Boletín de Matemáticas
Volumen X (1976), págs. 28 - 47

TEORIA DEL CONTROL (*)

ALFONSO TOCANCIPA

Prefacio

Dar una idea, en pocas líneas, sobre la teoría del control no es tarea fácil . Me propongo simplemente sugerir algunos aspectos de ésta, tratar un par de ejemplos y por último, presentar una demostración del llamado principio del máximo de Pontryagin.

El principio del máximo, establecido en 1956 por el matemático ruso L. Pontryagin, fue conocido a través de una serie de artículos excepcionalmente bien escritos por L. Rozonoer en 1959. Es muy semejante al "principio de mínima acción" de la mecánica analítica, como lo observará quien tenga alguna familiaridad con el formalismo de Hamilton y Jacobi.

La demostración del principio que aquí se presenta, ha sido tomada de "actes du congres d'automatique théorique" reunido en Sanclay (Francia) en Mayo de 1965.

(*) Texto de la conferencia dictada por el autor en el V Coloquio Colombiano de Matemáticas, Medellín 1975. N. del E.

1. Introducción.

No es del todo irrazonable sugerir que el hombre ha girado, en buena parte, alrededor de la idea de controlar a lo largo de toda su historia. Probablemente, mucho antes de la aparición de la historia escrita ya se conocían rudimentarios mecanismos de control (de riego, por ejemplo). Se investiga y se experimenta con el anhelo de conocer y así establecer medios para influenciar o controlar procesos de la más variada naturaleza. No es otro el objetivo final de la ciencia.

La invención del regulador automático de velocidad de las máquinas a vapor de James Watt, hacia mediados del siglo XVIII, es citada como la primera aparición del control automático. A partir de entonces, el control automático hace algunos progresos. En 1868 es presentado el primer tratamiento matemático de un mecanismo de control "On governors". Su autor J. C. Maxwell es bien conocido por su trabajo en teoría de campos.

En este siglo, durante los años veinte y treinta, hubo importantes desarrollos en áreas como la teoría de circuitos, la electrónica y el control de procesos químicos. En 1934 H. L. Hazen publica un libro titulado "Theory of Servomechanism", obra que puede ser considerada como el primer esfuerzo serio por el desarrollo de una teoría general del control automático. Una publicación que ha de ser considerada como fundamental, por el establecimiento de modelos matemáticos y analogías de los procesos de control, es "Mathematics of Surge Vessel and Automatic Control" de C. E. Mason, escrita en 1941.

El establecimiento definitivo del control como ciencia se puede situar durante la segunda guerra mundial. Resultado natural del esfuerzo por desarrollar nuevos y más precisos mecanismos que asegurasen la superioridad técnica. Las características dinámicas de los dispositivos de "alta efectividad" propuestos entonces, hicieron necesaria la creación de una teoría completamente nueva. Sus características se hicieron conocidas una vez que los velos del secreto fueron levantados después de 1945. Los años entre 1945 y 1950 se caracterizaron por el esfuerzo para consolidar los avances recién logrados.

Viene luego la apertura hacia nuevas áreas de aplicación ; la economía, la biología y la navegación aeroespacial entre ellas. No se puede omitir, por supuesto, la entrada en escena de los computadores y de las técnicas de simulación. Al punto que hoy no se puede concebir estudiar o investigar en el área del control sin el auxilio de adecuados servicios de simulación y computación.

El enorme número de libros y monografías publicado sobre el tema del control, impide hacer siquiera un breve sumario sobre el estado de cosas. Cabe, sin embargo, mencionar que las iniciativas de investigación han sido, en su mayoría, tomadas por matemáticos aplicados. Algo muy explicable si se tiene en cuenta que la teoría de control moderna, ofrece numerosos problemas que hacen las delicias del matemático. Así se han logrado preciosos tratamientos del tema y el desarrollo de un lenguaje formal apropiado, pero como resultado, muy lamentable por cierto, se ha hecho dificilmente accequible para los ingenieros de control.

2. Sistemas de Control.

Uno de los aspectos más atractivos de la teoría del control es su aplicabilidad a procesos de tipo general. Entenderemos por proceso algún movimiento o acción que tenga lugar a medida que el tiempo transcurre. En general tendremos a considerar una "planta" o "sistema", cuyo estado se describe por un punto en un espacio usualmente llamado espacio de fase.

Sobre el sistema se formulará una estructura que permitirá, una vez se especifique una "política de control", determinar el curso posterior del proceso en base al conocimiento del estado previo del sistema. Dicha estructura será llamada la *dinámica*. Una política de control, o simplemente un control que determina el comportamiento dinámico pertenecerá a un conjunto dado de funciones del tiempo. Conjunto cuya naturaleza no es preciso definir aún. Sin embargo insistiremos en que, a cada punto del espacio de fase corresponda una "trayectoria" bien determinada en dicho espacio, para cada control admisible.

Otro elemento requerido en la formulación del problema general de control es un *objetivo* . Esto es, la especificación de ciertos requisitos que el proceso ha de satisfacer a través de la adecuada escogencia de un control. Un objetivo suele ser un subconjunto del espacio de fase, conjunto que en ocasiones varía con el tiempo.

Surge entonces una inquietud muy natural ; ¿ son los medios disponibles suficientes para lograr que el proceso alcance el objetivo especificado ? Si tales medios existen, la estructura de control ha sido apropiadamente formulada. Considérese el conjunto de todos los estados alcanzables, a partir de un cierto estado, mediante la aplicación de las diferentes políticas de control disponibles . Dicho conjunto se llama *conjunto alcanzable* del proceso, relativo al estado inicial específico. Si un estado del conjunto objetivo se encuentra en el conjunto alcanzable, relativo al estado presente, el proceso es controlable.

Usualmente un proceso es controlable en varias formas. Dentro del conjunto de políticas de control que satisfacen un objetivo, es deseable escoger la "mejor" con respecto a un criterio de comportamiento. *Un problema de control óptimo* pretende seleccionar el mejor control, con respecto a un criterio dado, entre aquellos que hacen satisfacer un objetivo al proceso.

Ejemplo 1.

Considérese un tranvía que ha de ser llevado a una determinada estación. Supóngase que está dotado de dos motores iguales que actúan en sentidos contrarios y que son utilizados tanto para acelerar como para frenar.

Dentro de la formulación del problema general de control podemos identificar al tranvía con este sistema. Nos interesa su posición y su velocidad con respecto a la estación que ha de ser llevado, luego describiremos su estado por la pareja $(x,v) \in \mathbb{R}^2$ distancia a la estación y velocidad respectivamente.

Si convenimos despreciar las fuerzas de rozamiento y demás detalles, la segunda ley de Newton nos permite formular la dinámica del sistema

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = u$$

donde u es la fuerza ejercida por los motores. Esta fuerza, naturalmente, será limitada, asumamos entonces que $-1 \leq u \leq 1$. Luego resulta muy natural escoger como conjunto de controles admisibles a las funciones continuas a trozos definidos sobre un intervalo cualquiera $[t_o, t_1]$ $u=u(t)$ $t \in [t_o, t_1]$ tales que $-1 \leq u \leq 1$. Finalmente, es claro que el objetivo del problema es $\{(0,0)\}$.

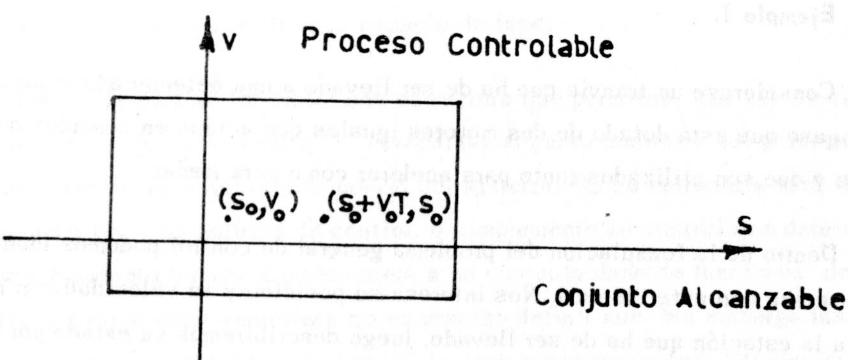
Supongamos que la única limitación es la duración de viaje. En esas condiciones, el conjunto alcanzable relativo al estado inicial (s_o, v_o) será el rectángulo :

$$v_o - T \leq v \leq v_o + T$$

$$s_o + v_o T - T^2/2 \leq s_o \leq s_o + v_o T + T^2/2$$

donde T es la máxima duración de viaje permitida.

Así, el proceso es controlable si y sólo si el punto $(0,0)$ está en dicho rectángulo.



El problema de escoger el mejor control según un criterio de comportamiento dado ofrece varios aspectos interesantes. A la teoría del control óptimo corresponde, entre otras, estudiar bajo qué condiciones un proceso cuenta con un control óptimo. Se conocen numerosas proposiciones que garantizan dicha existencia. También podríamos preguntarnos : ¿ Si existe un control óptimo, qué propiedades debe satisfacer ? El principio del máximo de Pontryagin es precisamente una respuesta a este tipo de interrogante.

Veamos como influyen las condiciones de un problema dado en la existencia de un control óptimo. Regresemos a nuestro ejemplo del tranvía; aquí podríamos pensar en varios criterios diferentes de comportamiento. Tomemos como criterio la cantidad de combustible utilizada en el viaje, por ejemplo. Para medir la cantidad de combustible consumido emplearemos la funcional

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda_1 \left| u(t) \right| dt \qquad (\lambda_1 = cte \geq 0)$$

donde $u(t)$ es el control que llevará al tranvía a la estación. Es claro que el mejor control será el que menos combustible gaste.

Después de analizar un poco el problema llegamos a la siguiente conclusión :

i) Si el estado inicial es (x_o, v_o) y $x_o v_o \geq 0$ con $x_o \neq 0$, no existe óptimo.

ii) Pero si $x_o v_o < 0$, cualquier control que frene al tranvía justo en $x_o = 0$ sin acelerar, es óptimo.

Otra funcional que podríamos tratar de minimizar podría ser :

$$\int_{t_o}^{t_1} \lambda_2 u^2(t)\, dt \qquad (\lambda_2 = ctc \geq 0).$$

Esta corresponde a una estimación del desgaste sufrido por el equipo debido a las aceleradas o a las frenadas. En este caso tendremos que, a partir de $(x_o, v_o) \neq (0,0)$, dado un control, que lleve al tranvía a la estación, siempre habrá uno mejor.

Pero si utilizamos como criterio de comportamiento la cantidad de tiempo empleado en ir de (x_o, v_o) a $(0,0)$ es decir :

$$\int_{t_o}^{t_1} dt$$

el resultado es bien diferente. La estrategia a seguir sería acelerar y luego frenar al máximo, es decir, $|u(t)| = 1$. Por lo tanto, siempre tendremos un control óptimo único.

Debemos agregar que resultaría quizás mas natural emplear como funcional de "costo" una que pondere los tres factores. Una funcional de éstas tomaría la forma :

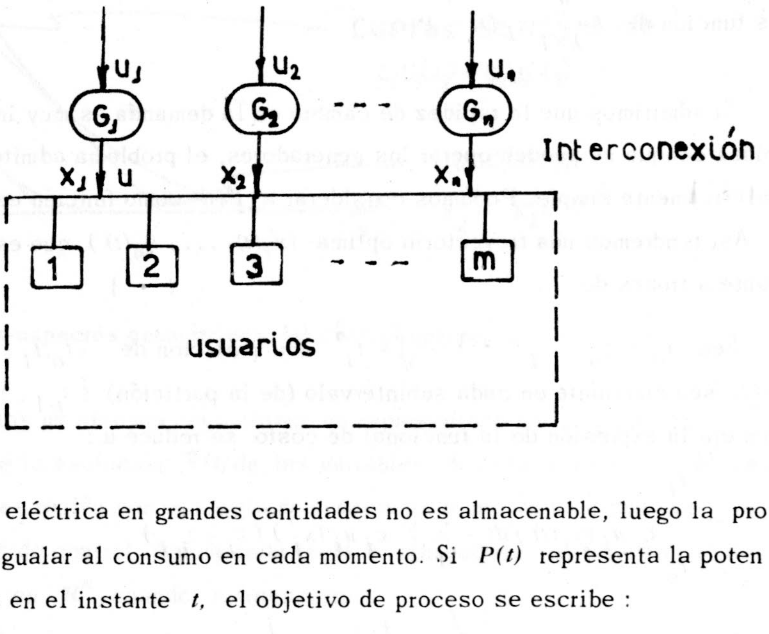
$$\int_{t_o}^{t_1} (\lambda_o + \lambda_1 |u(t)| + \lambda_2 u^2(t))\, dt \qquad \lambda_o + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 .$$

Claro, aquí la intuición ya no basta para hacer afirmaciones sobre la optimalidad de un control, se requiere desarrollar un instrumental matemático apropiado.

Ejemplo 2. Estudiaremos el caso de una compañía que suministra energía eléctrica a un gran número de usuarios. Su sistema consiste de una red de distribución a la que suministran energía n generadores $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

El estado del sistema será descrito por el vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ donde x_k representa la potencia que el generador G_k está entregando.

El sistema es controlado por la potencia suministrada al generador k para que opere u_k. Debido al tipo de combustible usado, a las características de diseño o a la longitud de las líneas de transmisión, el costo de operación difiere de un generador al otro. La potencia u_k que ha de suministrarse al generador k podemos considerarla función de la potencia eléctrica x_k que suministra $u_k = u_k(x_k)$ $k = 1, \ldots, n$.



La energía eléctrica en grandes cantidades no es almacenable, luego la producción debe igualar al consumo en cada momento. Si $P(t)$ representa la potencia demandada en el instante t, el objetivo de proceso se escribe :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = P(t) .$$

Sea c_k el valor del kilowatio-hora de suministro del generador k. Entonces el valor de la energía eléctrica entregada durante el intervalo $[t_o, t_1]$ por el generador k es :

$$\int_{t_o}^{t_1} c_k u_k(x_k(t))\, dt \qquad k = 1, \ldots, n .$$

Luego la compañía eléctrica desea entregar la potencia requerida en cada instante, de manera que minimice la funcional :

$$\int_{t_o}^{t_1} \{ \sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i\,(x_i(t)\,)\,\}\,dt\,.$$

El objetivo del sistema es, en este caso, una subvariedad lineal de $\mathbb{R}^n$ que es función de t $\sum_{k=1}^{n} x_k(t) = P(t)$.

Si admitimos que la rapidez de cambio en la demanda es muy inferior a la rapidez conque se pueden operar los generadores, el problema admite una solución relativamente simple. Podemos considerar a $P(t)$ como función escalonada de t. Así tendremos una trayectoria óptima $(x_1(t), \ldots, x_n(t)\,)$ que es función constante a trozos de t .

Sea $t_o = \tau_o < \tau_1 < \cdots < \tau_n = t_1$ una partición de $[t_o, t_1]$ tal que $P(t)$ sea constante en cada subintervalo (de la partición) $[\tau_{j-1}, \tau_j]$. De esta manera la expresión de la funcional de costo se reduce a :

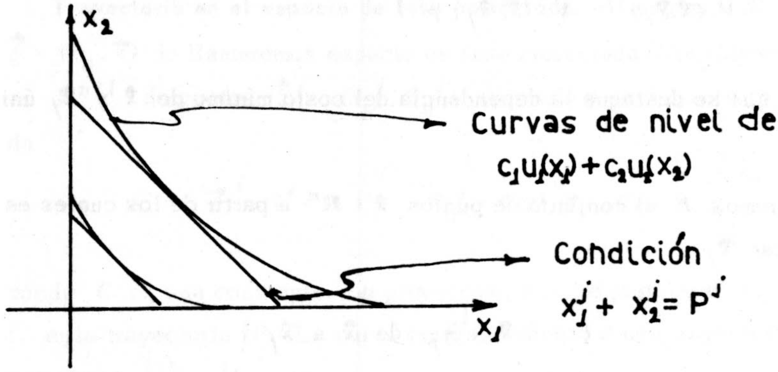
$$\sum_i \int_{t_o}^{t_1} c_i\, u_i\,(x_i(t)\,)\,dt = \sum_j \sum_i c_i\, u_i\,(x_i^j\,)\,(\,\tau_j - \tau_{j-1}\,)$$

Luego si escogemos $\vec{x}_i^j = (x_1^j, \ldots, x_n^j\,)$ de tal manera que $\sum c_i\, u_i(x_i^j\,)$ sea mínimo $(j = 1, \ldots, n)$ y $\sum_i x_i^j = P(t)$ $\tau_{j-1} < t < \tau_j$, el control será óptimo .

Se trata en resumen de minimizar una función $f(\vec{x}) = \sum_i c_i\, u_i\,(x_i^j\,)$ son $\vec{x}$ restringido por $g(\vec{x}) = \sum x_i - P = 0$. Si u_i es función continuamente derivable de x_i , el método de los multiplicadores de Lagrange nos dice que sobre ese mínimo $\nabla f = \lambda \nabla g$, es decir

$$(\,c_1 \frac{d u_2}{d x_1}\,, \ldots,\; c_n \frac{d u_n}{d x_n}\,) = \lambda\,(1,\,1,\,\ldots,\,1)$$

Ahora $c_k \dfrac{d u_k}{d x_k}$ representa el costo adicional de producción de un $k\,w$ en el generador k. Luego la estrategia a seguir por la compañía consiste en redistribuir la potencia entre los generadores de tal manera que los costos incrementales sean iguales.



3. Algunos aspectos geométricos del control óptimo.

Consideremos un sistema cuyo estado es representado por un punto en $\mathbb{R}^n$. Recordemos que la evolución $\vec{x}(t)$ de las variables de estado, en cuanto el tiempo transcurre, es regido por una regla perteneciente a un conjunto dado de reglas o políticas de control. Así, a cada regla r corresponde un trayecto p descrito por $\vec{x}(t)$ en $\mathbb{R}^n$ cuando t transcurre.

Nos interesamos por el problema de transferir el sistema de un estado $\vec{x}$ cualquiera a un punto $\vec{x}_f$ dado del espacio de fase. En general, algunos controles transferirán el sistema de $\vec{x}$ a $\vec{x}_f$ y a otros corresponden trayectorias que nunca pasan por $\vec{x}_f$.

Tomemos ahora una funcional V que asocie a cada trayecto p, correspondiente a un control admisible r, un número real $V(\vec{x}, \vec{x}_f, p)$. Este número será llamado costo de la transferencia. Diremos que la regla r^* es óptima si el trayecto correspondiente p^* sale de $\vec{x}$, termina en $\vec{x}_f$ y $V(\vec{x},\vec{x}_f, p^*) \leq V(\vec{x},\vec{x}_f, p)$ para cualquier otro control admisible r.

Un control óptimo no necesariamente es único, sin embargo el costo mínimo sí lo es. En consecuencia se puede escribir :

$$V^*(\vec{x},\vec{x}_f) = V^*(\vec{x}, \vec{x}_f, p^*)$$

de manera que se destaque la dependencia del costo mínimo de $\vec{x}$ y $\vec{x}_f$ únicamente.

Llamaremos E al conjunto de puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ a partir de los cuales es posible alcanzar $\vec{x}_f$

$$E = \{ \vec{x} : \exists_p \text{ de } \vec{x} \text{ a } \vec{x}_f \}$$

Al conjunto de puntos $\vec{x}$ que pueden ser llevados a $\vec{x}_f$ por una trayectoria óptima lo denotaremos E^*.

Principio de Optimalidad. Sea p una trayectoria de $\vec{x}$ a $\vec{x}_f$. Si $\vec{x}^i$ es un punto sobre p, resulta razonable suponer que :

i) $V(\vec{x}, \vec{x}_f, p) = V(\vec{x}, \vec{x}_i, p_f) + V(\vec{x}_i, \vec{x}_f, p)$

(aditividad de la funcional de costo)

ii) $\lim\limits_{\vec{x}_i \to \vec{x}_f} V(\vec{x}_i, \vec{x}_f, p) = 0$

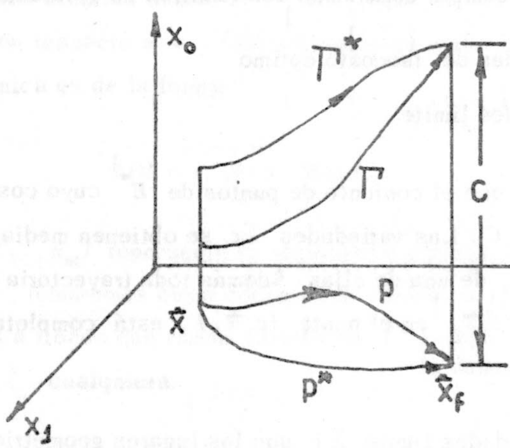
Lema 1 : Sean p^* una trayectoria óptima de $\vec{x}$ a $\vec{x}_f$ y $\vec{x}_i, \vec{x}_j$ dos puntos sobre p^*. Entonces p^*, la trayectoria p^* restringida a ir de $\vec{x}_i$ a $\vec{x}_j$, es óptima.

La demostración de este lema es muy sencilla, pero el lema es de gran utilidad. Es conocido como el principio de optimalidad. En otras palabras dice que todo segmento de una trayectoria óptima es también una trayectoria óptima. Permite resolver un problema de control óptimo por trozos, como implícitamente fue hecho en el ejemplo 2.

Trayectoria en el espacio de fase aumentado. Al espacio $\mathbb{R}^{n+1}$ de puntos $\vec{\xi} = (x_o, \vec{x})$ lo llamaremos espacio de fase aumentado. Consideremos la curva Γ en $\mathbb{R}^{n+1}$ de puntos $\vec{\xi}^{\,i} = (x_o^{\,i}, \vec{x}_o^{\,i})$ asociada a un trayecto p en $\mathbb{R}^n$ definida

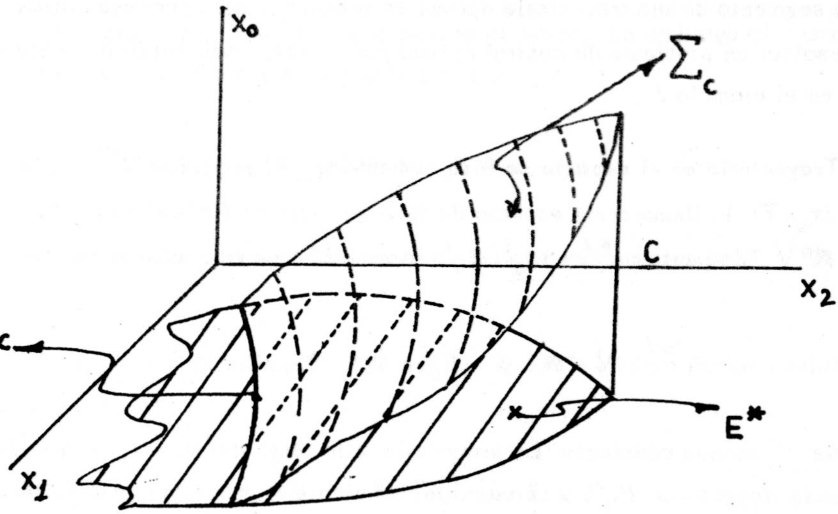
$$\Gamma = \{ \vec{\xi}^{\,i} : \vec{x}^{\,i} \in P \quad \text{y} \quad \vec{x}_o^{\,i} + V(\vec{x}^{\,i}, \vec{x}_f, P) = C \}$$

donde C es una constante. La proyección a lo largo del eje x_o sobre $\mathbb{R}^n$ de Γ es la trayectoria P. La curva correspondiente a una trayectoria óptima la denotaremos Γ^*



$$\Gamma^* = \{ \vec{\xi}^{\,i} : x_o^{\,i} + V^*(\vec{x}^{\,i}, \vec{x}_f) = C \quad \text{y} \quad \vec{x}^{\,i} \in P^* \}$$

Definamos sobre E^* la función $F(\vec{x}) = V^*(\vec{x}, \vec{x}_f)$. La ecuación $x_o + F(\vec{x}) = C$ (C = cte) define en $\mathbb{R} \times E^*$ una variedad Σc de dimensión n de una sola hoja. El lugar geométrico Sc de los puntos $\vec{x} \in E^*$ tales que $F(\vec{x}) = C$ es, en general, una variedad de dimensión $n\text{-}1$.



Cuando el valor de C cambia obtenemos dos familias de variedades :

$\{ Sc \}$ las variedades de isocosto óptimo

$\{ \Sigma c \}$ las variedades límite.

Sc no es otra cosa que el conjunto de puntos de E^* cuyo costo mínimo de transferencia a $\vec{x}_f$ es C. Las variedades Σc se obtienen mediante translaciones paralelas al eje x_o de una de ellas. Además toda trayectoria óptima Γ^* que encuentre a la recta $\mathbb{R} \times \vec{x}_f$ en el punto $(c, \vec{x}_f)$, está completamente contenida en Σc. Luego tenemos el

Lema 2. Las variedades límite Σc son los lugares geométricos de las trayectorias óptimas Γ^*.

Es claro que una trayectoria óptima que tenga un punto sobre una variedad Σc, está completamente contenida en esa variedad.

Una variedad Σc separa $\mathbb{R} \times E^*$ en dos regiones abiertas $S/\Sigma c$ (sobre Σc) y $B/\Sigma c$ (bajo Σc) definidas

$$S/\Sigma c = \{ \vec{\xi} : \vec{\xi}_o > C - F(\vec{x}) , \vec{x} \in E^* \}$$

$$B/\Sigma c = \{ \vec{\xi} : \vec{\xi}_o < C - F(\vec{x}),\ \vec{x} \in E^* \}$$

Un punto ξ en $S/\Sigma c$ (en $B/\Sigma c$) será llamado puntos de tipo S (tipo B) con respecto a Σc.

Tenemos, en fin, la proposición fundamental.

Teorema 1. *Una trayectoria Γ que salga de un punto de Σc, no puede tener puntos de tipo B con respecto a Σc.*

Este teorema expresa el carácter de frontera de las variedades Σ. Una variedad Σ pertenece a la frontera de la región que contiene los puntos sobre trayectorias salidas de Σ.

Dinámica de la forma $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u})$. Sea $\vec{f}_1 = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ un campo vectorial continuo definido sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, que supondremos continuamente diferenciable con respecto a x. Consideremos de ahora en adelante los sistemas cuya dinámica es de la forma :

$$\dot{\vec{x}}(t) = f_1(\vec{x}(t),\ \vec{u}(t))$$

Aquí $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)$ representa la variable de control. Sea U un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^m$, tomaremos como conjunto de controles Ω todas las funciones $\vec{u}(t)$ continuas a trozos que toman valores en U y están definidas sobre un intervalo $[t_o, t_1]$ cualquiera.

Dadas estas condiciones podemos afirmar que, para un control específico $\vec{u} = \vec{u}(t)$, el problema de valor inicial

$$\dot{\vec{x}} = f_1(\vec{x}, \vec{u}) \qquad \vec{x}(t_o) = \vec{x}_o$$

tiene solución única cualquiera que sea $\vec{x}_o{}^+$. Luego se trata de una estructura dinámica apropiadamente definida.

Funcional de costo en forma de integral. Sea f_o una función continua de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}$. Entonces, la integral

$$\int_{t_o}^{t_1} f_o(\vec{x}(t), \vec{u}(t))\, dt$$

asigna a cada trayectoria $\vec{x}(t)$ que sigue un control $\vec{u}(t)$ un real único. Es obvio que el principio de optimalidad vale cuando la funcional de costo tiene forma de integral.

La coordenada x_o sobre una trayectoria Γ en el espacio de fase aumentado satisface

$$x_o(t) = C - \int_{t}^{t_1} f_o(\vec{x}(t), \vec{u}(t))\, dt$$

Luego

$$\frac{dx_o}{dt} = f_o(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$$

Relación que nos permite escribir :

$$\dot{\vec{\xi}} = f(\vec{\xi}, \vec{u})$$

Donde $f(\vec{\xi}, \vec{u}) = (f_o(\vec{x}, \vec{u}), \vec{f}_1(\vec{x}, \vec{u}))$. Nótese que $\vec{f}$ es independiente de x_o.

Hamiltoniano del sistema. Supongamos que la función f_o tenga derivadas parciales continuas con respecto a $x_1, \ldots, x_n$. Sea

$$A(t) = D_{\xi}\vec{f}\,\Big|_{(\vec{x},\vec{u}) = (\vec{x}(t), \vec{u}(t))} \qquad u(t) \in \Omega$$

donde $D_{\xi} \vec{f} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \; 0 \leq i, j \leq n$ es la matriz Jacobiana de $\vec{f}$ con respecto a $\vec{\xi}$.

Consideremos ahora el sistema de ecuaciones lineales

$$\dot{\vec{\psi}}(t) = -A^T(t) \; \vec{\psi}(t)$$

donde $\vec{\psi}$ representa un vector columna con $n+1$ componentes. El sistema tiene solución única para todo problema de valor inicial $\vec{\psi}(t_o) = \vec{\psi}_o$. La solución puede escribirse

$$\vec{\psi}(t) = E_{-A^T}(t) \; \vec{\psi}_o$$

$E_{-A^T}(t)$ es una matriz no singular de orden $(n+1) \times (n+1)$ para todo t en $[t_o, t_1]$.

Sea $\vec{\xi}(t)$ una trayectoria en $\mathbb{R}^{n+1}$ correspondiente a un control $\vec{u}(t)$. Definimos

$$H(\vec{\psi}, \vec{\xi}) = < \vec{\psi}, \dot{\vec{\xi}} > = \sum_i \psi_i \; f_i(\vec{x}, \vec{u})$$

H es llamado el hamiltoniano del sistema, $\vec{\psi}(t)$ y $\vec{\xi}(t)$ satisfacen :

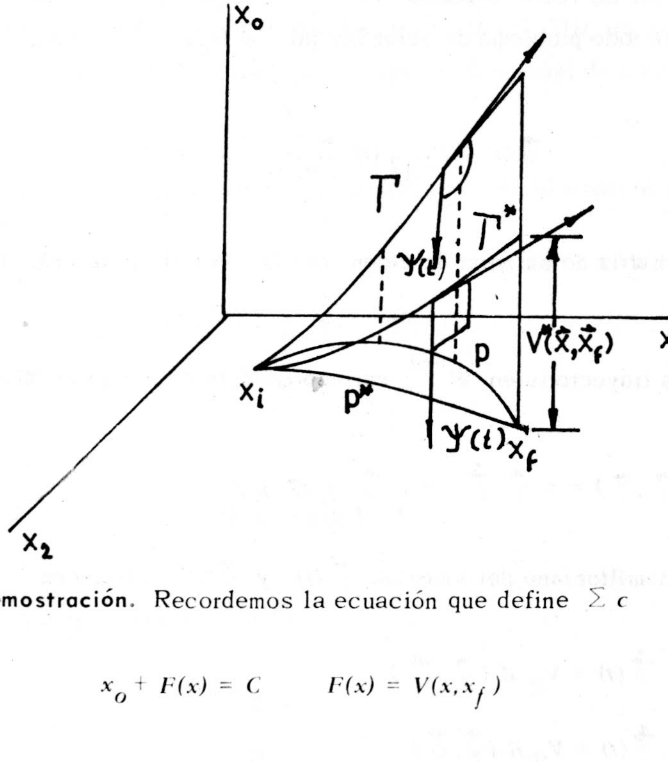
$$\dot{\vec{\psi}}(t) = \nabla_{\xi} H(\vec{\psi}, \vec{\xi})$$

$$\dot{\vec{\xi}}(t) = \nabla_{\psi} H(\vec{\psi}, \vec{\xi})$$

Podemos ahora enunciar el teorema del máximo de Pontryagin.

Teorema 2. *Si $\vec{y}(t)$ es un control óptimo, entonces existe $\vec{\psi}$ tal que $\vec{\psi}_o(t_o) = \vec{\psi}_o(t) < 0$, $H(\vec{\psi}, \vec{\xi}) \leq 0$ para toda trayectoria y $H(\vec{\psi}, \vec{\xi}^*)$ es idénticamente cero a lo largo de toda la trayectoria óptima correspondiente $\vec{\xi}^*(t)$.*

La condición $\psi_o(t_o) < 0$ exige que $\vec{\psi}(t)$ apunte hacia la región B/Σ que corresponde a la (superficie) variedad en la que se encuentra Γ^*. Tenemos que $\psi_o(t_o) = \psi_o(t)\ \forall\ t$ porque $\dfrac{\partial f_o}{\partial x_j} = 0 \quad j = 0, 1, \ldots, n$. Por otra parte, el vector $\vec{\xi}(t)$ es en todo punto tangente a la trayectoria Γ, luego la relación $H(\vec{\psi}(t), \vec{\xi}(t)) \leq 0$ significa que el ángulo entre la trayectoria y $\vec{\psi}(t)$ es cuando menos recto. Para que la trayectoria sea óptima el ángulo ha de ser siempre el mínimo de $\pi/2$.



Demostración. Recordemos la ecuación que define Σc

$$x_o + F(x) = C \qquad F(x) = V(x, x_f)$$

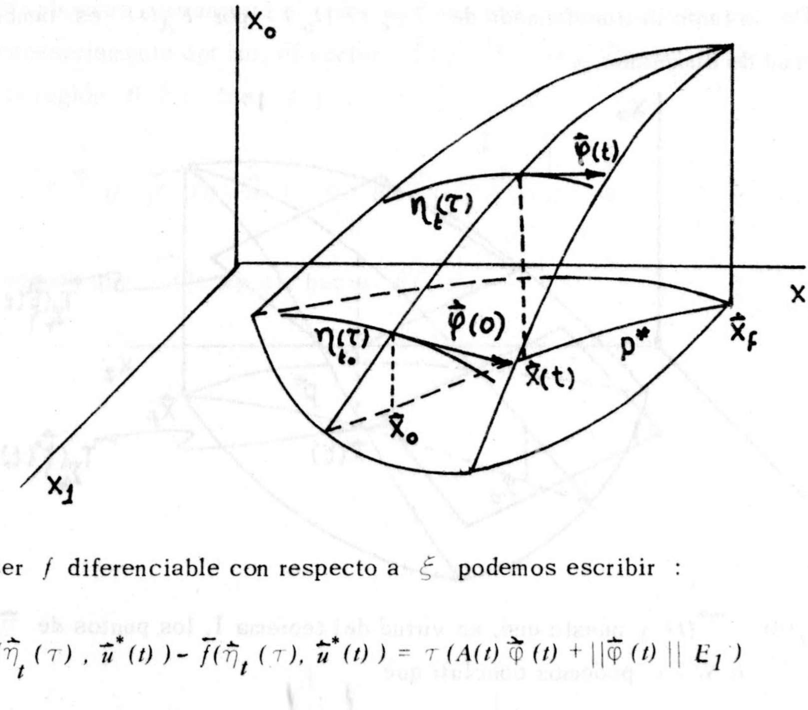
Supongamos, además que F es diferenciable con respecto a $\vec{x}$, esto solo con el objeto de simplificar un poco la demostración.

Sea entonces $\vec{u}(t) \quad t_o \leq t \leq t_1$ un control óptimo que lleva $\vec{x}_o$ a $\vec{x}_1$. Sea Γ^* la trayectoria correspondiente en Σc descrita por el punto $\vec{\xi}(t)$.

Consideremos un camino regular $\vec{\eta}_{t_o}(\tau)$ en Σc con τ como parámetro) que pase por $\xi(t_o)$ para $\tau = 0$. Los puntos del camino $\eta_{t_o}(\tau)$ son llevados por el control $u^*(t)$, a puntos sobre un camino en $E^* \times \mathbb{R}$ regular también. En virtud del principio de optimalidad y del teorema 1 podemos asegurar que $\eta_t(0) = \xi^*(t)$ y en general $\eta_t(\tau) \in \Sigma_c \, U \, S/\Sigma c$.

Escribamos : $\vec{\eta}_t(\tau) - \vec{\eta}_t(0) = \tau \vec{\varphi}(t) + 0(\tau)\, b(t,\tau)$. La función $b(t,\tau)$ es continua y tiene derivada parcial continua con respecto a t. El vector $\vec{\varphi}(t) = \frac{d\vec{\eta}}{d\tau}(0)$ es tangente a $\vec{\eta}_t(\tau)$ en $\vec{\xi}^*(t)$.

Los vectores $\vec{\varphi}(t_o)$, tangentes a las diferentes trayectorias regulares en Σc que pasen por $\vec{\xi}(t_o)$, forman la variedad lineal de dimensión n $T_{\Sigma c}(\vec{\xi}(t_o))$ tangente a Σc en el punto $\vec{\xi}(t_o)$.



Por ser f diferenciable con respecto a ξ podemos escribir :

$$\vec{f}(\vec{\eta}_t(\tau), \vec{u}^*(t)) - \vec{f}(\vec{\eta}_t(\tau), \vec{u}^*(t)) = \tau\,(A(t)\vec{\varphi}(t) + \|\vec{\varphi}(t)\|\, E_1)$$

$$E_1 = E_1(\tau\,\vec{\varphi}(t), \vec{\eta}_t(t)) \to 0 \qquad [\,\tau \to 0\,]$$

Aproximación de Taylor de primer orden. $A(t)$ es $D_\xi \vec{f}(\vec{\eta}_t(0), \vec{u}^*(t))$ la matriz Jacobiana $\vec{f}$ con respecto a $\vec{\xi}$.

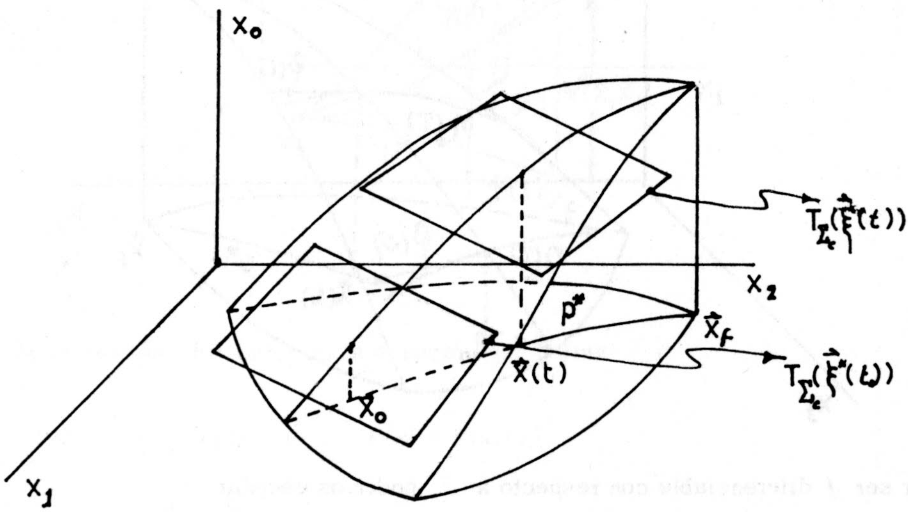
Dicha relación nos permite concluir que $\vec{\varphi}(t)$ satisface la ecuación lineal

$$\dot{\vec{\varphi}}(t) = A(t)\ \vec{\varphi}(t) \qquad\qquad \vec{\varphi}(0) = \vec{\varphi}_o$$

cuya solución existe, es única y podemos escribir

$$\vec{\varphi}(t) = F_A(t)\ \vec{\varphi}_o$$

La matriz $F_A(t)$ define una transformación lineal no singular de $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$. Por lo tanto la transformada de $T_{\Sigma c}(\vec{\xi}(t_o))$ por $F_A(t)$ es también una variedad de dimensión n.



Como $\vec{\eta}_t(0) = \vec{\xi}^*(t)$ y puesto que, en virtud del teorema 1, los puntos de $\vec{\eta}_t(\tau)$ están en $\Sigma c\ U\ S/\Sigma c$ podemos concluir que

$$T_{\Sigma c}(\vec{\xi}^*(t)) = T_{\Sigma c}(\vec{\xi}^*(t_o))\ F_A(t)$$

La transformada por $F_A(t)$ de la variedad tangente en $\vec{\xi}^*(t_o)$ es la variedad tangente en $\vec{\xi}^*(t)$.

Ahora es bien sabido que las soluciones de los sistemas $\dot{\vec{\varphi}} = A(t)\,\vec{\varphi}(t)$ y $\dot{\vec{\psi}}(t) = -A^T(t)\,\vec{\psi}(t)$ satisfacen :

$$< \vec{\psi}(t) \,;\, \vec{\varphi}(t) > \; = \; < \vec{\psi}(t_o), \vec{\varphi}(t_o) > \; = Ctc .$$

Luego si escogemos $\vec{\psi}(0)$ normal a $T_{\Sigma c}(\vec{\xi}^*(t_o))$, $\vec{\psi}(t)$ será siempre normal a $T_{\Sigma c}(\xi^*(t))$. Además sabemos que el vector $\vec{f}(\vec{\xi}^*(t), \vec{u}^*(t))$ es tangente a $\dot{\vec{\xi}}^*(t)$, así que :

$$< \vec{\psi}(t) \,;\, \dot{\vec{\xi}}^*(t) > \; = H(\vec{\psi}(t) \,;\, \vec{\xi}^*(t)) \equiv 0$$

Empleemos nuevamente el teorema 1 que nos cuenta que para un control $\vec{u}(t)$, no necesariamente óptimo, el vector $\dot{\vec{\xi}}(t) = f(\vec{\xi}(t), \vec{u}(t))$ no puede apuntar hacia la región $B/\Sigma c$, luego :

$$< \vec{\psi}(t) \,;\, \vec{f}(\vec{\xi}(t), \vec{u}(t)) > \; = H(\vec{\psi}(t), \vec{\xi}(t)) \leq 0$$

si pedimos que $\vec{\psi}(0)$ apunte hacia $B/\Sigma c$.