}\delta)^{n+1}} = \left(\frac{2}{\delta}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} C_k < +\infty.$$

Por el criterio M de Weierstrass, las series en (16) convergen uniformemente en $N(z_0, \frac{1}{2}\delta)$, luego f y f_n son analíticas en z_0 .

(v) f y f_n son analíticas en ∞ . Más precisamente, ∞ es un cero de grado 1 de la función f , un cero de grado $n+1$ de la función f_n respectivamente.

Demostración. Tenemos que

$$z f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{z - x_k} C_k . \quad (17)$$

La serie en (17) converge uniformemente en $|z| \geq R$, para $R > 1$ (similar a la demostración de (iv)). Por lo tanto se tiene que :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z - x_k} C_k = \sum_{k=1}^{\infty} C_k , \quad (18)$$

esto es : ∞ es un cero de grado 1 de la función f .

De la misma forma se muestra que ∞ es un cero de grado $n+1$ de la función f_n .

(vi) En el complemento del intervalo real $[0,1]$ se tiene :

$$f_1(z) = f'(z) , \quad f_n(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z) = f^{(n)}(z) . \quad (19)$$

Demostración. Utilizando un método similar al usado en (iv) se puede demostrar que las series en (16) convergen uniformemente en cualquier conjunto compacto contenido en el complemento del intervalo real $[0,1]$; por lo tanto se puede derivar término a término las series en (16), o sea que se tienen las igualdades (19).

(viii) Sea $x \notin A$ entonces :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(x + i\varepsilon) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{x - x_k} , \quad (20)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f^{(n)}(x + i\varepsilon) = f_n(x) = (-1)^n n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^{n+1}} \quad (21)$$

Demostración. Tenemos que

$$\frac{1}{(x + i\varepsilon) - x_k} = \frac{(x - x_k) - i\varepsilon}{(x - x_k)^2 + \varepsilon^2}$$

Si $x \notin A$ entonces :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{-i\varepsilon C_k}{(x - x_k)^2 + \varepsilon^2} \right| &= \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^2 + \varepsilon^2} \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^2} = \varepsilon f_1(x) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x - x_k) C_k}{(x - x_k)^2 + \varepsilon^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{x - x_k} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\varepsilon^2}{(x - x_k) \{ (x - x_k)^2 + \varepsilon^2 \}} C_k \right| \\ &\leq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k| \{ (x - x_k)^2 + \varepsilon^2 \}} = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|^3} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (23)$$

puesto que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|^3} \text{ converge si } x \notin A.$$

De (22) y (23) se obtiene :

$$f(x + i\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x + i\varepsilon) - x_k} \xrightarrow{(\varepsilon \rightarrow 0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{x - x_k} \quad \text{si } x \notin A.$$

Dejamos al lector la demostración de (21) . ■

(viii) Si $x \notin A$ entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} [f(x + i\varepsilon) + f(x - i\varepsilon)] = f(x). \quad (24)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i\varepsilon} [f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)] = f_1(x). \quad (25)$$

Demostración. De (23) se obtiene inmediatamente (24).

Tenemos que :

$$\frac{1}{2i\varepsilon} [f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)] = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^2 + \varepsilon^2}.$$

Pero

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^2 + \varepsilon^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^2} \right| = \\ & = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\varepsilon^2 C_k}{(x - x_k)^2 \{ (x - x_k)^2 + \varepsilon^2 \}} \right| \\ & \leq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^4} = \varepsilon^2 f_3(x) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \end{aligned}$$

y por lo tanto se tiene (25). ■

§ 6. Una función derivable en casi toda parte con derivada no integrable.

Sea $\{C_n\}$ una sucesión de términos positivos tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{C_k} < +\infty. \quad (1)$$

Dado un conjunto $\{D = x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ contable y denso en $[0, 1]$, sea

$$g_k(x) = (x - x_k) \operatorname{sen} \frac{1}{x - x_k} \quad \text{si} \quad x \neq x_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

entonces g_k es continua para todo $x \notin D$. Definamos una función f por:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k g_k(x) \quad (3)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} C_k (x - x_k) \operatorname{sen} \frac{1}{x - x_k} \quad (4)$$

Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k g_k(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} C_k |g_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} C_k < +\infty,$$

y por el criterio M de Weierstrass se tiene que la serie (3) converge uniformemente en $[0, 1] - D$. Por lo tanto la función f es continua en $[0, 1] - D$.

$$\text{Si} \quad A = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N\left(x_k, \frac{1}{j} \sqrt{C_k}\right) \right\} \quad (5)$$

entonces:

$$m(A) = 0, \quad D \subset A,$$

y la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|} \quad (6)$$

converge en $[0, 1] - A$. Para $x, a \notin A$, $x \neq a$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{g_k(c) - g_k(a)}{x - a} &= \frac{1}{x - a} \left| (x - x_k) \operatorname{sen} \frac{1}{x - x_k} - (a - x_k) \operatorname{sen} \frac{1}{a - x_k} \right| \\ &= \frac{1}{x - a} \left[(x - x_k) \operatorname{sen} \frac{1}{x - x_k} - (x - x_k) \operatorname{sen} \frac{1}{a - x_k} + (x - x_k) \operatorname{sen} \frac{1}{a - x_k} \right. \\ &\quad \left. - (a - x_k) \operatorname{sen} \frac{1}{a - x_k} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x-x_k}{x-a} \left[\operatorname{sen} \frac{l}{x-x_k} - \operatorname{sen} \frac{l}{a-x_k} \right] + \operatorname{sen} \frac{l}{a-x_k} \\
&= \frac{x-x_k}{x-a} \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left\{ \frac{l}{x-x_k} - \frac{l}{a-x_k} \right\} \cdot \cos \frac{1}{2} \left\{ \frac{l}{x-x_k} + \frac{l}{a-x_k} \right\} + \operatorname{sen} \frac{l}{a-x_k} \\
&= -2 \frac{x-x_k}{x-a} \operatorname{sen} \frac{x-a}{2(x-x_k)(a-x_k)} \cdot \cos \frac{1}{2} \left\{ \frac{l}{x-x_k} + \frac{l}{a-x_k} \right\} + \operatorname{sen} \frac{l}{a-x_k} \quad (7)
\end{aligned}$$

Sea

$$\left. \begin{aligned}
h_k(x) &= \frac{g_k(x) - g_k(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\
h_k(a) &= g'_k(a) = -\frac{l}{a-x_k} \cdot \cos \frac{l}{a-x_k} + \operatorname{sen} \frac{l}{a-x_k}
\end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Entonces h_k es continua para todo $x \neq A$. De (7) y (8):

$$|h_k(x)| = 2 \frac{|x-x_k|}{|x-a|} \frac{|x-a|}{2|x-x_k||a-x_k|} + \left| \operatorname{sen} \frac{l}{a-x_k} \right| = \frac{l}{|a-x_k|} \quad 1$$

Como $a \neq A$, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \left\{ \frac{l}{|a-x_k|} + 1 \right\}$$

converge y por el criterio M de Weierstrass se ve que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot h_k(x) \quad (9)$$

converge uniformemente en $[0,1] - A$. Por lo tanto se tiene que:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq A}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k h_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot h_k(a)$$

o sea :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{g_k(x) - g_k(a)}{x - a} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot g'_k(a).$$

Esto es, la función f es derivable en $[0, 1] - A$ y, para $x \in [0, 1] - A$ se obtiene :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \operatorname{sen} \frac{1}{x - x_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{x - x_k} \cdot \cos \frac{1}{x - x_k}. \quad (10)$$

La primera suma en (10) representa una función continua en $[0, 1] - A$ mientras que la segunda suma es discontinua para cualquier $x \in [0, 1] - A$ (por demostración similar a la de (i) y (ii) del § 5); por lo tanto f' es discontinua para todo $x \in [0, 1] - A$. Así que la función f definida por (4) es derivable en casi toda parte, y f' no es integrable-Riemann en ningún intervalo.

Apéndice

Se tiene la siguiente relación entre los dos conjuntos A_1 y A_2 ((2) y (3) del § 1):

$$A_1 \subset A_2 \cup D. \quad (1)$$

Demostración : Sea $x \notin A_2 \cup D$; entonces existe n tal que

$$x \notin \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k),$$

o sea :

$$|x - x_k| \geq \alpha_k \quad \text{para todo } k \geq n. \quad (2)$$

Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$j \geq \text{máximo} \left\{ \frac{\alpha_1}{|x-x_1|}, \frac{\alpha_2}{|x-x_2|}, \dots, \frac{\alpha_{n-1}}{|x-x_{n-1}|} \right\}.$$

Entonces

$$|x-x_k| \geq \frac{\alpha_k}{j} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (3)$$

De (2) y (3) tenemos que :

$$|x-x_k| \geq \frac{\alpha_k}{j} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

esto es :

$$x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \frac{1}{j} \alpha_k).$$

Luego :

$$x \notin A_1.$$

Por lo tanto se tiene la inclusión (1) . ■

Nota 1 : No siempre se cumple la relación : $A_1 \subset A_2$.

En [2] se da un ejemplo (Ejemplo 16) en el cual

$$A_2 \cap D = \phi.$$

Como $D \subset A_1$ se tiene, para este ejemplo, que $A_1 \not\subset A_2$.

Nota 2 : Hay casos en los cuales $A_1 = A_2 \cup D$.

Para el caso del Corolario 1, Lema 4 del § 3 se tiene que $A_1 = [0, 1]$

(tomando $a=0$, $b=1$) , luego :

$$A_1 = A_2 \cup D = [0, 1].$$

Nota 3 : Hay casos en los cuales $A_1 \neq A_2 \cup D$.

Ejemplo : Sea $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un ordenamiento del conjunto D y x un punto de $[0,1]$, $x \in D$. Como D es denso en $[0,1]$ existe una sucesión de puntos de D que tiende a x , digamos :

$$\{x_{t(j)}\} \rightarrow x.$$

Sea $\{s(j) \mid j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} - \{t(j) \mid j \in \mathbb{N}\}$; determinamos la sucesión $\{\alpha_n\}$ como sigue :

$$\frac{1}{2} \alpha_{t(j)} = |x_{t(j)} - x|, \quad \alpha_{s(j)} < |x_{s(j)} - x|.$$

Como $x \in N(x_{t(j)}, \alpha_{t(j)}) \quad j = 1, 2, 3, \dots$

entonces

$$x \in A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \right\}.$$

Por la definición de la sucesión $\{\alpha_n\}$ se tiene que

$$|x - x_k| \geq \frac{1}{2} \alpha_k \quad \text{para todo } k.$$

o sea que

$$x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \frac{1}{2} \alpha_k),$$

luego :

$$x \notin A_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \frac{1}{j} \alpha_k) \right\}.$$

Referencias

1. Takeuchi, Y. "Una serie relacionada con el conjunto de números racionales", Revista de Matemáticas Elementales, Vol. 7 Fasc. 2 (1965) pp. 46-48.

2. Takeuchi Y. "Reordenación de números racionales", Boletín de Matemáticas, Vol. VI No. 5, pp. 1-20.
3. Apostol T M. *Mathematical Analysis*, Addison Wesley, Reading, 1957
4. Rudin W. *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, New York, 1966.
5. Takeuchi Y., *Sucesiones y Series*, Tomo I, Universidad Nal. de Colombia, 1971.
6. Takeuchi Y. *Análisis Matemático*, Universidad Nacional de Colombia, 1974.

* * *

