Boletín de Matemáticas
Vol. XI (1977), págs. 37-64

ENSAYO DE UN DESARROLLO Y UNA FORMALIZACION DE ALGUNAS IDEAS EN LA PSICOLOGIA DEL PENSAMIENTO

por

Susanne Weber

Se trata de hallar descripciones formales de algunos conceptos importantes, usados en la representación de procesos humanos de "resolver problemas". Es decir, se ha querido desarrollar un sistema formal, dentro del cual se puedan representar modelos específicos para este campo en la psicología general.

Si se considera la manera de proceder en la parte teórica de las ciencias empíricas en la forma siguiente:

1) El psicólogo, por ejemplo, formula sus ideas,

conceptos teóricos, en lenguaje familiar.

2) Se trata de traducir estas ideas en un lenguaje formal, es decir, en el lenguaje de las matemáticas y la lógica.

3) Se especifica hasta tener modelos de los cuales se puedan deducir (formalmente) resultados.

4) Se hacen experimentos para confirmar ("no falsificar") estos resultados y entonces nos encontramos en el punto (2).

Para familiarizarse con el tema daremos una representación de unos conceptos psicológicos.

El punto de partida para una definición de "problema" es una descripción que dió Duncker: un problema nace cuando un ser vivo tiene una meta y no sabe cómo lograr esta meta.

De esta situación resulta la necesidad de un proceso cognositivo (de pensamiento) con el fín de hallar un "procedimiento intermedio", que una la situación presente, en la cual se encuentra el ser vivo, con la meta.

Se tienen ahora unos principios, descripciones y definiciones para el concepto "problema" y "proceso de resolver problemas", los cuales se limitan, no obstante, a la descripción de la tarea objetiva.

Pero lo que hay que considerar es la representación interna o cognositiva de la tarea. F. Klix (ver [2]) se refiere a este punto de vista importante. El separa las situaciones objetivamente definidas de los casos internos dados que resultan de la consideración de tal situación. Según Klix, en un problema se presentan 3 puntos característicos:

1) Un estado cognositivo inicial, que resulta de la percepción de una situación externa; éste existe desde formulación inicial del problema dado, por ejemplo, juego de ajedrez.

2) Un segundo estado cognositivo, la meta o estado final; lograr este estado es idéntico a la solución del problema.

3) El estado final debe ser derivable del estado inicial, posiblemente a través de unos estados intermediarios. Sin embargo, no debe ser obtenible de golpe, porque de lo contrario justamente no hay "problema".

En estos puntos se encuentra el concepto de "estado cognositivo", lo cual se tiene que interpretar, según Klix, así:

Sean dados una situación externa, un objeto....Las propiedades de esta situación actúan en una serie $\{x_n\}_{n\in I}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ de estímulos y producen una serie $\{s_n\}_{n\in I}$ de casos fenomenales dados.

Esta serie $\{s_n\}_{n \in I}$ se añade a los elementos acumulados en la memoria y define así una parte de la memoria. A esto lo llamamos un estado cognositivo.

Entonces, una descripción específica del estado cognositivo resulta de las suposiciones que se hacen sobre la estructura de los elementos en la memoria (ver [3]). Por ejemplo, se encuentra en Klix una descripción del estado como pareja ordenada $z = (M,R)$ con:

M : conjunto de elementos en la memoria, los cuales están estimulados por la percepción de propiedades (como explicamos arriba).

R : Conjunto de ciertas relaciones sobre M.

Pero en la mayor parte de su trabajo, Klix sólo considera una estructura sobre M, que se deduce de las operaciones lógicas "y", y "o".

Otros conceptos de importancia son las "transformaciones de un estado cognositivo a otro", "espacio del problema", "extensión del espacio de problema", ... (ver [2], [4]).

Como vamos a referirnos sólo a una parte de la formalización como ejemplo, precisamente lo referente al concepto de "abstracción", quiero describir los cuatro procesos, que Klix une bajo este nombre:

1) Abstracción puede significar poner de relieve

propiedades importantes y omitir propiedades que no son relevantes en el proceso presente.

2) Abstracción puede ser reunir muchos casos dados bajo un concepto "abstracto" en el sentido de "no realizable".

3) Reunir relaciones o reglas en una regla abstracta,que describe el modo de acción que todas tienen en común.

4) Se puede "abstraer" una serie de pasos de transformaciones, que describen un procedimiento complejo, en una operación o transformación simple.

Formalización.

Los axiomas siguientes me parecían razonables como base para una formalización de la teoría; su necesidad resulta del desarrollo del sistema formal.

Axioma 1. Existen elementos cognositivos, llamados señales (características) cognositivas: m^k.

Existen señales objetivas, es decir, elementos del ambiente de un individuo como sistema, resolviendo problemas: m^o.

Existe la siguiente relación entre señales y otros casos dados (cognositivos y objetivos, respectivamente) : "el caso dado z está descrito por la señal m". (m(z) válida).

Axioma 2. Existen elementos cognositivos (objetivos), llamados estructuras cognositivas (objetivas) que representan relaciones entre otros elementos cognositivos (objetivos).

Axioma 3. Existe una aplicación de elementos cognositivos a elementos objetivos y viceversa.

En estos axiomas (y en la mayor parte de la tesis) yo hice la separación entre "objetivo" y "cognositivo". Pero como en lo que sigue no se necesita la separación, vamos a omitir esta diferenciación aquí.

El lenguaje del sistema formal contiene entonces como base señales y estructuras; en las señales y estructuras cognositivas se puede leer la información acumulada en la memoria, la cual va a jugar un papel durante un cierto proceso de solución. Los axiomas son muy generales: Por ejemplo, el Axioma 2 dice que cada individuo como sistema pensante, puede establecer relaciones entre elementos cognositivos. Pero si no hay relaciones entre estos elementos, ¿cómo podría funcionar un proceso de pensamiento?

Ejemplos de las llamadas señales características son los adjetivos del lenguaje corriente.

Ahora se puede definir fácilmente una relación de generalización entre señales, como por ejemplo, entre "rojo" y "color".

Definición 1. a) Una señal e se dice más abstracto que una señal m ($e \succsim m$) sí y sólo si para cualquier caso dado z se tiene que "si $m(z)$ es válida entonces $e(z)$ es válida".

b) Se dice que e idéntico a m ($e = m$) sí y sólo si para cualquier z se tiene que "$m(z)$ es válida sí y sólo si $e(z)$ es válida".

La relación $\succsim$ es reflexiva y transitiva. La identidad de señales no es necesariamente formal sino semántica, es decir, lo que se considera es el sentido de la señal.

Pero el concepto central no es la señal, la propiedad, sino el "estado".

Definición 2. $z = M_z$ ó $z = (M_z, S_z)$ se dice un estado con M_z como conjunto de señales y S_z como estructura sobre un subconjunto de M_z.

El estado es entonces una cierta descripción de un caso (situación objeto...), dada por las señales de M_z y la estructura, si está definida. Consideramos estados de la forma $z = M_z$; este caso es fácil de describir y ya se ven las ideas centrales.

Definición 3. Se dice que el estado M_a es más abstracto que M_b ($M_a \succcurlyeq M_b$) sí y sólo si $\bigwedge_{x \in M_a} \bigvee_{y \in M_b} x \succsim y$.

Corolario 1. Sean e, m señales. Entonces $\{m\} \geqslant \{e\}$ sí y sólo sí $m \succcurlyeq e$. Es decir, las definiciones 1 y 3 son consistentes.

Corolario 2. Sí $M_a \subseteq M_b$, entonces $M_a \geqslant M_b$. Es decir, lo que se describe como proceso de abstracción es primero la sustitución de señales por señales más generales; pero también está incluído el caso de "omitir señales no importantes" (ver punto 1) de Klix.

Antes de constatar propiedades de $\geqslant$ enunciemos la

Definición 4. 1) Sea M un conjunto de señales. Se dice que $M' \subseteq M$ es el representante minimal de M, sí y sólo si

a) $\bigwedge_{x \in M \setminus M'} \bigvee_{x' \in M'} x \succcurlyeq x'$; y

b) $\bigwedge_{(x,y) \in M' \times M.} x \succcurlyeq y$ ó $y \succcurlyeq x \Longrightarrow x = y$ (minimalidad).

2) Se dice que los estados M_a y M_b son equivalentes ($a \approx b$) sí y sólo si $M'_a = M'_b$.

El representante minimal es único (por eso el); $\approx$ es una relación de equivalencia.

Corolario 1. $M_a \geqslant M_b$ sí y sólo si $M'_a \geqslant M'_b$.

Es decir, la equivalencia entre estados es una equivalencia con respecto a la relación $\succcurlyeq$. No perdemos información si sustituímos el estado M_a por su representante minimal M'_a . Por ejemplo, el estado (vestido, coloreado, rojo) nos da la misma información sobre un objeto que el estado (vestido, rojo).

<u>Corolario 2</u>. La relación $\succcurlyeq$ es: 1) reflexiva; 2) transitiva y 3) $a \succcurlyeq b$ y $b \succcurlyeq a$ sí y sólo si $a \approx b$.

Como hasta ahora solo consideramos estados como conjuntos de señales, se puede preguntar ¿qué sentido tienen las operaciones de conjuntos $\cap$, $\cup$ con respecto a la relación $\succcurlyeq$?. Por otra parte, ¿cómo se puede definir la formación de estados con las operaciones "y" y "o" ?

<u>Teorema 1</u>. El estado $M_a \wedge M_b := M_a \cup M_b$ es el ínfimo de $\{M_a, M_b\}$ con respecto a $\succcurlyeq$.

La operación $\cup$ se puede interpretar como la formación de un estado "M_a y M_b", porque $M_a \vee M_b$ es la descripción de un caso dado, que debe tener las señales de M_a y las de M_b. De esta formación resulta <u>el</u> (único) estado especificado de M_a y M_b.

<u>Teorema 2</u>. Sea M un conjunto de señales, sean $M_a \subseteq M$ y $M_b \subseteq M$ estados.

Definamos un estado $(M_a \vee M_b)/M := M^a \cap M^b$ donde $M^a := \{m \varepsilon M \mid m \succsim x, \; x \varepsilon M_a\}$ y $M^b :=$

$= \{m \varepsilon M \mid m \succsim y, \; y \varepsilon M_b\}$.

Entonces se tiene que:

1) $(M_a \vee M_b)/M \geqslant M_a$ y $(M_a \vee M_b)/M \geqslant M_b$.

2) Si $M_z \subseteq M$ con $M_z \geqslant M_a$ y $M_z \geqslant M_b$, entonces $M_z \geqslant (M_a \vee M_b)/M$. Es decir, $(M_a \vee M_b)/M$ es supremo de $\{M_a, M_b\}$ con respecto a $\geqslant$ en M.

<u>Corolario 1</u>. Sea M un conjunto de señales cualquiera; sea $M_2 \supset M$; sean $M_a \subseteq M$ y $M_b \subseteq M$ estados. Entonces es válida:

1) $M_a \cap M_b \geqslant (M_a \vee M_b)/M$

2) $M_a \cup M_{b/M} \geqslant (M_a \vee M_b)/M_2$

En el teorema 2 se ve que una definición de una operación que produzca el estado generalizado de dos estados dados (es decir, el supremo con respecto a $\geqslant$) no es tan fácil como la de la operación "y". La formación de un estado mediante la operación $\cap$, nos da un estado más abstracto, pero la generalización es muy grande. En el teorema 2 tenemos entonces una operación "o", que está dependiendo de un cierto lenguaje, un conjunto de señales M. Es decir, la generalización depende de la información presente. Cuanto más crece la información, tanto más se acerca a una generalización "ideal". En otras palabras, la generalización M_a "o" M_b está descrita como dependiendo de la comprensión de estos estados M_a y M_b dentro de la memoria.

Se pueden extender estas definiciones al caso de estados más generales. (Ver [1]).

Referencias.

[1]. Weber, S. "Versuch einer Weiterentwicklung und Formalisierung einiger denkpsychologischer Ansatze". Tesis de diploma, no publicada, Braunschoing, 1974.

[2]. Klix, F. "Information un Verhalten", Lizensausgabe des VEB Deutocker Verlag der Wisserschaften.

[3]. Rumelhart, D.E., Lindsay, P.H. Norman, D.A. "Model for Long-Term-Memory" en : Tulving, E. & Donaldson, W. (eds.) : Organization of Memory. Academic Press, New York, 1972.

[4]. Krause, B. & Krause, W. "Über eine Klasse con Problem".