

ALGUNOS ASPECTOS DE LA ECONOMÍA ESTOCASTICA *

GERHARD TINTNER

Esta es una discusión metodológica de problemas económicos, cuyo análisis necesita de consideraciones estocásticas. Los ejemplos son tomados de diferentes investigaciones del autor y sus colaboradores con respecto a la aplicación de los procesos estocásticos en la teoría del crecimiento económico, programación estocástica y teoría del control estocástico aplicadas respectivamente a la planeación y a la economía política.

1. Antecedentes Metodológicos

La historia de la economía (65) muestra que esta ciencia social (la cual quizá ha logrado una cierta madurez) ha sido profundamente influenciada por el desarrollo contemporáneo de las ciencias naturales, especialmente de la física (73,27). Ya el sistema de los fisiócratas (13) muestra la potente influencia de las ciencias naturales contemporáneas. Los economistas de la escuela clásica (Adam, Smith, Malthus, Ricardo, Marx, Say) fueron muy influenciados por la física Newtoniana. La economía neoclásica (53) no puede ser entendida sin tener en cuenta la influencia de la física determinística del siglo XIX. Esto se cumple aún para la econo-

* Tengo que agradecer a mi colega J.B. Nugent por sus comentarios y críticas. N. del A.
Traducción de Guillermo L. Gómez M., Technische Hochschule, Vienna. N. del E.

mía contemporánea. En realidad, el único modelo económico que no es una más o menos acertada imitación de la física clásica determinística es la teoría de juegos (89). Desafortunadamente, aunque la influencia de la teoría de juegos ha sido bastante profunda en algunos campos importantes de la economía, ella no ha cumplido su promesa de explicar con éxito los problemas para los cuales fue diseñada: Organización de mercados, que (en un cierto sentido) están colocados entre la competencia libre y el monopolio puro, tales como oligopolio, oligópsono, monopolio bilateral, etc. En economía, la competencia libre está caracterizada por un gran número de vendedores y compradores en el mercado. En el monopolio tenemos un único vendedor y muchos compradores. Oligopolio existe, si el número de vendedores es pequeño pero el número de compradores grande. El Oligópsono está caracterizado por los muchos vendedores pero pocos compradores. En un monopolio bilateral tenemos solo un comprador y un vendedor.

La nota anterior no debe ser interpretada como una crítica a los notables alcances de la teoría de juegos en otros campos distintos para la que fue originalmente diseñada. La introducción de una utilidad (beneficio, disfrute) medible ha revolucionado este campo y producido muchos resultados importantes para el problema de selección bajo incertidumbre (52, 14). Métodos relacionados con la teoría de juegos han sido usados (en cierto modo paradójicamente) para establecer la existencia de soluciones de sistemas económicos competitivos estáticos (23, 60). También, la teoría de juegos ha sido usada para establecer la existencia de soluciones significativas del famoso sistema dinámico de Von Neumann (87) y sus extensiones (45). Finalmente, las más recientes investigaciones de Aumann (5) (ver también 40) usan los métodos teóricos de los juegos y han establecido por primera vez condiciones válidas para la existencia teórica del equilibrio en mercados competi-

vos. El hecho de que esta condición implique una infinidad de participantes (comerciantes) y, por otra parte, una infinidad de la potencia del continuo, resalta la gran idealización necesaria para la teoría. Así, esto nos deja, para propósitos prácticos, con los modelos neoclásicos (53).

Modelos de equilibrio general (47) son evidentemente todavía imitaciones de los sistemas físicos clásicos determinísticos (60). Están esencialmente restringidos a factores dinámicos estáticos, los que han sido introducidos muy frecuentemente ad hoc, especialmente en los modelos econométricos empíricos. Pero, aún dentro de la economía estática (sin tiempo, 39), son deficientes puesto que están restringidos a la competencia libre.

Los modelos de desarrollo económico, los que han sido bastante populares recientemente (34, 12), son por lo menos dinámicos pero aún determinísticos. El famoso modelo dinámico de Von Neumann (88) se ha basado también en la idea de competencia libre. Otros Modelos dinámicos (52, 60) dejan de incluir factores estocásticos. En el muy interesante libro del economista-matemático japonés H. Nikaido (60, 2 ff) encontramos el siguiente comentario: "Existe, sin embargo, un dualismo metodológico en el estudio matemático de los fenómenos económicos. En un extremo personas llamadas *economistas matemáticos* realizan análisis matemático, pero no particularmente numérico, de sistemas determinísticos y no-estocásticos, mientras que en el otro extremo, economistas con inclinación estadística llamados *econometristas* están principalmente interesados en la aplicación de los métodos estadísticos modernos en la estimación de parámetros importantes para las relaciones económicas. A juicio de la mayoría de los economistas matemáticos, el mecanismo intrínseco interno de los sistemas económicos es de naturaleza determinística, aunque los factores estocásticos no están completamente

ausentes. Argumentan que un claro conocimiento de los mecanismos internos puede ser mejor obtenido analizando los efectos de varios factores interdependientes de importancia económica por medio de un razonamiento matemático sin preocuparse de factores estocásticos no esenciales. De este modo, ellos están primordialmente interesados en modelos que no se presentan necesariamente en una forma favorable para exámenes estadísticos. Esto es principalmente con el propósito de obtener una penetración cognoscitiva en el trabajo de un sistema económico. Ellos dejan el examen estadístico de las teorías a los econométricos, quienes apoyados en datos empíricos intentan adaptar estadísticamente ecuaciones numéricas a la realidad económica. Mientras tanto los econométricos están comprometidos tanto con la limitada disponibilidad de los datos estadísticos como con la aplicabilidad de los métodos estadísticos de estimación empleando ecuaciones de un tipo cualitativo más simple, ecuaciones de más completa implicación económica están más restringidas en la teoría económico-matemática”.

Esta división del trabajo propugnada por Nikaido puede ser verdaderamente fructífera si los modelos desarrollados por los economistas matemáticos, los que son ciertamente muy interesantes, no tienen la deficiencia anotada en el párrafo anterior. No es nuestra intención criticar los modelos económicos determinísticos, justamente porque ellos son imitación (en cierto modo débil) de la física clásica determinística. Es quizá inevitable que la ciencia más lucida influencie todas las otras ciencias y esta fue indudablemente la física en el Siglo XIX. También podemos señalar con orgullo el hecho de que en una memorable circunstancia la economía clásica ha influenciado el desarrollo de la biología. Es bien conocido que Darwin derivó su famosa teoría de la evolución bajo la fuerte impresión de la teoría Malthusiana de la población. Por lo tanto, la influencia no ha sido siempre

unilateral (ver también 55)). Si contemplamos la física contemporánea más que la física del siglo XIX, observamos un gran cambio. Es suficientemente cierto que la teoría de la relatividad es determinística y constituye quizá al mismo tiempo el poderoso clímax y el canto del cisne de la física clásica. Pero desde el surgimiento de la teoría cuántica, la física moderna volvió a ser estocástica, es decir, usa los resultados de la teoría de la probabilidad. Esto no hace inútiles los resultados de la física clásica. La ley de los grandes números nos asegura que si el número de partículas es grande (y para macrosistemas es enorme), las desviaciones de los valores medios (esperanza matemática) serán pequeños. Esto explica el continuo éxito de los métodos de la física clásica, por ejemplo, en la ingeniería.

Similarmente podemos argumentar que la economía determinística debe ser considerada como trabajando con los valores medios (esperanza matemática) de las variables aleatorias, que realmente caracterizan el sistema empírico económico. Esto explica quizá el gran interés de la economía clásica y neoclásica en la teoría de la libre competencia. Cournot demostró ya en 1838 que (bajo ciertas condiciones) la competencia libre prevalece, si el número de los competidores llega a ser infinito. Posteriores investigaciones parecen indicar que la infinidad implicada es ciertamente la de la potencia del continuo (5,40). En tales casos justificamos la concentración en los valores medios.

Pero ¿es realista esta suposición? Nosotros creemos que tienen una gran importancia en las críticas de Galbraight (29). Este enfatizó la importancia empírica de la estructura de los mercados no competitivos. Los resultados de la economía moderna concernientes a la estructura de mercados, que de alguna manera están situados entre la libre competencia y el monopolio puro, no son muy grandio-

tos. El brillante comienzo del análisis en 1930 (18, 63, 94) no ha sido continuado. La teoría de juegos, que es quizá el primer modelo económico no derivado de la física, fue particularmente diseñado para cubrir estos problemas. A pesar de valerosos esfuerzos (69), los resultados concenientes a oligopolios, oligópsonos, monopolio bilateral y otras organizaciones mercantiles que caracterizan una gran parte de la economía de los Estados Unidos, Europa occidental, Japón y otros países capitalistas desarrollados, han sido muy desilusionantes. Aún en casos en los que la teoría de los juegos ha sido aplicada con algún éxito (37), los resultados no parecen ir más lejos de los logros de 1930 (94).

2. Modelos Económicos Estocásticos.

Nos proponemos seguir el ejemplo de la física moderna y considerar los fenómenos económicos franca y fundamentalmente desde el punto de vista estocástico, es decir, tratar las variables económicas como variables aleatorias (79). Más específicamente, trataremos de usar los procesos estocásticos en este campo. Esto puede, entre otras cosas, encontrar las críticas de Hayek (38), de que con fenómenos económicos no se puede suponer que estamos muestreando con una distribución de probabilidad estática, la que está fija para todos los tiempos. Los modelos econométricos por lo tanto asumen típicamente un muestreo de una distribución de probabilidad fija (73). En lugar de esta, nosotros hacemos la suposición de que estamos trabajando con familias de distribuciones de probabilidad, que cambian su forma en el tiempo. Esto puede ser llevado a cabo usando la teoría de los procesos estocásticos (16,28).

Podemos argumentar que los procesos estocásticos son usados en la economía sobre una base experimental ; que nosotros podemos imitar los físicos; o que

un rezago cultural de 50 años es ya bastante suficiente. Veremos que hay razones más fuertes para propugnar por el uso de los procesos estocásticos en el análisis de los fenómenos económicos (85).

Sin embargo, esto no es de alguna manera un asunto fácil. Las series de tiempos económicos contienen tendencias típicas y ciclos irregulares. Si confinamos el uso de los procesos estocásticos a los procesos estocásticos estacionarios (35, 36), partiríamos de una suposición muy irrealista. Procesos estacionarios son aquellos cuyo carácter no cambia ante traslaciones en el tiempo. Más aún, nos concretaremos exclusivamente al análisis de fenómenos económicos que están relacionados con el desarrollo económico. Estos fenómenos estaban ya en primer plano en los intereses de la escuela clásica de economía (es decir: Ricardo, Malthus, Marx, (8)) y recientemente la economía, por obvias razones prácticas y teóricas, ha prestado mucha atención a estos fenómenos. Para un ensayo de introducir los factores estocásticos en la teoría económica evolutiva ver Haavelmo (33).

Hasta ahora no ha sido desarrollada muy bien la teoría de los procesos estocásticos o la teoría de series de tiempos evolutivos. En particular, carecemos frecuentemente de métodos estadísticos que nos capaciten para trabajar con este tipo de fenómenos (22, 74). No desconocemos las grandes dificultades y laboriosidad matemáticas y estadísticas que surgirían de un acercamiento exigente a estos problemas.

Existen quizá otras dificultades de naturaleza principal en nuestro camino. Las variables económicas (cantidades producidas, precios) no pueden llegar a ser negativas y los modernos métodos de la programación matemática (9, 21, 43, 90) tienen esto en cuenta. Por lo tanto, en los métodos convencionales que usan la dis-

tribución normal de probabilidad o sus generalizaciones, los procesos clásicos de difusión deben ser usados con especial cautela. Nosotros proponemos en lugar de ésta la distribución lognormal (12). Para algunas aplicaciones empíricas ver (19, 20, 31, 82, 83), por otra parte, existe la posibilidad de que la distribución de Pareto o distribuciones similares puedan ser más apropiadas (51, 70, 71). Esto crearía un número de dificultades matemáticas ya que estas distribuciones tienen unas colas muy anchas y en general una varianza infinita (26).

Una distribución lognormal es una distribución donde el logaritmo de las variables sigue la bien conocida distribución lejos de ser simétrica. Por lo tanto, ella parece conducir a una buena representación de, por ejemplo, la distribución del ingreso. Sea $y = \log x$, normalmente distribuida. Sea M la esperanza matemática de y y sea σ^2 su varianza. Sin embargo, tenemos que

$$(1) \quad E x = e^{M + 1/2 \sigma^2}$$

es la esperanza matemática de x y su varianza es

$$(2) \quad V = e^{2M} \cdot \sigma^2 (e^{\sigma^2} - 1)$$

Ejemplo 1. Un proceso generalizado de Poisson (proceso puro de nacimientos) asume que una variable aleatoria x puede sólo asumir los valores $x = a, a + u, a + 2u, \dots$ donde a y u son constantes positivas. En un pequeño intervalo de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$, las probabilidades de transición son aproximadamente: $b(\Delta t)$ para un aumento de $x, x + u$, y $1 - b(\Delta t)$ para un aumento nulo. Todas las demás probabilidades de transición son despreciables; b es una constante positiva. Supongamos que x toma el valor a con probabilidad 1 en el tiempo $t = 0$. Entonces la probabilidad de un valor de la variable aleatoria x en el tiempo t es

$$(3) \quad P_x(t) = e^{-bt} (bt)^{(x-a)/u} / [(x-a)/u] !$$

$$x = a, a+u, a+2u, \dots$$

El valor medio de la variable aleatoria x está dado por :

$$(4) \quad Ex = a + ubt,$$

una función lineal del tiempo. La varianza es :

$$(5) \quad V = u^2 bt,$$

también función lineal del tiempo.

Un proceso de Poisson (proceso puro de nacimientos) ha sido adaptado al producto nacional de la India con los datos entre 1948 y 1962 (58). El valor medio de la variable de Poisson resultó ser $Ex = 78,0385 + 4,270(t-1947)$. La varianza del Proceso es una función lineal del tiempo : $V = 5,230(t-1947)$.

Las probabilidades de transición las hemos hecho funciones lineales de los gastos del gobierno de la India. De esta manera podemos hacer predicciones acerca del producto nacional en la India asumiendo varias políticas de los gastos del gobierno allí. Ver también (85).

Ejemplo 2. Con un proceso de difusión lognormal nosotros suponemos que el logaritmo de una cierta variable sigue un proceso de difusión clásico. La densidad de probabilidad de que nuestra variable asuma el valor y en el tiempo t dado que en el tiempo s ($s < t$) tomó el valor x está dado por :

$$(6) \quad f(s, x; y, t) = \frac{\exp \left[- \frac{\log y - \log x - b(t-s)}{2c(t-s)} \right]^2}{y [2\pi c(t-s)]^{1/2}}$$

donde b y c son constantes.

Adaptando un proceso de difusión lognormal con la ayuda del método de máxima verosimilitud a los datos del ingreso nacional en la India, 1948-61 (82), tomamos también en cuenta la influencia de los gastos del gobierno. El valor medio del logaritmo del ingreso nacional real de la India resulta ser así

$$0.01118 (z - 1947) + 0.001623 \sum_{i=1948}^t G_i$$

donde G_i son los gastos del gobierno en el año i -ésimo. La varianza del logaritmo estimado del ingreso nacional de la India es $0.00549 (t - 1947)$. Estos resultados nos capacitan para estimar el ingreso nacional real futuro de la India, haciendo hipótesis de los gastos futuros para el período 1965-1971.

Ejemplo 3. Un proceso de difusión lognormal ha sido adaptado a los datos de la India (83). Usando los datos en 1951-64 obtenemos los siguientes resultados :

El valor medio del logaritmo de la producción real agrícola por cabeza en la India es una función lineal del tiempo y la suma de los gastos reales por cabeza del gobierno en la agricultura en la India tienen un rezago de tres años. La varianza del logaritmo de la producción agrícola real por cabeza en la India resulta una función lineal del tiempo. Con la ayuda de nuestras estimaciones, podemos predecir la producción agrícola real por cabeza en la India bajo varias hipótesis acerca de los gastos reales por cabeza del gobierno en la agricultura

Ejemplo 4. Un proceso de difusión lognormal ha sido adaptado a los datos de Chile 1940-1964 (78). El ingreso nacional real en Chile aparece entonces como distribuido lognormalmente, es decir, su logaritmo sigue una distribución normal.

El logaritmo del ingreso nacional real es una variable normal con media 0.03648 ($t-1939$) y varianza 0.00170965 ($t-1939$). Podemos observar que la media y la varianza del logaritmo del ingreso nacional son funciones lineales del tiempo

Ejemplo 5. Una ecuación estocástica de diferencias dada por

$$(7) \quad x_{t+1} = a^{(k)} x_t + \mu_t$$

donde x_t es una variable aleatoria, $a^{(k)}$ una constante y μ_t una variable aleatoria que se supone tiene media cero, varianza constante y una autocorrelación despreciable. Sin embargo, la relación (7) se cumple sólo para :

$$(8) \quad C_k = x_{t-1} = C_{k+1}$$

donde C_k y C_{k+1} son constantes.

Una ecuación estocástica simple de diferencias ha sido adaptada a los datos británicos de la producción industrial total excluyendo la construcción 1.700 - 1939 (86,66). Usando la idea del grado de desarrollo económico (64) concluimos, basados en la teoría de Quandt (62) : si distinguimos dos grados, la transición ocurre en el año 1834 ; si asumimos tres grados, tenemos 1791 y 1869 como los años de transición ; para cuatro grados los puntos de ascenso son 1777, 1821 y 1869 .

¿ Porqué se introducen ideas estocásticas, es decir, métodos relacionados con la probabilidad, de manera fundamental en el razonamiento económico ? Un número de razones para esta proposición ha sido dado anteriormente : La costumbre de vivir como los vecinos, en nuestro caso, los físico-matemáticos . La físi

ca, simplemente la más fructífera de las ciencias naturales (30), ha llegado a ser en nuestro tiempo casi completamente estocástica, es decir, basada sobre la idea de las distribuciones de probabilidad. Pero, similarmente, en la biología las ideas probabilísticas han sido bastante importantes, especialmente en genética, quizá el más exitoso ramo de la biología (55). La proposición de introducir métodos estocásticos en la economía puede ser enfatizada contemplando los desarrollos de la investigación operacional (89). Investigación operacional no es, en nuestra opinión, otra cosa que la econometría de la empresa, tanto de la privada como de la pública (77). En realidad, algunas de las más importantes contribuciones en la investigación operacional han surgido de la industria francesa nacionalizada (54, 49). Las contribuciones rusas son también muy importantes.

El libro de Barucha-Reid es notable pues da un amplio informe de la aplicación de los procesos de Markov en muchos campos. La economía aquí brilla por su ausencia. Pero se dan a conocer allí muchas aplicaciones de los procesos estocásticos a la biología, física, astronomía, astro-física y química. El informe de la aplicación de los procesos estocásticos en la investigación operacional trata con la teoría de las colas. Aquí Barucha-Reid considera la circulación telefónica y el mantenimiento de máquinas. Métodos similares tienen, por su puesto, gran importancia en la teoría de inventarios (3). Métodos estocásticos han sido también utilizados por Hoit, Modigliani, Muth, Simon (41) para planeación económica en la empresa privada. Versan estos sobre la producción, los inventarios y la fuerza de trabajo. Para nuevos intentos de utilizar los modelos estocásticos en las ciencias de administración ver : (3,20,49,54,68,85, 90,91).

Métodos poderosos de la teoría moderna de la información relativos a la teoría de los procesos estocásticos, han sido usados en el análisis de los problemas

económicos en (72) .

En un reciente estudio (76) el autor ha intentado señalar la posibilidad de usar los modernos métodos de la teoría matemática del control en nuestro campo. Ver también (1, 4, 10, 11, 15, 42, 44, 48, 67, 85, 92, 93) .

Ejemplo 6. Usando los datos de la India del período 1951-1964 (76) establecemos un modelo estocástico para el desarrollo agrícola de la India (producción agrícola real por cabeza). Utilizando los gastos reales del gobierno, por cabeza, en la agricultura en la India, podemos establecer la política óptima en el siguiente sentido : la que minimiza los gastos del gobierno y al mismo tiempo maximiza la producción real agrícola por cabeza en la India en un año dado. Los elementos probabilísticos están incluidos en la programación estocástica (24, 84). Un interesante libro reciente (14) muestra la importancia de las consideraciones estocásticas en la teoría de la empresa de una manera más fundamental. Este libro trata de las decisiones económicas bajo incertidumbre, de selección de carteras, equilibrio mercantil bajo incertidumbre, supervivencia y objetivos de la firma y muchos otros temas interesantes y significativos.

Ejemplo 7. En la programación lineal (9,21,43,90) maximizamos la función

$$(9) \quad z = c'x$$

donde z es la función objetivo, c un vector columna con n componentes, x un vector de actividades de n elementos. El signo $'$ denota la transposición.

Las condiciones son :

$$(10) \quad Ax \leq b$$

donde A es una matriz constante con m filas y n columnas y b es un vector columna de disponibilidades, con m elementos. Además :

$$(11) \quad x \geq 0 .$$

Suponemos ahora que existe una distribución de probabilidad conjunta de los elementos de los vectores b y c y la matriz A :

$$(12) \quad P(A, b, c)$$

Esta distribución de probabilidad conjunta se supone conocida. En el enfoque pasivo de la programación lineal derivamos esta distribución de probabilidad de la función objetivo .

$$(13) \quad Q(z)$$

Esto puede ser hecho mediante una aproximación numérica. Este método es útil si deseamos comparar dos (o más) programas lineales, es decir, las ganancias de dos firmas diferentes o planes en países diferentes.

En el enfoque activo de la programación lineal estocástica se procede como sigue :

Consideremos la distribución de los recursos tipificada por las filas de la matriz A .

$$\text{Sea } u_{ij} \geq 0 ; \sum_{j=1}^n u_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n .$$

Denotamos ahora con X una matriz diagonal con los elementos del vector x (actividades) en la diagonal ; sea B una matriz diagonal con los elementos del vector b (disponibilidades) en la diagonal. Además sea U la matriz de las asignaciones u_{ij} . Las condiciones son :

$$AX \leq BU$$

$$X \geq 0$$

Es entonces posible encontrar numéricamente la distribución de probabilidad para la función objetivo z :

$$R(z ; U)$$

la cual depende de las asignaciones u_{ij} que actúan como variables de control .

Consideremos la generalización estocástica del modelo de planeación de dos sectores de Mahalanobis (50) para un plan quinquenal en la India. Asumimos además que los coeficientes marginales producto-inversiones para las industrias de consumo e inversiones son variables aleatorias con una distribución beta determinada empíricamente (84) .

Tomando una variable de decisión L_i , como la proporción de nuevas inversiones dedicadas a la industria de inversiones (el resto va a la industria de consumo), derivamos las siguientes características para la distribución del ingreso nacional en el último año del plan quinquenal en este modelo dinámico (Tabla 1)

T a b l a 1

	L_i		
	1/3	1/2	2/3
<i>Esperanza matemática</i>	180.10	174.20	166.46
<i>Punto para menos del 5%</i>	138.94	142.10	143.89
<i>Moda</i>	160.83	157.31	159.89

Vemos que la presente política del gobierno de la India ($L_i = 1/3$) es preferible

desde el punto de vista de la esperanza matemática y la moda. Pero si el criterio es el óptimo, ¿qué puede ser realizarse con el 95%, $L_j = 2/3$?

Las consideraciones probabilísticas no son por lo tanto extrañas a la economía moderna. Si consideramos el tamaño de la distribución (71) nos damos cuenta de que estos problemas son muy viejos y pueden relacionarse con la famosa distribución de Pareto del ingreso y con la voluminosa literatura concerniente a estos problemas. Desafortunadamente estas ideas nunca han sido bien integradas al cuerpo principal de la teoría económica.

La aplicación de los procesos estocásticos en la economía encara aún grandes dificultades. Es dudoso, si la teoría de los procesos evolucionarios está bien desarrollada para aplicar estos métodos al problema del desarrollo económico. Los métodos estadísticos aplicables al tipo de procesos que nosotros consideramos virtualmente no existen en el caso de muestras pequeñas y aún los métodos para muestras grandes (los cuales no parecen ser particularmente aplicables en la economía, donde tenemos frecuentemente pocas observaciones) son relativamente escasos y casi enteramente limitados a los procesos estacionarios (32, 35, 34). En el lenguaje económico, estos pueden ser aplicables a las fluctuaciones de temporada y quizá al ciclo de los negocios pero nos brindan muy poca ayuda para tratar los problemas de la tendencia (del desarrollo económico). Exigirá mucho, un trabajo arduo e ingeniosidad matemática, desarrollar más adecuados métodos estadísticos para el análisis de series de tiempos (15, 74, 85). Existe además un desafío fundamental que ha sido puesto en camino forzosamente por Mandelbrot (51) quien sugirió, con base en algunas evidencias empíricas relacionadas con los precios de las mercancías, que la distribución implicada puede pertenecer a una familia de distribuciones divisibles estables (Feller (26), 531) cuyo

varianza no existe (es infinita). Si éste es el caso, estamos trabajando típicamente con distribuciones cuya varianza es infinita. Este es verdaderamente el caso de la famosa distribución de Pareto, que ha sido ampliamente usada para aproximar la distribución del ingreso, por lo menos para ingresos relativamente altos.

Si Mandelbrot tiene razón, esto crearía verdaderamente una situación muy difícil en la economía estadística. Notemos que la mayoría de las aplicaciones biológicas y físicas utilizan la distribución normal y la mayoría de las aplicaciones en la investigación operacional la distribución de Poisson σ ó alguna de sus variantes. Todas estas distribuciones y también la distribución lognormal tienen por supuesto varianza finita. Por lo tanto, los mínimos cuadrados y los métodos relativos tienen algunas propiedades deseables. Los problemas estadísticos relacionados con la distribución de Pareto y otras similares son completamente diferentes y parecen exigir nuevos métodos para tratar con problemas de estimación, límites de confianza y fiduciales, prueba de hipótesis, etc. Quizá podemos utilizar métodos no paramétricos en este campo. La mayoría de los econométricos piensan probablemente que el uso de la distribución normal puede ser justificado (en cierta manera) recurriendo a una especie de teorema del Límite Central. Esto es cierto para una gran variedad de problemas estadísticos y algunas investigaciones han mostrado que los métodos estadísticos tradicionales son relativamente robustos. Pero esta robustez y adaptabilidad general de los métodos tradicionales estadísticos pueden finalmente causar una ilusión. Es, por ejemplo, fácil demostrar que si estamos muestreando con una distribución normal, la mediana es relativamente ineficiente comparada con la media aritmética: si tenemos una muestra aleatoria de 100 elementos, tomaríamos una muestra de 157 elementos para obtener la misma exactitud con la mediana de la muestra que con la media de la mues-

tra, si medimos la exactitud por medio de la varianza. Esto es suficientemente cierto siempre que la población que nosotros muestreemos sea normal. Pero, supongamos que nosotros muestreemos con una distribución de Cauchy, entonces es bien conocido que la distribución de media de la muestra es exactamente la misma que la distribución de cada elemento individual en la muestra. En este caso (admitimos que es extremo) no ganamos nada computando la media aritmética de la muestra. Podemos justificadamente, escoger al azar un elemento de nuestra muestra. Si las consideraciones probabilísticas del tipo discutido aquí nos tornan escépticos frente a nuestros procedimientos estadísticos, este se refuerza por el trabajo de Basmann (7). Los modelos económicos desafortunadamente no están basados en muestras grandes. Es supremamente difícil derivar de muestras pequeñas distribuciones de estimaciones econométricas. Basmann ha tenido éxito procediendo así y ha descubierto que si nuestros errores o desviaciones tienen distribuciones normales, la distribución de las estimaciones econométricas son muy complicadas. Pero están relacionadas a la distribución de Cauchy y tienen varianza infinita. Aquí Mandelbrot obtiene apoyo de un estadista con profundos prejuicios clásicos. La obra de Basman muestra que si nosotros partimos con las (en mi opinión, más bien irrealista) suposiciones clásicas de normalidad, podemos, con nuestras estimaciones econométricas empíricas, acabar con las variables aleatorias con varianza infinita. Estas variables pertenecen nuevamente a la familia estudiada por Mandelbrot.

Habiendo presentado a los economo-estadísticos y a los econometristas algunas reflexiones acerca de la manera en la cual pueden ser introducidas ideas más útiles en la economía-estadística, regresamos ahora a los asuntos concernientes a los economo-matemáticos. En oposición a muchas otras ciencias sociales, la

economía, especialmente la economía matemática, ha alcanzado una cierta madurez (75). Nuestro tiempo ha visto un cierto declinar del punto de vista neoclásico (27) pero esto ha sido más que compensado por el surgimiento de los métodos lineales, es decir, programación lineal, análisis de actividades, análisis de insumo-producto, y otros métodos relacionados. Con la teoría de juegos la economía ha logrado por primera vez un modelo que no ha sido derivado por analogía de las ciencias naturales. Se han obtenido muy buenos teoremas especialmente en conexión con los sistemas económicos competitivos. El desafiante problema del desarrollo económico ha sido atrevidamente atacado y si los resultados teóricos actuales son aún deficientes, pueden ser prometedores. Exactamente como la física determinística del siglo XIX, ha sido prácticamente reemplazada por la física estocástica del siglo XX, pero es aún utilizada como una aproximación válida en la mayoría de los problemas físicos (especialmente por ingenieros), así podemos conservar provisionalmente los, en cierto modo menos imponentes, resultados de la economía determinística, especialmente la economía matemática (42). Estos tienen solamente que ser reinterpretados en correspondencia quizá con ciertos valores medios de las variables económicas. Por lo tanto, ya que es mucho menos cierto que la ley de los grandes números puede ser válidamente aplicada en nuestro campo, tenemos que ser más prudentes que los físicos clásicos acerca de la importancia de nuestros resultados, aún como una cruda aproximación.

R e f e r e n c i a s

1. M. Aoki, *Optimización of Stochastic systems*, Academic Press, New York, 1967.
2. J. Aitchison and J. A. C. Brown, *The Log-normal distribution*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1957.

3. K. J. Arrow, S. Karlin, H. Scarf, eds., *Studies in Applied Probability and management Science*, Stanford University Press, Stanford 1962.
4. K. J. Astron, *Introduction to Stochastic Control Theory*, Academic Press, New York, 1970.
5. R. J. Aumann, "Markets with a continuum of traders, *Econométrica*, 32,(1964), 39-49.
6. M. S. Bartlett, *An Introduction to Stochastic Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1965.
7. R. L. Basmann, "A note on the exact finite sample frequency functions of generalized classical linear estimators in two leading over-identified cases" *J. Amer. Stat. Assoc.* 56(1961) 619-636.
8. W. V. Baumol, *Economic Dynamics*, 2nd ed. Macmillan, New York, 1959.
9. M. J. Beckmann, *Lineare Planungsrechnung, Fachverlag für Wirtschafts-theorie und Ökonometrie*, Ludwigshafen, 1959.
10. R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, 1957.
11. R. Bellman, *Introduction to Mathematical Theory of Control Processes*, Academic Press, New York, 1967.
12. A. T. Bharucha-Reid, *Elements of Markov Processes and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1960.
13. M. Blaug, *Economic Theory in Tetrospect*, Irwin Homewook, Ill. 1962.
14. K.H. Borch, *The Economics of Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1968.
15. J. E. P. Box and G. M. Jenkins, *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden Day, San Francisco, 1970.
16. R. S. Bucy and P. D. Joseph, *Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance*, Wiley, New York, 1968.
17. E. Burmeister and A. R. Dobell, *Mathematical Theories of Economic Growth*,

18. E. H. Chamberlin, *The Theory of Monopolistic competition*, 6th ed. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1948.
19. G. K. Champernowne, "A model of income distribution" *Ec. J.*, 63 (1953) , 313-351 .
20. O. H. Cootner, ed., *The Random Character of Stock Market Rises*, Rev. Ed., Mit Press, Cambridge, Mass., 1967.
21. G.B. Kantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton, University Press, Princeton, 1963 .
22. H. T. Davis, *The Analysis of Economic Time Series*, Principia Press, Bloomington, Indiana 1941.
23. G. Debreu, *Theory of value*, Wiley, New York, 1959.
24. M.M. Faber, *Stochastisches Programmieren*, Physica, Wurzburg, 1970.
25. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, I. 3rd. ed., Wiley, New York, 1968.
26. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, II, Wiley, New York, 1966.
27. E. Fels and G. Tintner, "Methodik der Wirtschaftswissenschaft," *Enzyklopaedie der Geisteswissenschaftlichen Arbeitsmethoden VIII*, 3-94, Olden - bourg, Munich, 1966.
28. M. Fisz, *Probability Theory and Mathematical Statistics*, 3rd. ed., Wiley, New York, 1963.
29. J. K. Galbraith, *The new Industrial State* , Houghton Mifflin, Boston, 1967.
30. N. Georgescu-Roegen, *Analytical Economics*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1966.
31. C. W. Granger and O. Morgenstern, "Spectral analysis of New York stock exchange prices," *Kyklos*, 16 (1963), 1-27 .
32. U. Granander and M. Rosenblatt : *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, Wiley, New York, 1957.

33. T. Haavelmo, *A Study in the Theory of Economic Evolution*, North Holland , Amsterdam, 1954.
34. F. H. Hahn and R. C. O. "Mathews, the theory of economic growth : a survey," EC. J. 74, (1964), 779-902 .
35. E. J. Hannan, *Time Series Analysis*, Methuen, London, 1960.
36. E. J. Hannan, *Multiple Time Series*, Wiley, New York, 1970.
37. J. C. Harsanyi, "A general theory of rational behaviour in game situations," *Econometrica*, 34 (1966), 613-634.
38. F. A. Hayek, *The Counterrevolution of Science*, Free Press, Glencoe, Ill-, 1952.
39. J. R. Hicks, *Value and Capital*, Clarendon, Ocford, 1946 .
40. W. Hildenbrand, "The core of an economy with a measure space of economic agents, *Rev. Ec. Stud.* 35 (1968) 443-452 .
41. C.C. Holt, F. Modigliani, J. F. Muth and H. A. Simon, *Planning, Production, Inventories and Work Force*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1960.
42. M. D. Intrilligator : *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1971.
43. L. V. Kantorovicz, *Calcul Economique et utilisation des ressources*, Dunod, Paris, 1963 .
44. H. F. Karreman, *Stochastic Optimization and control*, Wiley, N Y 1968.
45. J. G. Kemeny, O. Morgenstern and G. L. Thompson, "A generalization of the Von Neumann model of an expanding economy, *Econometrica* ", 24(1956) 11-135
46. T. C. Koopmans, *Three Essays on the state of Economic Science*, McGraw - Hill, New York, 1957.
47. R. E. Kuemme. *Theory of general equilibrium*, Princeton University Press , Princeton, 1963

48. H. J. Kushner, *Stochastic Stability and Control*, Academic Press, New York, 1967.
49. J. Lesourne, *Technique Economique et gestion industrielle*, Dunod, Paris, 1960.
50. P. C. Mahalanobis, "The approach of operational research teoplanning", *Sankhya* 16 (1955), 3-130.
51. B. Mandelbrot, "The variation of speculative prices," *J Business*, 36(1963) 394-419.
52. J. Marschak, "Rational behavior, uncertain prospects and measurable utility", *Econometrica*, 18(1950) 111-141.
53. A. Marshall, *Principles of Economics*, 8th ed., MacMillan, New York, 1948.
54. P. Massé, *Le Choix des investissements*, Dunod, Paris, 1959.
55. J. Monod, *Le hasard et la nécessité, du Seuil*, Editions, Paris, 1970
- 56° A. M. Mood and F. A. Graybill, *Introduction to the Theory of Statistics*, 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 1950.
57. M. Morishima, *Equilibrium, Stability and Growth*, Clarendon, Oxford, 1964.
58. V. Mujerjee, G. Tintner and R. Narayanan, "A generalized poisson process for the explanation of economic development with applications to Indian data", *Arthaniti*, 8 (1964) 1-9.
59. R. E. Murphy, *Adaptive Processes in Economic Systems*, Academic Press, New York, 1965.
60. H. Nikaido, *Convex Structures and Economic Theory ?* Academic Press, New York, 1968.
61. S. J. Prais and H. S. Houthakker, *The Analysis of family budgets*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1955.
62. R. E. Quandt, "The estimation of parameters of a linear regression system obeying two different regimes." *J. AM. Assoc.*, 53 (1958) 873-880.

- 63 J. Robinson, *The economics of imperfect competition*, MacMillan, London, 1938.
- 64 W. W. Rostow, *The Stages of economic Growth*, Cambridge University Press, Cambridge, 1960.
- 65 J. A. Schumpeter, *History of economic Analysis*, Osgord, New York, 1954.
- 66 J. K. Sengupta and G. Tintner, *An approach to a stochastic Theory of Economic Development and Fluctuations* " *Problems of Economic Development and Planning Essays in honour of Michael Kalecki*, PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1966, pp. 373-391.
- 67 J. K. Sengupta and K. A. Fox, *Optimization Techniques in Quantitative Economic Models*, North Holland, Amsterdam, 1969.
- 68 S.S. Sengupta, *Operations Research in Sellers Competition*, Wiley, New York, 1967
- 69 M. Shubik, *Strategy and Market Structure*, Wiley, New York, 1969.
- 70 H. A. Simon, *Models of Man*, Wiley, New York, 1957.
- 71 J. Steindl, *Random Processes and the Growth of Firms*, Hafner, New York , 1965.
- 72 H. Theil, *Economics and Information Theory*, North Holland, Amsterdam, 1967.
- 73 G. Tintner, "Some thoughts about the state of econometrics, S. R. Krupp ed.: *The Structure of Economic Science*, Englewood Cliffs, N. J. 1966, pp. 114-128.
- 74 G. Tintner : Time series (general). In D. L. Sills ed. *International encyclopedia of the social sciences*, XVI, MacMillan, New York, 1968, 47-49.
- 75 G. Tintner, *Metodology of Mathematical Economics and Econometrics*, University of Chicago Press, Chicago, 1968.
- 76 G. Tintner, "What does control theory have to offer ? ", *AM. J. Agri. Ec.*, 51 (1969) 383-393.
- 77 G. Tintner, "Systematic planning and decision models" E.O. Heady ed. *Eco-*

conomic models and quantitative methods for decision and planning in agriculture, University Press, Iowa State, Ames, Iowa, 1971, pp. 55-107.

78. G. Tintner and I. Bello, "Aplicación de un proceso de difusión logaritmico-normal al crecimiento económico de Chile". *Trabajos de Estadística*, 19, (1968), 83-97.
79. G. Tintner and J. Licari, "The stochastic view of economics", *Am. Economist*, 14 (1970), 4-9.
80. G. Tintner and R. Narayanan, "A multi-dimensional stochastic process for the explanation of economic development". *Metrika*, 11 (1966) 85-90.
81. G. Tintner and M. Parel, "a log-normal diffusion process applied to the growth of yields of some agricultural crops in India", *J. Devel. Stud.*, 6 (1969) 49-57.
82. G. Tintner and R. C. Patel, "A log-normal diffusion process applied to the economic development of India", *Indian Ec. J.*, 13 (1965) 465-474.
83. G. Tintner and R. C. Patel, "A log-normal diffusion process applied to the development of Indian agriculture with some considerations on economic policy". *Indian Soc. Sgric. Stat.*, 18(1966) 36-44.
84. G. Tintner and J. K. Sengupta, "Stochastic linear programming and its application to economic planning. On political economy and econometrics." *Essays in honor of Oskar Lange* PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1964, pp. 601-618.
85. G. Tintner and J. K. Sengupta: *Stochastic Economics*, Academic Press, New York, 1972.
86. G. Tintner, J. K. Sengupta and E. J. Thomas, "Applications of the theory of stochastic processes to economic development." I. Adelman and E. Thorbecke, eds: *The Theory and design of Economic Development*, Johns Hopkins Press, Baltimore, 1966, pp. 99-110.
87. G. Tintner and E. J. Thomas, "Un modele stochastique de developement économique avec application à l'industrie Anglaise" *Revue D'Economie Politique*, 73, (1973) 143-147.

88. J. Von Neumann, "A model of general equilibrium," *Rev. Econ. Stud.*, 13 (1945) 1-9 -
89. J. Von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior* Princeton University Press, Princeton, 1944
90. H. M. Wagner, *Principles of operations research*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1969
91. H. M. Weingartner, *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*, Markham, Chicago, 1967.
92. P. Whittle, "Prediction and Regulation", English University Press, London 1963.
93. P. Whittle, "A view of stochastic control theory", *J. Royal Stat. Soc. Ser.B*, 132 (1969) 32-334 .
94. F. Zeuthen, *Problems of Monopoly and Economic Warfare* , Routledge, London, 1933 .

* * *