Boletín de Matemáticas
Vol. IX, Nos. 4,5,6, págs. 256-287

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA ; V

JAIRO CHARRIS C.

CAPITULO XI

FUNCIONES ANALITICAS Y SERIES DE TAYLOR

1. Series de Taylor

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Se define el límite superior de a_n, y se denota por $\lim_{n\to\infty} \sup a_n$, como

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{m\geq n} a_m)$$

Si

$$b_n = \sup_{m\geq n} a_m ,$$

la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Teorema 1.1. *Sea $a\in R$. Las proposiciones (a) y (b) siguientes son equivalentes :*

(a) $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = a$

(b) (i) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n\in\mathbb{N}$ *tal que, para todo* $m\geq n$, $a_m < a+\varepsilon$.

(ii) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *y todo* $n\in\mathbb{N}$ *existe* $m\geq n$ *tal que* $a_m > a-\varepsilon$.

Demostración. Demostremos primero que (a) implica (b). Tenemos que demostrar que (i) y (ii) son válidas, bajo las hipótesis de que (a) es válida. Demostremos (i). Sea $\varepsilon > 0$. Si $a + \varepsilon \leq \sup a_m$ para todo n, necesariamente

$$a + \varepsilon \leq a = \inf_{n \geq m} (\sup_{n \geq m} a_n) ,$$

lo cual es absurdo. Debe existir entonces n tal que

$$\sup_{m \geq n} a_m < a + \varepsilon .$$

Esto implica que $a_m < a + \varepsilon$ para todo $m \geq n$, y demuestra (i). Para demostrar (ii), sea $\varepsilon > 0$, y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_m \leq a - \varepsilon$ para todo $m \geq n$. Se tendría

$$\sup_{m \geq n} a_m \leq a - \varepsilon ,$$

y de esto

$$a \leq a - \varepsilon ,$$

también absurdo. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ debe existir $m \geq n$ con $a_m > a - \varepsilon$. Esto demuestra (ii). Demostremos ahora que (b) implica (a). La condición (i) implica que

$$\sup_{m \geq n} a_m \leq a + \varepsilon ,$$

de lo cual

$$\lim_{n \to \infty} \sup a_n \leq a + \varepsilon$$

La condición (ii) implica, por otra parte, que

$$\sup_{m \geq n} a_m \geq a - \varepsilon$$

para todo n, de lo cual

$$\lim_{n \geq \infty} \sup a_n \geq a - \varepsilon$$

Se tiene entonces

$$\left| \lim_{n\to\infty} \sup a_n - a \right| \leq \varepsilon \quad ,$$

y como ε es arbitrario,

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = a.$$

Esto demuestra la afirmación.

Nota. Sea $-\infty \leq a \leq +\infty$. Nótese que decir que $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = a$ es equivalente a decir a es el mayor número real tal que existe una subsucesión $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$ con

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a \quad .$$

Lema 1.0. *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s una serie de números complejos y*

$$a = \lim_{k\to\infty} \sup |a_k|^{1/k}$$

Entonces :

a) Si $a < 1$, la serie s converge absolutamente.

b) Si $a > 1$, s diverge.

Demostración : Demostremos (a). Sea $\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon < 1$. Sea $m > 0$ tal que $|a_n|^{1/n} \leq a + \varepsilon$ para $m \geq n$. Entonces $|a_n| \leq (a+\varepsilon)^n$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a+\varepsilon)^n$ es evidentemente convergente, también $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ lo es. Esto demuestra (a). Para demostrar (b) escójanse $a' \leq a$, $a' < \infty$ y $\varepsilon > 0$ tales que $|a_n| \geq (a' - \varepsilon)^n$ para infinitos valores de n y que $a' - \varepsilon > 1$. Se deduce que $|a_n|$ no converge a 0, de lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Nota : Si $a = 1$ nada se puede concluir con respecto al comportamiento de

s. Ver los ejercicios al final. El lema 1.0 se conoce con el nombre de Test de la Raiz.

Lema 1.1. *(Abel) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sea $a_n \in \mathbb{C}$. Sea $a \in \mathbb{C}$ y sea*

$$b = \lim_{n \to \infty} \sup |a_n|^{1/n}$$

Entonces: (a) si $0 < b < +\infty$, la serie

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad (1.1)$$

converge absolutamente en $B_r(a)$, donde $r = \frac{1}{b}$.

La convergencia es además absolutamente uniforme sobre todo compacto $K \subseteq B_r(a)$. Si $z \notin B_r(a)$,

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

diverge.

(b) Si $b=0$, (1.1) converge absolutamente en $\mathbb{C}$ y absoluta y uniformemente en todo compacto K de $\mathbb{C}$.

(c) Si $b=+\infty$, (1.1) diverge en todo punto $z \in \mathbb{C}$, $z \neq a$.

Demostración. Para demostrar la primera afirmación de (a) es claramente suficiente demostrar que (1.1) converge absoluta y uniformemente en compactos de $B_r(a)$. Ahora, para ésto es claramente suficiente demostrar que la convergencia es uniforme sobre $B_s(a)$ para todo $0 < s < r$. Escribamos $B_s = B_s(a)$.

$$\sup_{z \in B_s} \left\{ \sum_{k=m}^{m+n} |a_n (z-a)^k| \right\} = \sup_{z \in B_s} \left\{ \sum_{k=m}^{m+n} |a_k| \, |z-a|^k \right\} \leq \sum_{k=m}^{m+n} |a_k| \, s^k .$$

Se deduce que

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{k=m}^{m+n} |a_k (a-a)^k| \right\|_{B_s} = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=m}^{m+n} \| a_k (z-a)^k \|_{B_s}$$

$$\leq \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=m}^{m+n} |a_k|\, s^k = 0 \,,$$

pues $\sum_{k=o}^{\infty} |a_k|\, s^k$ es convergente, ya que (Test de la Raiz),

$$\lim_{k\to\infty} \sup |a_k|^{1/k} s = s \lim_{k\to\infty} \sup |a_k|^{1/k} = s \cdot \frac{1}{r} < 1$$

Supongamos ahora que $z \notin B_r(a)$. En tal caso, $|z-a| > r$, y es claro que $\sum_{k=o}^{\infty} a_k (z-a)^k$ diverge, pues

$$\lim_{k\to\infty} \sup |a_k|^{1/k} |z-a| = |z-a| \cdot \frac{1}{r} > 1 \,.$$

Esto demuestra (a). Para demostrar (b) el argumento es similar. Basta demostrar que para todo $R > 0$

$$\lim_{m,n\to\infty} \left(\sum_{k=m}^{m+n} \| a_k (z-a)^k \|_{B_R(a)} \right) = 0 \,,$$

lo cual es evidente por ser $\sum_{k=o}^{\infty} |a_k|\, R^k$ convergente, debido a que (Test de la Raiz) $\lim_{k\to\infty} \sup |a_k|^{1/k} R = 0 < 1$.

Demostremos (c). Si $z \neq a$.

$$\lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{1/n} |z-a| = |z-a| \lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{1/n} = +\infty > 1 \,,$$

lo cual implica la afirmación. Esto demuestra el lema.

Corolario. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{1/n} = b \leq +\infty .$$

Sea $r = \frac{1}{b}$, donde escribimos $r = +\infty$ si $b = 0$, $B_r(a) = C$ si $r = +\infty$. Entonces, la función $f: B_r(a) \to C$ definida por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \qquad z \in B_r(a) ,$$

es holomorfa en $B_r(a)$. Además, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-a)^{n-k} .$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left| \frac{n}{(n-k)} a_n \right|^{1/n-k} = \lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{1/n} .$$

Demostración Escribamos

$$f_n(z) = a_n (z-a)^n \quad , \qquad z \in B_r(a) .$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en compactos de $B_r(a)$,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

es holomorfa en $B_r(a)$. Como además

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$$

converge en compactos a $f^{(k)}$ para todo $k \geq 0$, todo se reduce a demostrar que

$$f_n^{(k)} = 0 \quad , \qquad k > n ,$$

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{n}{(n-k)!} a_n (z-a)^{n-k} \quad , \qquad k \leq n ,$$

lo cual es inmediato por inducción sobre k. Finalmente, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

converge en todo punto $z \in B_r(z)$, necesariamente

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left| \frac{n}{(n-k)} a_n \right|^{1/n-k} \geq b$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto demuestra el corolario.

Una serie de funciones de la forma

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{1.3}$$

se denomina una *serie de potencias* o *una serie de Taylor*. Para abreviar, la denominaremos una *T-serie*. En tal caso, si

$$b = \lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{1/n},$$

y si escribimos

$$r = \frac{1}{b} \quad \text{si} \quad 0 < b < +\infty$$

$$r = 0 \quad \text{si} \quad b = +\infty$$

$$r = +\infty \quad \text{si} \quad b = 0,$$

r se denomina el radio de convergencia de la serie (1.3). Así mismo, se denomina dominio de convergencia de S al mayor conjunto abierto Ω tal que S converge para todo $z \in \Omega$. Es claro que

$$\Omega = B_r(a) \quad \text{si} \quad 0 < r \leq +\infty$$

donde r es el radio de convergencia de S, y donde convenimos que

$$B_r(a) = \mathbb{C} \qquad , \quad r = +\infty .$$

En el caso $r = 0$ convendremos en que $B_r(a) = \phi$ y en este caso, $\Omega = \phi$.

El corolario al teorema (1.1) establece que toda serie de Taylor define en su dominio de convergencia una función holomorfa cuyo valor en $z \in \Omega$ es precisamente la suma de la serie. Las series (1.2) tienen a su vez un dominio de convergencia el cual contiene a Ω. No es difícil ver que el dominio de convergencia de tales series es precisamente Ω. Basta demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left| \frac{n!}{(n-k)!} a_n \right|^{1/n-k} = \lim_{n\to\infty} \sup \left| a_n \right|^{1/n}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, lo cual es un ejercicio simple para el lector.

Si $z \in C$ es tal que $|z-a| = r$, nada se puede decir, en general, acerca de la convergencia de S en este punto. Algunas veces la serie diverge en todo punto del conjunto

$$S_r(a) = \{ z \mid |z-a| = r \},$$

otras converge en algunos puntos y, aún, otras, converge en todos. Nótese también lo siguiente: si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

converge en algún punto $z \in C$, $z \neq a$, necesariamente $r > 0$.

Definición 1.2. Una función $f: \Omega \to C$, Ω abierto en C, se dice analítica compleja, o, simplemente, C-analítica, si para cada punto $a \in \Omega$ existen una vecindad U de a en Ω y una serie de potencias

$$S_U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \quad a_n \in C,$$

la cual converge a $f(z)$ en todo punto $z \in U$. Denotaremos por $A_C(\Omega)$

al $\mathbb{C}$-espacio de las funciones $\mathbb{C}$- analíticas en Ω.

Sea $D = \{ z \mid |z| < 1 \}$ y sea $f: D \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$.
Entonces f es $\mathbb{C}$-analítica en D. En efecto, si $a \in D$

$$f(z) = \frac{1}{(1-a)-(z-a)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{1-a}}$$

Pero, para todo $b \in \mathbb{C}$, con $|b| < 1$,

$$\frac{1}{1-b} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n$$

como se demuestra inmediatamente. Entonces, para $z \in D$,

$$f(z) = \frac{1}{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{1-a} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-a} \right)^{n+1} (z-a)^n \;.$$

si $|z-a| < |1-a|$. Nótese al respecto que

$$\lim_{n \to \infty} \sup \left| \left(\frac{1}{1-a} \right)^{n+1} \right|^{\frac{1}{n}} = \left| \frac{1}{1-a} \right| .$$

Así, si $a = \frac{1}{2}$, el radio de convergencia es $r = 1/2$, y es imposible que la serie converja en todo D. El desarrollo en serie de Taylor de una función $\mathbb{C}$-analítica es entonces local y no global. Nótese que si $f \in A_{\mathbb{C}}(\Omega)$ y U es una vecindad de a en la cual

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \qquad (z \in U)$$

entonces la serie converge uniformemente en compactos de $U \cap B_r(a)$, donde $r > 0$ es el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Nótese que $U \subseteq \overline{B_r(a)}$, y que $U \subseteq B_r(a)$ si U es abierta.

Teorema 1.2. $\mathcal{O}(\Omega) \supseteq A_C(\Omega)$.

Demostración. En efecto, si $a \in \Omega$, existen una vecindad abierta V de a y una serie de Taylor

$$S_V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

la cual converge uniformemente a f en compactos de V. Esto implica que la restricción de f a V está en $\mathcal{O}(V)$. Como esto vale para cualquier $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Esto demuestra el teorema.

Sean $f: \Omega \to C$, C-analítica, $a \in \Omega$, V una vecindad abierta de a en Ω, y

$$S_V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

una serie de Taylor la cual converge a f en compactos de V. Entonces,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-a)^{n-k}$$

para todo $z \in V$. Se deduce entonces que

$$f^{(k)}(a) = k!\, a_k .$$

o sea

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$$

Por lo tanto:

Teorema 1.3. Si $f \in A_C(\Omega)$ y $a \in \Omega$, existe una vecindad U de a en Ω tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\, (z-a)^n \tag{1.4}$$

para todo $z \in U$. Si V es otra vecindad de a y $\sum_0^{\infty} a_n (z-a)^n$ es otra serie de Taylor, la cual converge a f en V, necesariamente

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) .$$

y podemos tomar $U = V$ *; o dicho de otra manera, ambas series convergen en* $U \cup V$. *La serie (1.4) es entonces la única convergente a* f *en la vecindad de* a.

Nota. Veremos inmediatamente que si $f \in A_C(\Omega)$ y $a \in \Omega$, f admite un desarrollo en serie de Taylor, necesariamente dado por (1.4), en $B_r(a)$, para todo $r > 0$ tal que $0 < r < d = d(a, C\Omega) = \inf_{z \in C\Omega} |z-a|$.

Teorema 1.4 (Taylor). *Si* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, *necesariamente* $f \in A_C(\Omega)$. *Es decir,* $A_C(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega)$. *Si* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *y* $a \in \Omega$, *la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} f^{(n)}(a) \quad (z-a)^n \tag{1.5}$$

converge a f *en toda bola* $B_r(a) \subseteq \Omega$, *y la convergencia es uniforme en* $B_s(a)$, *si* $B_s(a) \subseteq \Omega$. *En particular, si* $d = d(a, C\Omega)$, *la serie converge a* f *en compactos de* $B_d(a)$

Demostración Todo se reduce a demostrar que (1.5) converge simplemente a f en toda bola $B_r(a)$ tal que $B_r(a) \subseteq \Omega$. Las otras afirmaciones resultan inmediatamente de las propiedades generales de las T-series. Sea $z \in B_r(a)$ y sea

$$S_r(a) = \{ t \mid |t-a| = r \} .$$

Entonces, $S_r(a) \subseteq \Omega$, y la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n$$

converge uniformemente en $S_r(a)$, por ser

$$\sup_{t \in S_r(a)} \left| \frac{z-a}{t-a} \right| < 1 .$$

Esto implica que

$$\int_{C_r(a)} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} (z-a)^n \, dt = \sum_{n=o}^{\infty} \left\{ \int_{C_r(a)} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} \, dt \right\} (z-a)^n$$

$$= (2\pi i) \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \, (z-a)^n .$$

Por otra parte,

$$\frac{f(t)}{t-z} = \frac{f(t)}{(t-a)-(z-a)} = \frac{f(t)}{t-a} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{t-a}} = \frac{f(t)}{t-a} \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{z-a}{t-a} \right)^n$$

por ser

$$\sup_{t \in S_r(a)} \left| \frac{z-a}{t-a} \right| < 1$$

Como

$$(2\pi i) f(z) = \int_{C_r(a)} \frac{f(t)}{t-z} \, dt = \sum_{n=o}^{\infty} \int_{C_r(a)} \frac{f(t)}{t-a} \left(\frac{z-a}{t-a} \right)^n dt ,$$

se deduce que

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \, (z-a)^n$$

lo cual completa la demostración.

El teorema de Taylor marca otra diferencia fundamental entre las funciones $\mathbb{C}$-derivables y las $\mathbb{R}$-derivables. Una función $f: \Omega \to \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no necesariamente admite un desarrollo

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \, (z-a)^n \qquad (1.6)$$

en la vecindad de $a \in \Omega$, aún cuando las $\mathbb{R}$-derivadas $f^{(n)}(x)$ existan en todo punto $x \in \Omega$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota. Es conveniente advertir de nuevo que si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $a \in \Omega$ y $U \in \mathcal{B}(a)$, U abierta, no necesariamente existe un desarrollo de Taylor de f en potencias de $(z-a)$ el cual sea válido en todo U. Esto es cierto si y sólo si $U \subseteq B_r(a)$, donde r es el radio de convergencia de la serie

$$\sum 1/n!\; f^{(n)}(a)\,(z-a)^n .$$

Los teoremas siguientes son característicos del comportamiento de las funciones holomorfas. En todos ellos interviene de manera decisiva la $\mathbb{C}$-analiticidad de tales funciones, y tales teoremas fueron descubiertos en un principio dentro del marco de las funciones $\mathbb{C}$-analíticas.

Definición 1.3. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{C}$. Un subconjunto $A \subseteq \Omega$ se dice un conjunto de unicidad de Ω, si, para toda pareja f, g de funciones en Ω, el hecho de que f, g coincidan en A, implica que f, g coinciden en Ω.

Lo anterior es claramente equivalente a decir que si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $f(z) = 0$ para todo $z \in A$, entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

Teorema 1.5. (Principio de la Prolongación analítica) *Si Ω es conexo, todo subconjunto A de Ω, el cual tenga un punto de acumulación en Ω, es un conjunto de unicidad de Ω. En particular, si $A \subseteq \Omega$ es abierto y $A \neq \phi$, entonces A es un subconjunto de unicidad de Ω.*

Demostración. Comenzaremos por demostrar la última afirmación. Sea entonces $A \subseteq \Omega$, abierto y no vacío. Sea $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ y supongamos que $f(z) = 0$ para todo $z \in A$. Esto implica evidentemente que $f^{(k)}(z) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $z \in A$. Sea

$$E_k = \{ z \in \Omega \mid f^{(k)}(z) = 0 \} ,$$

y sea

$$E = \bigcap_{k=o}^{\infty} E_k$$

Es claro que E_k es cerrado en Ω, pues $f^{(k)}$ es continua. Por lo tanto E es cerrado. Además $E \neq \phi$, pues $A \subseteq E$. Sea ahora $b \in E$. En una vecindad abierta V de b, $V \subseteq \Omega$, f tiene un desarrollo de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(b) (z-b)^n , \quad z \in V .$$

Como $b \in E$, necesariamente $f(z) = 0$ para todo $z \in V$, y como V es abierta, $f^{(k)}(z) = 0$ para todo $z \in V$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $V \subseteq E$. Se deduce entonces que E es abierto en Ω y, como Ω es conexo, $E = \Omega$. Esto demuestra el teorema en el caso de que A sea abierto. Supongamos ahora A arbitrario con un punto de acumulación $a \in \Omega$. Entonces $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto es claro si $k = 0$, pues siendo a un punto de acumulación de A, debe existir $\{ a_n \} \subseteq A$ ($a_n \neq a_m \neq a$ si $m \neq n$) tal que $a_n \to a$, y entonces

$$f(a) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = 0 .$$

Veamos que $f^{(k)}(a) = 0$ para $k \geq 1$. Como $a \in \Omega$, existe una vecindad abierta U de a, en Ω, en la cual

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \ (z-a)^n$$

para todo $z \in U$. Supongamos por inducción que $f^{(k)}(a) = 0$ para $k < m$. Entonces

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \, (z-a)^n .$$

Sea $\{a_n\} \subseteq A$, $a_n \neq a_m$ si $m \neq n$, $a_n \neq a$ para todo n, y $\{a_n\} \subseteq U$. Entonces

$$f(a_k) = 0 = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \, (a_k - a)^n ,$$

de lo cual

$$\frac{1}{m!} f^{(m)}(a) = -\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \, (a_k - a)^{n-m} .$$

Ahora bien, como la serie

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \, (z-a)^{n-m}$$

converge en U, define allí una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(U)$,

$$g(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \, (z-a)^{n-m} , \quad z \in U .$$

Es claro que $g(a) = 0$ y que

$$\lim_{k \to \infty} g(a_k) = g(a) = 0 .$$

Por lo tanto,

$$f^{(m)}(a) = -m! \lim_{k \to \infty} g(a_k) = 0 .$$

Esto demuestra que $g^{(m)}(a) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Pero entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in U$, y, como U es un conjunto de unicidad de Ω, $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Esto demuestra el teorema.

Corolario 1 Si Ω es conexo, $\mathcal{O}(\Omega)$ es un anillo entero conmutativo con elemento unidad para las leyes de composición

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z)$$

$$(fg)(z) = f(z)\,g(z) .$$

Demostración. Que $\mathcal{O}(\Omega)$ es un anillo conmutativo con elemento unidad es evidente (el elemento unidad es la función

$$1(z) = 1$$

para todo $z \in \Omega$). Veamos que no hay en $\mathcal{O}(\Omega)$ divisores de 0. Supongamos que $fg = 0$. Si $f \neq 0$, y si

$$A = \{ z \mid f(z) = 0 \} ,$$

$\Omega' = \Omega - A$ es abierto y no vacío. Ahora, para $z \in \Omega'$,

$$f(z)\,g(z) = 0 \quad , \quad f(z) \neq 0 .$$

Por lo tanto $g(z) = 0$. Como Ω' es un conjunto de unicidad de Ω, $g(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. El corolario está demostrado.

Nota. Si Ω no es conexo, $\mathcal{O}(\Omega)$ tiene obviamente divisores de cero.

Corolario 2. Sean Ω, Ω' abiertos conexos tales que $\Omega \cap \Omega' \neq \phi$. Sea

$$\Delta : \mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega \cap \Omega')$$

$$(f,g) \to (f-g) \mid \Omega \cap \Omega' .$$

Si sobre $\mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega')$ se considera la estructura de $\mathbb{C}$-espacio producto, y si

$$R : \mathcal{O}(\Omega \cup \Omega') \to \mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega')$$

es la aplicación

$$R(f) = (f \mid \Omega , f \mid \Omega') ,$$

Δ y R son C-lineales, y la sucesión

$$0 \to \mathcal{O}(\Omega \cup \Omega') \xrightarrow{R} \mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega') \xrightarrow{\Delta} \mathcal{O}(\Omega \cap \Omega')$$

es exacta.

Demostración. Trivial.

Nota. Veremos más adelante que si $A \subseteq \Omega$, Ω conexo, A es de unicidad si y sólo si A tiene un punto de acumulación en Ω. Es decir, si $A \subseteq \Omega$ y ningún punto de acumulación de A pertenece a Ω, o si A no tiene puntos de acumulación, existe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \neq 0$, tal que $f \mid A = 0$. Si A es finito, esto es evidente. Bastará tomar

$$f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n), \quad z \in \Omega,$$

supuesto que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Si A no es finito, el problema es un poco más delicado, y depende de la teoría de haces o de la teoría de los productos infinitos. Sobre esto volveremos más adelante.

Teorema 1.6 *Sea $A \subseteq \Omega$, Ω conexo. Supóngase que A no tiene puntos de acumulación en Ω. Entonces*

a) A es un subespacio discreto de Ω. Además, A es cerrado en Ω.

b) A es a lo más enumerable

Demostración. Inmediata.

Teorema 1.7 *Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $a \in \Omega$, Ω conexo. Supóngase que $f(a) = 0$, pero que $f \neq 0$. Entonces, existen $m > 0$ y $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tales que*

$$f(z) = (z-a)^m g(z), \quad g(a) \neq 0$$

para todo $z \in \Omega$. Además, g está unívocamente determinada por f.

y existe una vecindad U de a en Ω tal que

$$g(z) \neq 0$$

para todo $z \in U$.

Demostración. Sea U una vecindad de a en Ω tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, $z \neq a$. Tal vecindad existe, pues $f^{-1}(0)$ no puede tener puntos de acumulación en Ω. Además, U puede suponerse lo suficientemente pequeña para que f admita en U el desarrollo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \, (z-a)^n .$$

Ahora bien, si $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, f sería idénticamente nula en Ω, contrario a la hipótesis. Por lo tanto, debe existir $p > 0$ tal que $f^{(p)}(a) \neq 0$. Sea

$$m = \text{mín} \{ p \mid f^{(p)}(a) \neq 0 \} .$$

Como $f(a) = 0$, $m > 0$. Como en U

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} (z-a)^n \, \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) ,$$

es claro que

$$f(z) = (z-a)^m \, g(z)$$

donde

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \, (z-a)^{n-m}$$

es holomorfa en U. Como $f(z) \neq 0$ para $z \in U$, $z \neq a$, es claro que $g(z) \neq 0$ para $z \in U$, $z \neq a$. Como además

$$g(a) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(a) ,$$

necesariamente $g(a) \neq 0$. Por lo tanto $g(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. Definamos ahora

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}$$

para $z \notin U$. Entonces es claro que $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ satisface las condiciones del enunciado. Finalmente, como $\Omega - \{a\}$ es un conjunto de unicidad de Ω, es claro que g es única. Esto demuestra la proposición.

Corolario. Sea Ω conexo, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces, si $f^{-1}(0) = \{a_1, \ldots, a_n\}$,

$$f(z) = (z-a_1)^{\lambda_1} (z-a_2)^{\lambda_2} \ldots (z-a_n)^{\lambda_n} h(z)$$

donde $\lambda_k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k > 0$, $h \in \mathcal{O}(\Omega)$, $h(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.

Nota. Si Ω es conexo, $a \in \Omega$, y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \neq 0$, $f(a) = 0$, entonces

$$f(z) = (z-a)^p g(z) \quad , \quad p > 0 \, ,$$

con $g(z) \neq 0$ en una vecindad de a. El menor valor de p que satisface la anterior condición se denomina el *orden del cero que f tiene en a*. Es costumbre escribir $p = C(f, a)$. Es claro que $C(f, a) = 0$ si y sólo si $f(a) \neq 0$. A su vez, si $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, escribiremos

$$C(f, a) = +\infty \, .$$

Teorema 1.8. (Teorema de la aplicación abierta). *Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y no constante. Si Ω es conexo, para todo abierto U de Ω, $f(U)$ es abierto en $\mathbb{C}$. Es decir, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es abierta.*

Demostración. Es suficiente demostrar que, para todo $a \in U$, $f(U)$ es una vecindad de $f(a)$ en $\mathbb{C}$. Sea $w = f(a)$. Como f no es constante y Ω es conexo, debe existir $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}_\varepsilon(a) \subseteq U$ y $f(z) \neq w$ para todo $z \in \overline{B}_\varepsilon(a)$, $z \neq a$ (si no, a sería un punto de acumulación de $A = f^{-1}(w)$, el cual sería un conjunto de unicidad de Ω). Sea

$$\delta = \inf_{z \in S_\varepsilon(a)} |f(z) - w| , \quad S_\varepsilon(a) = \{ z \mid |z-a| = \varepsilon \} .$$

Entonces $\delta > 0$ (pues $S_\varepsilon(a)$ es compacto). Podemos suponer que $B_\delta(w) \not\subseteq f(U)$. Sea entonces $b \in B_\delta(w)$ tal que $b \notin f(U)$. La función

$$g(z) = \frac{1}{f(z)-b} \in \mathcal{O}(U) ,$$

y por las estimativas de Cauchy

$$\frac{1}{|f(a)-b|} = |g(a)| \leq \sup_{z \in S_\varepsilon(a)} |g(z)| = \sup_{z \in S_\varepsilon(a)} \frac{1}{|f(z)-b|} \leq \sup_{z \in S_\varepsilon(a)} \frac{1}{|f(z)-w| - |b-w|}$$

$$\leq \frac{1}{\delta - |b-f(a)|} .$$

Esto demuestra que

$$2 |b - f(w)| \geq \delta .$$

y por lo tanto $b - f(a) \notin B_{\delta/2}(w)$. Hemos demostrado entonces que

$$B_\delta(w) \cap C f(U) \subseteq C B_{\delta/2}(w) .$$

y de ésto

$$B_{\delta/2}(w) \subseteq f(U) \cup C B_\delta(w) .$$

Como

$$B_{\delta/2}(w) \cap C B_\delta(w) = \phi$$

Se deduce que

$$B_{\delta/2}(w) \subseteq f(U)\,.$$

y el teorema está demostrado.

Nota. En particular, $f(\Omega)$ es abierto en C. El anterior teorema es obviamente falso para las funciones $I\!R$-derivables de Ω en $I\!R$. Tómese por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^4}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1\,. \end{cases}$$

Entonces, $f(I\!R) = [\,0\,,\,\frac{1}{e}\,]$.

Teorema 1.9. (Principio del Máximo). *Sea Ω un abierto conexo de C, y sean $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, no constante, y*

$$M = \sup_{z \in \Omega} |\,f(z)\,|\,.$$

Entonces $|\,f(z)\,| < M$ para todo $z \in \Omega$.

Demostración. La afirmación es obvia si $M = +\infty$. Supongamos entonces $M < +\infty$. Sea $U = B_M(0)$. Es claro que $f(\Omega) \subseteq \bar{U} = \bar{B}_M(0)$, pero como $f(\Omega)$ es abierto, también $f(\Omega) \subseteq U$. Esto demuestra el teorema.

Corolario 1. Sea Ω un abierto conexo y acotado de C y sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, la cual es continua sobre $\bar{\Omega}$, tal que

$$|\,f(a)\,| = \sup_{z \in \bar{\Omega}} |\,f(z)\,|\,.$$

Entonces, si f *no es constante*, $a \in F_r(\Omega) = \bar{\Omega} - \Omega$. Por lo tanto

$$||\,f\,||_{\bar{\Omega}} = ||\,f\,||_{F_r(\Omega)}\,. \tag{1.6}$$

Demostración. Nótese en primer lugar que a existe, pues Ω es compacto. Además

$$|f(z)| \leq |f(a)|$$

para todo $z \in \Omega$. Por lo tanto, $a \in F_r(\Omega)$. Como

$$|f(a)| = \|f\|_{F_r(\Omega)} = \|f\|_\Omega$$

el corolario está demostrado.

Corolario 2. Sean Ω un abierto conexo de C, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si existe $a \in \Omega$ tal que $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo $z \in \Omega$, entonces f es constante.

Corolario 3. Sea Ω un abierto conexo de C. Entonces, para todo conjunto compacto $K \subseteq \Omega$,

$$\|f\|_K = \|f\|_{F_r(K)},$$

para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si

$$|f(a)| = \|f\|_K$$

y $a \in \overset{\circ}{K}$, entonces f es constante.

Nota. La relación (1.6) del corolario 1 es falsa si Ω no es acotado.

Ejemplo 1.1. Sea

$$\Omega = \{ (x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 , |y| < \frac{\pi}{2} \} .$$

Es fácil ver que $F_r(\Omega) = \{ (x,y) \mid y = \pm \pi/2 \}$. Sea $f(z) = e^{e^z}$. Entonces

$$f(x, \pm \frac{\pi i}{2}) = e^{\pm i e^x} ,$$

y por lo tanto

$$\| f \|_{F_r(\Omega)} = 1 .$$

Es fácil ver, sin embargo, que

$$\lim_{x\to\infty} | f(x) | = +\infty , \quad x \in \mathbb{R}_+$$

y por lo tanto que

$$\| f \|_{\overline{\Omega}} = +\infty .$$

2. Familias Normales .

El siguiente teorema es un resultado fundamental del análisis complejo. Definimos primero :

Definición 2.1. Sea $\mathcal{H} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_m)$. Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ se dice *normal* en $\mathcal{H}$ si satisface una de las dos condiciones siguientes : (1) De toda sucesión $\{ f_n \} \subseteq \mathcal{F}$ se puede extraer una subsucesión $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ la cual converge hacia $f \in \mathcal{H}$ uniformemente en compactos de Ω. (2) Si $\{ f_n \}$ es una sucesión en $\mathcal{F}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(a)| = +\infty$ para un punto $a \in \Omega$. entonces $\lim_{n\to\infty} \sup | f(x) | = +\infty$, para todo $x \in \Omega$.

Teorema 2.1. (Montel) . *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ y supóngase que para todo compacto $K \subseteq \Omega$ existe una constante $M_K > 0$ tal que*

$$\sup_{f\in} \| f \|_K \leq M_K \qquad (2.1)$$

Entonces $\mathcal{F}$ es normal en $\mathcal{O}(\Omega)$. Claramente, bajo las hipótesis del teorema, la condición de normalidad (2) no puede darse. Por otra par-

te, la condición (2.1) es equivalente a la siguiente : existe $M_K > 0$ tal que $\| f \|_K \leq M_K$ para toda $f \in \mathcal{F}$: es decir, $\mathcal{F}$ es una familia uniformemente acotada en compactos o, simplemente, acotada para la topología τ_C. Nótese también que la condición de normalidad (1) es equivalente a la afirmación de que $\mathcal{F}$ es relativamente compacta en $C(\Omega, \mathbb{R}_m)$.

Demostración del teorema 2.1. En efecto, si $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en compactos, demostraremos que $\mathcal{F}$ es continua. Para ver ésto, sea $a \in \Omega$. Entonces, para todo $z \in U$, U es una vecindad convexa de a, y toda $f \in \mathcal{F}$,

$$f(z) - f(a) = \int_\rho f'(t)\ dt ,$$

donde $\rho = [a, z]$. Se tiene entonces $(\bar{\rho} = Im\, \rho)$,

$$| f(z) - f(a) | \leq \sup_{t \in \bar{\rho}} | f'(t) | \int_\rho | dt | ,$$

o sea,

$$| f(z) - f(a) | \leq \sup_{t \in \bar{\rho}} | f'(t) | \, | z - a | ,$$

y esto, para toda $f \in \mathcal{F}$. Pero, si suponemos que $U = B_r(a)$ y que $B_r(a) \subseteq \Omega$, tomando $s > r$ tal que $\bar{B}_s(a) \subseteq \Omega$,

$$| f'(t) | \leq \frac{1}{2\pi} \int_{c_s(a)} \frac{| f'(u) |}{| u - t |} du \leq M_s \frac{s}{| r - s |} = M'_s .$$

donde $M_s > 0$ es tal que

$$\sup_{|z-a| = s} | f(z) | \leq M_s$$

para toda $f \in \mathcal{F}$. Si damos $\varepsilon > 0$ y tomamos

$$0 < \delta \leq \text{mín}\ \{ \varepsilon / M'_S\ , r \}\ .$$

se tiene entonces

$$| f(z) - f(a) | \leq \varepsilon$$

para todo $f \in \mathfrak{F}$ y todo z tal que $|z-a| \leq \delta$, lo cual prueba la equicontinuidad de $\mathfrak{F}$. Por otra parte, es claro que para todo $z \in \Omega$ existe $M_z > 0$ tal que

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}} | f(z) | < M_z\ .$$

Las condiciones del teorema de Ascoli-Arzelá están entonces dadas. Esto demuestra el teorema.

Ejercicios

1. Demuestre que las siguientes series tienen radio de convergencia 1 :

$$\sum_{n=o}^{\infty} z^n\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

Demuestre que la primera diverge en todo punto de $S_1(0) = \{ z \mid |z| = 1 \}$, que la segunda converge en $S_1(0) - \{1\}$, y que la tercera converge en $S_1(0)$

2. Demuestre que $\sum\limits_{n=o}^{\infty} z^n$ no converge uniformemente en $B_1(0)$.

3. Demuestre que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!} z^{n+1}$ converge uniformemente en $B_1(0)$, mientras que la serie derivada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ no converge uniformemente en $B_1(0)$.

4. Si $\sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n (z-a)^n$ tiene radio de convergencia $\rho > 0$, cuál es el radio de convergencia de las series

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n(z-a)^{2n} \ , \ \sum_{n=o}^{\infty} a_{2n}(z-a)^n \ , \ \sum_{n=o}^{\infty} a_n^2 (z-a)^n \ ?$$

5. Cuál es el desarrollo de Taylor, en la vecindad de $a = 0$, de $f(z) = e^z$. Cuál es su radio de convergencia ? Cuál el desarrollo de Taylor de

$$f(z) = (1+z)^n \ , \ n \geq 0 \ , \ n \in \mathbb{N} \ ,$$

alrededor de $z=0$? Cuál es su radio de convergencia ? Cuál el desa - rrollo de

$$f(z) = (1+z)^n \ , \ |z| < 1 \ , \ n < 0 \quad n \in \mathbb{Z} \ ,$$

en la vecindad de $z=0$.

6. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} \qquad |x| < 1$$

$$f(x) = 0 \qquad , \qquad |x| \geq 1$$

Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $(f^{(n)}$ denota a la $\mathbb{R}$-derivada de orden n de $f)$:

$$g(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(1) \ (x-1)^n$$

Qué es g? Calcule $A = \{x \mid g(x) = f(x)\}$. Qué se puede decir del desarrollo de Taylor de una función $f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω abierto en $\mathbb{R}$, la cual admita $\mathbb{R}$-derivadas de cualquier orden ?

7. Una función $f: \Omega \to C$, Ω abierto en C ó $\mathbb{R}$, se dice $\mathbb{R}$-analítica (analítica real), si para todo punto $a \in \Omega$ existen una vecindad abier - ta U de $a = (a_1, a_2)$ en Ω y una serie de potencias

$$\sum_{\substack{n_1=0\\ n_2=0}}^{\infty} a_{n_1 n_2}(x-a_1)^{n_1}(y-a_2)^{n_2}, \quad a_n \in C, \quad n_2=0 \quad \text{si} \quad \Omega \subseteq I\!R,$$

la cual converge a f en todo punto $k \in U$. Demuestre que la serie $S_U(x,y)$ converge uniforme y absolutamente en todo compacto k de U. Demuestre que si $\Omega \subseteq I\!R$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-a)^{n-k}, \quad f^{(n)}(a) = n!\, a_n$$

para todo $x \in U$ y que la convergencia es uniforme en compactos de U. Demuestre además que la serie $\sum a_n (z-a)^n$ converge a f en $(a-d, a+d)$, donde $d = d(a, C\Omega)$, y que la convergencia es absoluta y uniforme en compactos de dicho conjunto. Sea $A \subseteq \Omega$. Demuestre que si A tiene un punto de acumulación en Ω, que si $f|A=0$, y que si Ω es conexo, $f=0$ en Ω. Suponga que $f: \Omega = I\!R$. Qué se puede decir de los a_n? Es f una aplicación abierta de Ω en $I\!R$ cuando f no es constante? Vale el principio del máximo? Qué acerca del teorema de Montel? Demuestre que si $f: \Omega \to C$ es $I\!R$-analítica, Ω abierto en $I\!R$, existen un abierto Ω' de C y una función C-analítica $\hat{f}: \Omega' \to C$, tales que

$$\Omega' \cap R = \Omega,$$
$$\hat{f} \mid \Omega = f.$$

8. Sea $f \in \mathcal{O}(B_R(0))$, y supóngase que

$$f(x) \in I\!R$$

para todo $x \in (-R, R)$. Demuestre que los coeficientes de Taylor de f en $a=0$ son todos reales y que

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}, \qquad z \in B_R(0).$$

Concluya que si $z \in B_R(0)$ y $f(z) = 0$, también $f(\bar{z}) = 0$. Si además $f(ix) \in i\mathbb{R}$ para todo $x \in (-R, R)$, demuestre que

$$f(-z) = -f(z)$$

para todo $z \in B_R(0)$.

9. Sean $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $a \in \Omega$, $R > 0$ tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \quad z \in B_R(a) .$$

Demuestre que para todo $0 < r < R$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(a + re^{i\theta}) |^2 \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} | a_n |^2 \, r^{2n} .$$

10. Sea $f \in \mathcal{O}(C)$ y suponga que existen $M > 0$, $\lambda > 0$, tales que

$$| f(z) | \leq M (1 + | z |^{\lambda})$$

para todo $z \in C$. Demuestre que f es un polinomio de grado $n = [\lambda] =$ mayor número natural $\leq \lambda$.

11. Sea $f \in \mathcal{O}(C)$. Demuestre que si $|f| \geq 1$ entonces f es constante.

12. Sea $f \in \mathcal{O}(C)$. Demuestre que si $Re f$ es constante, f es constante. Que si $Im f$ es constante, f es constante. Que si $Re f \leq 0$, f es constante. Que si $Im f \leq 0$, f es constante. Si $Im f(z) \neq 0$ para todo $z \in C$, f es constante. Si $Re f(z) \neq 0$ para todo $z \in C$, f es constante.

13. Sea Ω un abierto conexo de C y sea $a \in \Omega$. Suponga que existe $\varepsilon > 0$ con $\bar{B}_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$, y tal que so $\rho = c_\varepsilon(a)$ entonces

$$\int_{\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^n}\, dz = 0 \quad , \qquad n \in \mathbb{N} .$$

Demuestre que $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

14. Sea Ω un abierto conexo de C . Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \neq 0$, $Z = \{ z \mid f(z) = 0\}$.

(i) Demuestre que Z no tiene puntos de acumulación en Ω .

(ii) Si K es un subconjunto compacto de Ω , $K \cap Z$ es finito.

(iii) Z es a lo más enumerable.

15. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \quad , \qquad |x| < 1 ,$$

$$f(x) = 0 \quad , \qquad |x| \geq 1 .$$

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x)$ existe. Demuestre que f no puede ser $\mathbb{R}$-analítica.

16. Sea $U = B_1(0)$, y suponga que $f, g \in \mathcal{O}(U)$ y que $f(z) \neq 0$, $g(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. Demuestre que si

$$\frac{f'}{f}(1/n) = \frac{g'}{g}(1/n)$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces existe una constante $c \in C$ tal que

$$f(z) = c\, g(z)$$

para todo $z \in U$.

17. Supóngase que $f \in \mathcal{O}(U)$, $U = B_R(0)$, está dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \qquad z \in U .$$

Sea
$$S_n(z) = \sum_{k=o}^{n} a_k z^k .$$

Si $0 < r < R$, y si $|z_o| < r$, demuestre que

$$S_n(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{f(z)}{z^{n+1}} \left(\frac{z^{n+1} - z_o^{n+1}}{z - z_o}\right) dz ,$$

donde $\rho = c_r(0)$.

18. Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $0 \in \Omega$, y supóngase que $\overline{B}_1(0) \subseteq \Omega$.

Demuestre que

$$(1 - |z_o|^2)\, f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_o f(z) \frac{1 - z z_o}{z - z_o} dz ,$$

donde $\rho = c_1(0)$. Concluya que

$$(1 - |z_o|^2 \,|f(z_o)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta .$$

19. Sea $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$, y supóngase que $0 \in \Omega$, $\overline{B}_{R_1}(0) \subseteq \Omega$, $\overline{B}_{R_2}(0) \subseteq \Omega$.
Sea $\rho = c_{R_1}(0)$, y supóngase que

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n , \quad g(z) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n .$$

la primera para $z \in B_{R_1}(0)$, la segunda para $z \in B_{R_2}(0)$. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{f(z)}{z} g\left(\frac{z_o}{z}\right) dz = \sum_{n=o}^{\infty} a_n b_n z_o^n .$$

para $|z_o| < R_1 R_2$.

20. Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Bajo qué condiciones puede $|f|$ tener un mínimo local en Ω ? .

21. Sea Ω un abierto conexo y acotado de C. Sea $\{f_n\} \subseteq C(\Omega)$, tal que $f_n | \Omega \in \mathcal{O}(\Omega)$ para todo $n \geq 1$. Supóngase que $f_n \to f \in C(\bar{\Omega})$, uniformemente en $F_r(\Omega)$, puntualmente en Ω. Demuestre que $f_n \to f$ uniformemente en compactos de Ω y que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

22. Supóngase que Ω es un conjunto abierto, conexo y acotado, que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, y que

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f(z_n)| \leq M .$$

para toda sucesión $z_n \in \Omega$, $z_n \to z \in F_r(\Omega)$. Demuestre que

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq M .$$

23. Sea Ω un abierto conexo de C, $D = B_r(a) \subseteq \Omega$. Supóngase que f es no constante y que $|f|$ es constante en $F_r(D)$. Demuestre que f se anula en al menos un punto de D. Demuestre además que existe $z_o \in \mathring{D}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(z_o + (z-z_o)^n)$$

es analítica en una vecindad de z_o.

24. Sea $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ la cual converge hacia $f: \Omega \to C$ en todo punto $z \in \Omega$. Demuestre que existe un subconjunto abierto $\Omega' \subseteq \Omega$, denso en Ω, tal que $f \in \mathcal{O}(\Omega')$. (Indicación : use el teorema de Baire para demostrar que si $\psi = \sup |f_n|$, para toda bola $B \subseteq \Omega$, existe $B' \subseteq B$ tal que $\psi | B'$ es acotada en B').

25. Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Demuestre que $f_1 = Re(f)$ y $f_2 = Img(f)$ son $\mathbb{R}$-ana-

líticas.

26. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica. Demuestre que f es $\mathbb{R}$-analítica.

27. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ armónica. Demuestre que f es $\mathbb{R}$-analítica.

28. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Se define el límite inferior de a_n por

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k$$

Sea $-\infty \leq a \leq +\infty$. Demuestre que

$$a = \lim_{n\to\infty} \inf a_n$$

sí y sólo si existe una subsucesión a_{n_k} de a_n tal que

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a\ ,$$

y que ningún $b < a$ cumpla esta condición. Suponga ahora que $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que $a = \lim_{n\to\infty} \inf a_n$ si y sólo si

(i) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_m > a - \varepsilon$ para todo $m \geq n$.

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \geq n$ tal que

$$a_m < a + \varepsilon\ .$$