Boletín de Matemáticas
Vol. XI (1977), pags. 23-34

TEORIA DE LA ESTABILIDAD

ESTABILIDAD SEGUN EL SEGUNDO METODO DE LIAPUNOV

por

Hernando Pérez

1. Introducción.

El segundo método de Liapunov fue descubierto por A. M. Liapunov a finales del siglo XIX, pero solamente en los últimos 30 años ha sido estudiado y aplicado efectivamente a un gran número de problemas. Esta técnica, puesto que puede aplicarse directamente a una ecuación diferencial sin tener ningún conocimiento de la solución, también se le llama método directo.

2. Sistemas de ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales fueron introducidas en una u otra forma por Newton en su esfuerzo por explicar el movimiento de las partículas. En la ciencia y tecnología moderna la descripción matemática de procesos físicos complejos frecuentemente conduce a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Así por ejemplo la Dinámica es una fuente en la cual aparece un gran número de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Puesto que la estabilidad, tal como nosotros la entendemos, es una propiedad de ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales, es sumamente importante discutir rápidamente tales sistemas.

Dos tipos de ecuaciones diferenciales aparecen con frecuencia en las aplicaciones.

a) El primer tipo es el de una ecuación de orden n.

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2.1}$$

($y^{(n)}$ es la derivada de orden n).

b) El segundo tipo es un sistema de n ecuaciones de primer orden de la forma siguiente

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= f_1(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)\\
\dot{y}_2 &= f_2(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)\\
&\vdots\\
\dot{y}_n &= f_n(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

donde f_1, f_2, ... f_n son n funciones definidas en una región D del espacio Euclidiano de dimensión $n+1$ y y_1, y_2, ..., y_n son las n funciones desconocidas.

El primer tipo puede ser reducido al segundo tipo introduciendo nuevas variables en la forma siguiente. $y_1 = y$, $y_2 = \dot{y}$, ..., $y_n = y^{(n-1)}$ ya que podemos reemplazar la ecuación (2.1) por el sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_2\\
\dot{y}_2 &= y_3\\
&\vdots\\
\dot{y}_{n-1} &= y_n\\
\dot{y}_n &= f(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

el cual es un caso particular de (2.2)

Notación Vectorial. Como veremos enseguida, un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se puede siempre representar como una simple ecuación diferencial vectorial de primer orden.

Definamos a $\hat{y}$ como un punto en un espacio euclidiano de dimensión n, E^n, con coordenadas, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Luego definamos las funciones

$$\hat{f}_i(t,\hat{y}) = f_i(t,y_1,y_2,\ldots,y_n) \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

lo cual nos permite escribir el sistema (2.2) en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \hat{f}_1(t, \hat{y}) \\ \dot{y}_2 &= \hat{f}_2(t, \hat{y}) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= \hat{f}_n(t, \hat{y}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ahora podemos observar que las funciones $\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_n$ las podemos considerar como las n componentes de la función vectorial definida por

$$\hat{f}(t,\hat{y}) = (\hat{f}_1(t,\hat{y}), \hat{f}_2(t_1\hat{y}),\ldots, \hat{f}_n(t,\hat{y})) \tag{2.5}$$

Así mismo definimos:

$$\hat{y}' = (\dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots, \dot{y}_n)$$

Lo anterior nos permite escribir la ecuación (2.2) en la forma compacta

$$\hat{y}' = \hat{f}(t, \hat{y}) \tag{2.6}$$

El sistema (2.6) se asemeja a la ecuación de primer orden $\dot{y} = f(t, y)$ que es familiar para nosotros, con y, f reemplazados por los vectores $\hat{y}$, $\hat{f}$ respectivamente.

Sistema Autónomo. En el sistema $\hat{y}' = \hat{f}(t, \hat{y})$ un caso de considerable importancia en aplicaciones ocurre cuando $\hat{f}$ no depende explícitamente de la variable t . Tales sistemas son denominados autónomos. La ecuación (2.6) asume la forma simple

$$\hat{y}' = \hat{f}(\hat{y}) \tag{2.7}$$

Existencia, Unicidad y Continuidad. Más adelante tendremos que utilizar un teorema sobre existencia, unicidad y continuidad, por lo tanto lo presentaremos pero sin dar una prueba de él, ya que no esta dentro de los propósitos de este artículo.

<u>Teorema 1</u>. Sea $\hat{f}$ una función vectorial definida en un dominio D del espacio $E^{n+1}_{t,y}$. Sean los vectores $\hat{f}$, $\partial\hat{f}_i/\partial y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ contínuos en D . Dado un punto $(t_o, \hat{y}_o)$ en D , existe una solución única $\hat{\phi}$ del sistema

$$\hat{y}' = \hat{f}(t, \hat{y})$$

que satisface la condición inicial $\hat{\phi}(t_o) = \hat{y}_o$. La solución $\hat{\phi}$ puede ser extendida a todo D . Además esta solución es una función contínua del punto $(t_o . \hat{y}_o)$ cuando el punto varía en D .

3. Funciones definidamente positivas.

Consideraremos únicamente el sistema autónomo, $\hat{y}' = \hat{f}(\hat{y})$. Como tendremos que construir ciertas funciones escalares es necesario primero dar ciertas definiciones. Sea $V(\hat{y})$ una función escalar contínua de las variables $y_1, y_2, \ldots y_n$ definida en alguna región Δ que contiene el origen; Δ podría ser todo el espacio.

Definición 1. Se dice que la función escalar $V(\hat{y})$ es definidamente positiva en el conjunto Δ si y solamente si $V(\hat{0}) = 0$ y $V(\hat{y}) > 0$ para $y \neq 0$ y $y \in \Delta$

Definición 2. Se dice que la función escalar $V(\hat{y})$ es definidamente negativa en el conjunto Δ si y solamente si $-V(\hat{y})$ es definidamente positiva en Δ.

Nosotros asumimos que la función escalar $V(\hat{y})$ tiene derivadas parciales de primer orden contínuas a cada punto de la región Δ. Luego la derivada de V con respecto al sistema $\hat{y}' = \hat{f}(\hat{y})$ es el producto escalar.

$$\dot{V}(\hat{y}) = \text{grad } V(\hat{y}) \cdot \hat{f}(\hat{y})$$

$$\dot{V}(\hat{y}) = \frac{\partial V}{\partial y_1}(\hat{y})\, f_1(\hat{y}) + \frac{\partial V}{\partial y_2}(\hat{y})\, f_2(\hat{y}) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y_n}(\hat{y})\, f_n(\hat{y}) \tag{3.1}$$

Es importante notar que $\dot{V}(\hat{y})$ puede ser computada directamente de la ecuación diferencial sin tener conocimiento de las soluciones. Tenemos que si $\hat{\phi}(t)$ es una solución de $\hat{y}' = \hat{f}(\hat{y})$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} V(\hat{\phi}(t)) &= \frac{\partial V}{\partial y_1}(\hat{\phi}(t)) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y_n}(\hat{\phi}(t))\, \phi_n'(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i}(\hat{\phi}(t))\, f_i(\hat{\phi}(t)) = \dot{V}(\hat{\phi}(t))\end{aligned} \tag{3.2}$$

lo que nos indica que para una solución $\hat{\phi}(t)$ la derivada total de $V(\hat{\phi}(t))$ con respecto a t coincide con la derivada de V con respecto al sistema evaluado para $\hat{y} = \hat{\phi}(t)$.

Una función de Liapunov. Si la función $V(\hat{y})$ es definidamente positiva en la región Δ, y si $\dot{V}(\hat{y}) \leqslant 0$ en Δ $V(\hat{y})$ es denominada una función de

Liapunov.

4. Definiciones de estabilidad.

El problema básico puede ser presentado de esta manera: Consideremos un sistema físico cuyas ecuaciones de movimiento sean dadas por el sistema autónomo

$$\hat{y} = \hat{f}(\hat{y}) \tag{4.1}$$

Sea $\hat{y} = \hat{y}_o$ un punto crítico aislado; luego $\hat{\phi}(t) = \hat{y}_o$ es una solución. Un punto crítico de (4.1) es un punto de **reposo o equilibrio** del sistema físico asociado. Ahora nosotros tenemos una pregunta: ¿Qué le sucede al sistema cuando nosotros iniciamos el movimiento desde un punto $\hat{y}_o^*$ ligeramente desplazado del punto de equilibrio y por el cual pasa una solución $\hat{\psi}(t)$? ¿Permanecerá el movimiento $\hat{\psi}(t)$ resultante cercano a la solución de equilibrio $\hat{\phi}(t) \equiv y_o$ para $t>t_o$? Si esto ocurre, se tiene estabilidad de la solución de equilibrio. Si la solución no permanece cercana y abandona cada entorno pequeño de $\hat{\phi}(t)$, se tiene inestabilidad de la solución de equilibrio. Si la solución $\hat{\psi}(t)$ permanece cercana a la solución de equilibrio y si en adición la solución $\hat{\psi}(t)$ tiende a retornar a la posición de equilibrio cuando el tiempo aumenta hacia infinito, se tiene estabilidad asintótica. Las anteriores respuestas nos dan una idea de qué puede ser o no ser estabilidad. Vamos ahora a ser mas precisos dando las siguientes definiciones.

<u>Definición 3.</u> La solución de equilibrio $\hat{\phi}(t) \equiv \hat{y}_o$ del sistema (4.1) es estable segun Liapunov, si para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $t \geqslant t_o$ podemos hallar un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\hat{\psi}(t)$ es una solución de (4.1), teniendo $\|\hat{\psi}(t_o) - y_o\| < \delta$, entonces la solución $\hat{\psi}(t)$ existe para todo $t \geqslant t_o$ y $\|\hat{\psi}(t) - y_o\| < \varepsilon$ para todo $t \geqslant t_o$.

<u>Definición 4.</u> La solución de equilibrio $\hat{\phi}(t) \equiv y_o$ del sistema (4.1) es asintóticamente estable si ésta es estable según Liapunov y además existe un número $\delta_o > 0$ tal que si $\hat{\psi}(t)$ es una solución del sistema (4.1) teniendo que $\|\hat{\psi}(t_o) - y_o\| < \delta_o$, entonces $\lim_{t\to\infty} \hat{\psi}(t) = \hat{y}_o$. La solución de equilibrio es inestable si ésta no es estable.

5. <u>Teoremas sobre estabilidad.</u>

Asumiremos que el origen es un punto crítico aislado de $\hat{y}' = \hat{f}(\hat{y})$, contenido en D, lo cual implica que $y \equiv 0$ es una solución de $\hat{y}' = \hat{f}(\hat{y})$. Presentaremos un criterio de estabilidad para la solución nula. La consideración de la solución nula no implica ninguna restricción ya que con un cambio de variables el estudio de la estabilidad de un punto crítico $\hat{y} = \hat{y}_o$ puede siempre ser transformado al estudio de la solución nula.

<u>Teorema 2.</u> La solución nula de $\hat{y}' = \hat{f}(\hat{y})$ es esta-

ble según Liapunov si existe una función escalar $V(\hat{y})$ definidamente positiva cuya derivada total $\dot{V}(\hat{y})$ (esto es la derivada (3.1) con respecto a $\hat{y}' = \hat{f}(\hat{y})$) es no positiva en un entorno Δ del origen.

Demostración. Existe una esfera de radio $r > 0$, contenida en el entorno Δ del origen y con centro en el origen tal que

a) $V(\hat{y}) > 0$, $y \neq 0$ en $\|y\| \leqslant r$, puesto que V es definidamente positiva en Δ.

b) $\dot{V}(\hat{y}) \leqslant 0$ en $\|y\| < r$ por hipótesis.

Supongamos $y_o \neq 0$ en $\|y\| < r$. Por el teorema de existencia la solución $\hat{\phi}(t)$ de $\hat{y}' = \hat{f}(\hat{y})$ con $\hat{\phi}(0) = \hat{y}_o$ existe en $0 \leqslant t \leqslant t_1$, para algún $t_1 > 0$ y puede ser extendida a la derecha siempre y cuando $\|\hat{\phi}(t)\| < r$. Consideremos que $[0, t_1)$ es el mayor intervalo de existencia de la solución $\hat{\phi}(t)$ que puede ser obtenido por extensión. De acuerdo con lo anterior tenemos dos posibilidades: (2.1) $t_1 = +\infty$ ó (2.2) $0 < t_1 < +\infty$. Demostraremos que la segunda posibilidad no se puede presentar si tomamos $\|y_o\|$ lo suficientemente pequeño.

Por (3.2) y (b) tenemos que

$$\frac{d}{dt} V(\phi(t)) = \dot{V}(\phi(t)) \leqslant 0 \quad \text{en} \quad (0 \leqslant t < t_1)$$

e integrando

$$V(\phi(t)) - V(y_o) = \int_o^t \dot{V}(\phi(s))ds \qquad (5.1)$$

de donde

$$V(\phi(t)) \leqslant V(y_o) \qquad (5.2)$$

y como hicimos la suposición que $\hat{y}_o \neq 0$, lo que implica que $\phi(t) \neq 0$ por la unicidad de la solución de (4.1), tenemos que

$$0 < V(\phi(t)) \leqslant V(y_o) \qquad (5.3)$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ dado tal que $0 < \varepsilon \leqslant r$ y sea S el conjunto cerrado $S = \{y : \varepsilon \leqslant \|y\| \leqslant r\}$. Existe un valor mínimo de la función $V(\hat{y})$ en el conjunto S y este mínimo es positivo; sea m = mínimo de $V(\hat{y})$ con $y \in S$. Puesto que $\lim_{y \to 0} V(y) = 0$, podemos escoger un número δ tal que para $\|y_o\| < \delta$, $V(y_o) < m$ De donde la desigualdad (5.3) se convierte en

$$0 < V(\phi(t)) \leqslant V(y_o) < m \quad \text{para} \quad 0 \leqslant t < t_1 \qquad (5.4)$$

De la desigualdad (5.4) y la definición de m se concluye directamente que $\|\phi(t)\| < \varepsilon$ para $0 \leqslant t < t_1$.

Pero lo anterior debe implicar que $t_1 = \infty$. Si no se cumpliera la desigualdad $\|\phi(t)\| < \varepsilon$ debería existir un tiempo $t_2 > t_o$ para el cual al menos uno de los valores de $\|\phi(t)\|$ fuera ε es decir que para $t = t_2$, $\|\phi(t)\| = \varepsilon$ y por la definición de m la desigualdad (5.4) tendríamos

$$m \leqslant V(\phi(t_2)) \leqslant V(y_o) < 0 \qquad (5.5)$$

lo que es una contradicción. Así $t_1 = +\infty$ y para un dado $\varepsilon > 0$ hallamos un $\delta > 0$ tal que $\|y_o\| < \delta$ implica $\|\phi\| < \varepsilon$ para $0 \leqslant t < \infty$. Lo que completa la demostración.

Referencias.

[1]. Brower, F. and Nohel, J. A. "The Qualitative Theory of Ordinary, Differential Equations, W.A. Benjamin, New York, 1969.

[2]. Malkin, I.G. "Theory of Stability of Motion" (AEC Translation No. 3352), Translation from Goserdarstv. Izdat. Tehn. Teor. Lit., Moscow, 1952.

Universidad de Antioquia
Medellín, 1975

LA TEORIA DE CONJUNTOS

He aquí la letanía entonada por los que abogan por la llamada matemática moderna. Algunos afirman que el uso de la teoría de conjuntos permite la renovación íntegra de la enseñanza matemática y que, gracias a este cambio, el estudiante medio estará en condiciones de lograr el dominio del currículo. Sobra decir que esto es pura ilusión. Por supuesto que en tanto la materia se limite a las trivialidades de la teoría intuitiva de los conjuntos cualquiera lo logra. Pero esto no es matemática y ni siquiera lógica. Tan pronto como uno se enfrenta con la matemática de verdad (es decir, los números reales, la geometría, las funciones), vuelve a descubrir que no hay un camino descansado para los reyes y que sólo una minoría de los estudiantes son capaces de comprender la materia.

Ponderado todo, el excesivo optimismo alimentado por la utilización de los símbolos de la teoría de conjuntos tiene sus raíces en un error filosófico.

Se creía que enseñando el uso de los símbolos E,C, U,∩ era posible hacer explícitos los mecanismos que se hallan debajo de todo razonamiento y toda deducción.

El hombre del siglo XX ha vuelto a descubrir los silogismos Darapti y Celarent enseñados por los escolásticos medievales. Pero !cuánta desmejora ha tenido lugar! Cuando en el siglo diez y nueve Boole escribió el célebre tratado sobre el álgebra que lleva su nombre no vaciló en titularlo "Una investigación sobre las leyes del pensamiento". La ingénua creencia en que toda deducción encuentra su modelo en las piruetas conjuntistas fué compartida por filósofos modernos como los positivistas. Ni Aristóteles ni los escolásticos medievales compartieron esta ilusión. Tal como nos lo recuerda J. Vuillemin (5), la lógica aristotélica tiene su fundamento en una rica y compleja ontología de la sustancia. Los modernos protagonistas de la teoría de los conjuntos deberían darse cuenta de que esta teoría es insuficiente para explicar siquiera las fases deductivas más elementales del pensamiento cotidiano.

René Thom
American Scientist
Nov-Dic. 1971
Vol. 59, No.6