

## HISTORIA DE LA MATEMATICA

### ESCRUTINIO PRELIMINAR DE LAS MATEMATICAS (\*)

#### APLICADAS EN COLOMBIA

por

Luciano Mora

#### 1. Introducción.

En nuestro tiempo es un lugar común, casi una perogrullada, constatar que las matemáticas ya no se estudian, únicamente, por el intrínseco valor estético e intelectual de sus elaboraciones, sino tam-

---

(\*) Trabajo efectuado dentro del Proyecto de Investigaciones Históricas en la Matemática Colombiana, SCM-COLCIENCIAS y presentado en el V Coloquio Colombiano de Matemáticas, Medellín, 1975.

bién como instrumento necesario para elevar la eficacia de las investigaciones en las Ciencias Físicas, en las Ciencias Biológicas, en las Ciencias Sociales y aún en las Ciencias Humanas como la Psicología.

Es verdad que, desde sus orígenes, tuvo inspiración física y que sus desarrollos, como las Ecuaciones Diferenciales, siempre tuvieron repercusión o motivación casi inmediata en la Física y en la Técnica. También las probabilidades tuvieron su origen modesto en consideraciones de los juegos de azar; pero, que algún día fueran la clave del tráfico telefónico, de las colas en los servicios, del movimiento molecular y la materia prima de la nueva lógica de la ciencia atómica, no lo pudieron nunca imaginar Laplace o Pascal. Menos aún Boole o Morgan sospecharon que sus esfuerzos por poner en forma escueta la armazón del raciocinio matemático, pudiera ser un día la base para comprender la estructura de una computadora y un instrumento imprescindible para diseñarla. Hasta de la teoría de los números, que para Gauss era "la princesa pura de la reina de las ciencias", se empiezan a encontrar aplicaciones.

Por lo tanto, es de su esencia que las matemáticas además de tener su vida interior de creciente riqueza, también tengan una vida exterior en el mundo de la práctica científica, igualmente densa de contenido. Esta cualidad eleva la prestancia de la matemática porque no sólo es como decía Jacobi "Un

ejercicio para lujo y prestigio del espíritu humano" sino también una herramienta para racionalizar y, por lo tanto, para ennoblecer la existencia de la especie humana.

Esta dualidad: matemática pura versus matemática aplicada ha intrigado a los grandes pensadores desde Pitágoras hasta Einstein.

Para los Pitagóricos "todo cosmos está regido por la armonía de la cuarta (3:4), de la quinta (2:3), y de la octava (1:2)".

Kepler, en su "Armonía del Mundo" no tuvo inconveniente en consignar: "Dios en su infinita bondad no podía permanecer ocioso y decidió jugar al juego de los signos, rubricando al mundo con sus gestos; por lo tanto, me atrevo a pensar que toda la naturaleza, incluido el radiante firmamento, están simbolizados con el arte de la geometría".

Y bien conocida es la declaración de Galileo en el *Saggiatore*: "Nadie puede leer en el gran libro de la naturaleza si no conoce los caracteres con que está compuesto: las figuras geométricas y las relaciones necesarias entre ellas"

Y Heinrich Hertz, ya a comienzos de este siglo, en un momento de entusiasmo y de idealismo escribió: "No es posible escapar a la impresión de que estas fórmulas matemáticas tienen existencia independiente

y una inteligencia propia, de que son superiores a nosotros, aún más perspicaces que sus descubridores, de que obtenemos de ellas más de lo que pusimos en ellas".

Hardy, el excéntrico y purísimo matemático de Oxford con todo el sarcasmo de su despiadada sinceridad, veía el dilema en la siguiente forma: al lado de la realidad física de las estrellas, los eclipses y los terremotos, existe la realidad matemática ejemplificada por los modelos y mosaicos de ideas de las geometrías: la geometría euclídea, la geometría proyectiva, la geometría afín, la geometría algebraica, etc.." Para mí, dice Hardy, la realidad matemática no es mental, sino que se encuentra fuera de nosotros y es nuestra tarea descubrirla u observarla; nuestros teoremas son los registros de nuestras observaciones. Pero ninguna de esas geometrías, copias imperfectas, aspectos parciales de la realidad matemática, es copia de la realidad espacio-temporal del físico ya que una estrella o un eclipse no son conceptos matemáticos".

"El físico comienza con la masa amorfa y confusa de hechos o sensaciones y trata de disecarlos en elementos simples para buscar relaciones entre ellos. Eso se logra, a veces con nitidez, a veces con vaguedad; a este cuerpo más o menos incoherente de hechos que confronta, busca correlacionarlo por similitud, con algún esquema bien diferenciado y estructurado que sólo puede ser suministrado por las



matemáticas, las cuales, de hecho, le ofrecen todo un surtido de mosaicos nítidos para buscar "el que más se acomode a los hechos".

"Se colige de aquí, una paradoja: la realidad física es escurridiza, su ser es elusivo, una estrella no es lo que parece ser, mientras más pensamos en ellas más se desdibujan sus contornos en el caos de sensaciones que nos conectan con ella; en cambio, la realidad matemática es manifiesta y definitiva: "2" no tiene nada que ver con sensaciones y a medida que lo profundizamos el análisis, más nítidas aparecen sus propiedades. 317 es un número primo no porque pensemos que lo es, o porque nuestro cerebro esté conformado de tal o cual manera, sino porque así es: esa es la realidad matemática".

El esclarecimiento del problema, si se quiere, del dilema, entre matemática pura y matemática aplicada ha sido obstruido por el axiomatismo extremista que muestra la matemática, a cada sector de la matemática, como un sistema de axiomas básicos y conceptos elementales libres, de donde se deducen, con las reglas de la lógica formal, todas las proposiciones, de ese sector matemático. Aquí la verdad de los axiomas no importa, sino su consistencia. Como dijo Benjamín Peirce en 1870: "La matemática es la ciencia que obtiene conclusiones necesarias". Si los axiomas se realizan en uno o más casos particulares, las proposiciones deducidas valen también para esa realización. Este es el puente entre la

matemática pura y la matemática aplicada. De hecho el matemático descalifica a cada realización, a cada aplicación, como simple ilustración. Este planteamiento falsea tanto la dinámica interna de las matemáticas, como la praxis histórica de su desarrollo. En efecto:

- 1) Todo matemático practicante sabe que en la elaboración de un trozo matemático juega un papel primordial y decisivo la consideración de los problemas individuales, la inducción, la construcción imaginativa y articulada, inclusive la intuición. El origen del estilo matemático de pensar radica precisamente aquí. Es cierto que en cada caso individual, debemos desembarazarnos de la vaguedad con las palabras del lenguaje común. En las palabras de H. Weyl: "El matemático debe atravesar la niebla de las palabras abstractas para alcanzar, la roca concreta de la realidad, de esa misma "realidad matemática" a la cual Hardy se aferraba con tanta confianza y denuedo. Es cierto también que enseguida debemos dar el salto a lo abstracto reemplazando el material concreto específico por un algoritmo simbólico general cuyo manejo progresivo puede sugerirnos, como producto final, una construcción axiomática que cristalice el armazón estructural, como eventual y afortunada culminación de un proceso, y aún en este estadio de la construcción los problemas individuales, elementales, donde élla germinó estarán latentes y vi-

vos en el cuerpo de la teoría no como simples "ilustraciones".

- 2) Lo anterior explica por qué la teoría de los números se conserva fresca, lozana y fértil sin ninguna axiomatización dogmática y artificial. Por otro lado, los principios de la lógica aristotélica aplicados a proporciones universales o de existencia en conjuntos infinitos, se estrellan contra la evidencia de procesos constructivos tan simples como pasar de un entero  $n$  al siguiente  $n'$ . O sea, no es posible axiomatizar esta operación en el marco de la lógica aristotélica del infinito cavando así un abismo entre la evidencia constructiva y la coherencia axiomática, tal como lo patentiza el teorema de Godel.
- 3) Por lo tanto, en la lógica interna de la matemática existe una fisura entre lo constructivo y lo hipotético-deductivo; por eso su desarrollo no es lineal sino dialéctico; el material germinal y primario de la construcción es lo concreto matemático externo; la materia prima de lo axiomático son las formas simbólicas apriori. De esta manera la matemática, la praxis matemática, se mueve entre lo concreto constructivo y lo abstracto hipotético-deductivo en interacción dialéctica. Por lo tanto, es natural que muchos problemas auténticos de matemática pura se originen en situaciones de matemática aplicada y, vicever-

sa, que el planteamiento y el tratamiento adecuado de cuestiones aplicadas requieran el desarrollo o el afinamiento de construcciones matemáticas puras.

Ahora intentaré hacer un somero escrutinio de la utilización de las matemáticas en Colombia con la intención de vislumbrar aunque sea pálidamente hasta qué punto han ayudado a las ciencias y a las técnicas. Me apoyaré en dos contribuciones de dos antiguos discípulos míos y ahora descollantes matemáticos: Los Doctores Guillermo Restrepo Sierra y Víctor Albis González. El primero publicó (1974) el artículo "Marco conceptual para el desarrollo de las Matemáticas en Colombia". El Dr. Albis conjuntamente con la Doctora Clara Sánchez (1973) el artículo "Las publicaciones periódicas de Matemática en Colombia". Uno y otro me han sido de gran utilidad en la preparación de este trabajo.

El escrito del Dr. Restrepo muestra elocuentemente cómo las vicisitudes, avances y estancamientos de las matemáticas en nuestro país están ligados estrechamente al compás del desarrollo histórico de las fuerzas productivas. En este marco, con gran rigor, destaca las principales fases en el "esfuerzo colectivo por dotar a nuestro pueblo de una cultura matemática y de una herramienta para el ulterior desarrollo de esas fuerzas productivas" y utiliza su análisis para trazar las bases generales para el desarrollo futuro de las matemáticas en Colombia" que se puntualizan en tres recomendaciones

muy importantes, a saber:

- (1) La enseñanza de la matemática a todos los niveles, especialmente en la escuela, debe enseñar a pensar a los alumnos.
- (2) Es obligatorio formar matemáticos que puedan hacer aplicaciones de la matemática al nivel de satisfacción requerido por el desarrollo de las fuerzas productivas en los próximos años.
- (3) Es imperativo que los Departamentos de Matemáticas del futuro se conviertan en semilleros de investigación.

De esta manera, con toda nitidez, el punto segundo señala la importancia de las matemáticas aplicadas y, por lo tanto, sobra subrayar la total coincidencia con la apreciación que he consignado más arriba. En particular esta autorizada opinión de mi distinguido colega justifica la suficiente motivación a esta charla.

El artículo de los Doctores Albis y Sánchez me ha sido particularmente útil por su propósito de rastrear el origen, la vida y la muerte de las publicaciones matemáticas periódicas desde el "Semanario del Nuevo Reyno de Granada" en 1808 hasta la defunción de la "Revista de Matemáticas Elementales" y su reencarnación, en 1967, en la "Revista Colombiana de Matemáticas", el "Boletín de Matemáticas" y

las "Monografías Matemáticas". El elenco de Revistas que se comentan en este artículo incluye la "Revista de la Academia Colombiana de Ciencias", "Dyna" de la Facultad de Minas de Medellín, "Delta" de la Asociación Colombiana de Cómputo, la "Revista de la Universidad Industrial de Santander" y la "Revista Colombiana de Estadística". Nosotros incluimos "Ingeniería y Arquitectura" publicada por la Asociación de Ingenieros de la Universidad Nacional, y la "Revista Colombiana de Física" y otras publicaciones periódicas técnicas que como la "Revista de Planeación y Desarrollo" recogen las contribuciones técnicas de varias Instituciones Especializadas.

## 2. Panorama Preliminar de las Aplicaciones Matemáticas en Colombia.

El método elegido, ojalá válido, consiste en tomar las colecciones disponibles de las revistas mencionadas más arriba, extraer las que contienen aplicaciones matemáticas efectivas realizadas por especialistas colombianos, y de éstas elegir las más significativas para los propósitos de este estudio, según los siguientes criterios: originalidad, cobertura variada de campos de estudio, efecto multiplicativo, y calidad matemática. Para eliminar la vaguedad del último criterio, lo calificamos así: entre dos artículos dedicados, por ejemplo, el análisis y cálculo de estructuras si uno lo hace con métodos largos del cálculo real y otro con métodos más concisos de análisis complejo combinados, por

ejemplo, con álgebra lineal, escogemos este último

En la Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Físicas y Naturales, separamos, en primer lugar, los trabajos del Profesor Julio Garavito Armero.

Son los siguientes: 1) "Teoría de la aberración de la luz". 2) "Nota sobre la fórmula fundamental de la Trigonometría Plana no Euclídiana". 3) "¿La Ley Newtoniana es general?". 4) "Deducción de las leyes de elasticidad de Kniso y Baas para el cálculo de la viga". 5) "Notas sobre balística exterior". 6) "Oscilación de una barra prismática sobre un cilindro recto de base circular". 7) "Los números irracionales según 1) Liévano". 8) "Fórmulas definitivas para el cálculo del movimiento de la luna por el método Hiel-Brown y con la notación usada por Henri Poincaré".

Esto muestra el amplio interés del Profesor Garavito por la Mecánica Celeste, la resistencia de materiales y las geometrías no Euclidianas. El último de los trabajos mencionados permite afirmar, que el Doctor Garavito a comienzos de este siglo, estaba al día en cuestiones de Mecánica Celeste y que manejaba con innegable destreza y elegancia cuestiones tan intrincadas como el problema de los tres cuerpos, en cuyo tratamiento Poincaré hizo contribuciones tan importantes como el concepto del cielo límite, etc. Indudablemente Garavito ha sido el único Colombiano que ha manejado con talento, en su



forma clásica, la mecánica celeste.

Por lo demás, el Profesor Garavito formó una Escuela con diversos matices de intereses: en Astronomía, Belisario Ruíz Wilches y José Alvarez Lleras; en Mecánica Estructural, Julio Carrizosa Valenzuela; en Física, Darío Rozo; y se extiende, en cierta forma, hasta nuestra época con los trabajos de Jorge Arias de Greiff, actual Director del Observatorio Astronómico Nacional.

En la muestra de la "Revista de la Academia" que comentamos, figuran los siguientes trabajos de estos especialistas:

- 1) De Don Julio Carrizosa: "La Fotoelasticimetría en el Laboratorio de Ensayo de Materiales de nuestra Facultad de Matemáticas e Ingeniería" que describe con gran precisión los aspectos teóricos y prácticos de los equipos de laboratorio de ensayo de materiales del cual fué fundador el mismo doctor Carrizosa.
- 2) Del Doctor Darío Rozo: "Las fórmulas de Einstein sin relativismo y la onda de Broglie". En este artículo el Dr. Rozo plantea el problema de ligar las ondas materiales de Broglie con la teoría de la Relatividad Especial. Aunque quizás no logra su cometido, sin embargo conviene señalar que, posteriormente, en 1954 este problema fué resuelto por el físico matemático escocés Synge



en un libro "Mecánica Geométrica y Relatividad".

- 3) Del Doctor Jorge Alvarez Lleras: "Explicación preliminar referente al estudio (de Julio Garavito). "Nota sobre Óptica Matemática", donde se hace una evaluación muy lúcida y objetiva de los trabajos de Garavito sobre óptica, aberración de la luz y aplicaciones al diseño de instrumentos astronómicos.

En la muestra que comento se encuentran también tres artículos de tres científicos contemporáneos que es necesario mencionar si se quiere evaluar concretamente el desarrollo de la matemática aplicada en Colombia. Son los siguientes:

- 1) Carlos Federici Casa: "Sobre la ley de Wiedeman-Franz-Drude-Sommerfeld", donde con lujo de erudición se investiga lo que la teoría de las dimensiones físicas había podido aportar al problema coyuntural de la termodinámica de las radiaciones electromagnéticas del cuerpo negro.
- 2) Jorge Arias de Greiff: "El potencial gravitacional de la Tierra", donde con la claridad y la precisión peculiares del autor se actualizan los aspectos cualitativos y cuantitativos del campo gravitacional de la Tierra según los nuevos requerimientos del cálculo de órbitas de satélites de la Tierra.
- 3) Gabriel Poveda Ramos: "Las ecuaciones en dife-

rencias finitas en la teoría de los circuitos eléctricos"; es un artículo muy interesante sobre el método general de plantear ecuaciones en diferencias finitas para circuitos eléctricos, donde los métodos usuales de análisis y síntesis son poco efectivos o demasiado complejos.

La segunda colección que consideramos fué la "Revista de Arquitectura e Ingeniería". Tuvimos a nuestra disposición 189 números que cubren el lapso de 1939 a 1967. Detectamos 45 artículos significativos de matemáticas aplicadas que clasificamos así: Física 14 artículos, Astronomía 2, Mecánica Aplicada a Materiales 14, Hidráulica 8, Métodos Numéricos 4, Geodesia 2, y Comunicaciones 1.

De cada uno de estos campos elegimos un artículo que, a nuestro juicio fuera representativo del nivel o interés de cada grupo. Son los siguientes:

Física : Gabriel Poveda Ramos: "Los sistemas de magnitudes físicas dimensionales como espacios vectoriales".

Astronomía: Jorge Arias de Greiff: "La cámara Schmidt".

Mecánica Aplicada: Luis de Greiff Bravo: "Funciones exponencial-circulares aplicadas al cálculo de Ingeniería Estructural".

Hidráulica: Carlos Federici Casa y Hernando Neira: "Sobre la resolución de la ecuación integral rela-

tiva al perfil del verdadero sutro".

Métodos Numéricos: Abdías Guzmán: "Deducción analítica de la ecuación general de las curvas de intensidad de las lluvias".

Geodesia: Jorge Acosta V. "Solución de un problema de fotogrametría".

Comunicaciones: Alfonso Martínez B.: "Los problemas matemáticos del tráfico telefónico".

En toda selección de este tipo interviene un elemento arbitrario; en particular, en mecánica aplicada son evidentes la erudición, la pericia, tanto teórica como práctica, que demuestran los trabajos de Don Julio Carrizosa Valenzuela. Indudablemente fué el gran maestro de estas técnicas en el país. Utilizaba siempre los métodos de análisis clásico que conducían frecuentemente, a sistemas de ecuaciones en derivadas parciales muy complicadas. ¿Existen métodos más sintéticos y directos? no lo sabemos; pero el trabajo del Profesor Luis de Greiff precisamente muestra que las funciones circulares multiplicadas por las exponenciales son soluciones de una ecuación diferencial homogénea de orden 4 que rige el equilibrio estático, de tanques y de vigas de fundición. El Profesor de Greiff en el artículo mencionado presenta la teoría completa de estas funciones y de estos casos.

El trabajo del Dr. Gabriel Poveda Ramos es también muy completo. Después de introducir los elementos

principales de la teoría de espacios vectoriales con operadores, muestra que lo que el Profesor Federici llamaba "El álgebra de las magnitudes" es más exactamente un espacio vectorial de dimensión finita. Con gran originalidad y elegancia se llega hasta demostrar el teorema Pi de Buckingham. Es con seguridad una contribución importante porque ofrece nuevas posibilidades de investigación sobre este campo de la teoría de las magnitudes físicas que debería probarse en el campo de la física atómica, nuclear y de las partículas elementales.

El trabajo del Doctor Arias de Greiff sobre la cámara de Schmidt lo consideramos importante porque presenta, con gran claridad y precisión, la teoría completa de la idea de Schmidt de eliminar la observación de espejos esféricos con un diagrama colocado en el centro de la curvatura del espejo, dispositivo que ha revolucionado la Astronomía moderna, incluidas las prácticas de nuestro Observatorio Astronómico Nacional.

El trabajo de los Doctores Federici y Neira sobre el verdadero sutro es llamativo porque en forma un tanto inesperada se encuentra que el perfil de la parte superior de un vertedero no simétrico satisface una ecuación integral tipo volterra de primera especie que admite una solución bastante elegante. Queda la impresión de que las ecuaciones integrales pueden jugar un papel sistemático en ciertos problemas de hidráulica.

El artículo del Ingeniero Abdías Guzmán es interesante porque se propone establecer claridad en el caos que reinaba sobre métodos y validez de fórmulas empíricas para la intensidad de las lluvias en una localidad según series temporales relativamente largas. El Profesor Guzmán logra establecer criterios prácticos y analíticos para tomar decisiones racionales en la elección de diferentes fórmulas empíricas factibles en un problema de indudable importancia práctica.

Hemos elegido de las contribuciones a la Geodesia y Topografía, el trabajo del Doctor Acosta Villavices porque proporciona una solución práctica a un problema delicado y de frecuente ocurrencia para restituir el plano de un terreno fotografiado por dos cámaras acopladas a un avión, una en posición vertical y otra en posición oblicua, utilizando el estereoplanógrafo. La teoría de este aparato requiere que las placas conserven durante el vuelo posiciones prefijadas y que la trayectoria coincida en cada puesto con el eje del avión, lo cual no ocurre por los movimientos de éste. El problema se deduce a determinar la posición de una de las placas con respecto a un sistema fijo de referencia conociendo 4 posibles rotaciones y luego determinar las rotaciones a que debe someterse la segunda placa para colocarla en la posición adecuada relativa a la primera. El Profesor Acosta reduce el problema a calcular dos triángulos esféricos, polares entre sí, lo cual se logra con elegancia y se aplican los re-

sultados a un caso particular.

Finalmente, en este elenco de problemas, comentamos el artículo del Profesor Alfonso Martínez, dedicado al tráfico telefónico, donde partiendo de nociones elementales de las probabilidades, se muestra la solución del problema de determinar el número de selectores de una central automática y se da la fórmula de Erlanger para la probabilidad de que un número dado de líneas se ocupen simultáneamente, etc.

Entre los números publicados en la Revista de Matemáticas Elementales, la Revista Colombiana de Matemáticas y el Boletín de Matemáticas, alrededor de 150 números, captamos únicamente 7 con trabajos de Matemáticas Aplicadas; son los siguientes:

- 1) Y. Takeuchi: "Aplicaciones de las Funciones de Mathieu" Rev. Matemáticas Elementales, (3X 1962), 7-16.
- 2) Y. Takeuchi: "Propagación de una honda térmica en una corriente de aire". Rev. Matemáticas Elementales, 5 (4) (1963), 13-20.
- 3) Cancelado, Beltrán y Bonilla: "Transferencia de calor a lechos empacados" Rev. Matemáticas Elementales, 7 (2) (1965), 15-19.
- 4) Luciano Mora O: "La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales y el oscilador triodo"

Rev. Matemáticas Elementales, 7 (4) (1965), 1-9.

- 5) José Domingo Arias: "Un problema de valores propios aplicado a la mecánica cuántica", Rev. Matemáticas Elementales, 8 (2) (1966), 1-18.
- 6) Luciano Mora O.: "Los métodos clásicos de la mecánica no lineal". Bol. Mat. 6 (2) (1972), 11-30.
- 7) José María Castro: "El teorema de Lagrange y el segundo método de Liapunov como criterio de estabilidad", Bol. Mat. 7 (3) (1973), 205-218.

En el segundo trabajo del Profesor Takeuchi se considera la conducción del calor en un fluido perfecto en régimen laminar calentado por un alambre vertical. El potencial de velocidad para un líquido perfecto conduce, al separar las variables, a dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden homogéneas; en la primera la función aparece multiplicada por el coseno de la misma; en la segunda, por el coseno hiperbólico, por tanto, no lineales y admiten como soluciones las funciones de Mathieu de primera y de segunda clase respectivamente. Se resuelve el problema en la frontera y se calculan los isothermas, y finalmente se establece una relación entre las funciones de Mathieu y Bessel.

En el segundo trabajo se muestra que prácticamente no existen ondas térmicas en el aire en reposo; se



encuentra enseguida que en caso de una corriente uniforme existen ondas débilmente amortiguadas. Se particulariza el problema para una corriente dentro de un tubo cilíndrico; las ondas están dadas por las funciones hipergeométricas confluyentes. Las condiciones en la frontera imponen un desarrollo asintótico que introduce en la solución a la función de Laguerre.

Se trata, pues, de problemas de Física Matemática tratados en forma moderna y concreta y su valor didáctico es innegable.

El problema tratado por los Profesores Cancelado, Beltrán y Bonilla consiste en el intercambio de energía entre un sólido poroso y un fluido, el cual conduce a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden que los autores resuelven por el método de la transformación de Laplace, incluyendo las soluciones gráficas.

En el artículo del Dr. Arias se hace una extensión al estudio del oscilador armónico, como problema de autovalores de la ecuación de Schrodinger, al caso de una "cubeta de potencial". El problema se reduce a resolver la ecuación de Hermite por medio de funciones hipergeométricas confluyentes. Los desarrollos conducen a una nueva solución del oscilador armónico cuyas propiedades se estudian en detalle.

El artículo del Profesor Castro ha sido selecciona-



do porque ofrece una discusión muy lúcida del segundo método de Liapunov, retrotrayéndolo al teorema de Lagrange y se ofrecen criterios para distinguir el caso de estabilidad orbital de Poincaré con el criterio de estabilidad de Liapunov.

Los trabajos míos que he mencionado en la lista se refieren, el uno a la manera como se puede combinar los métodos cualitativos de las ecuaciones diferenciales con la integración numérica y automática de las mismas, aplicado todo a la ecuación no lineal del triodo, y el otro se refiere a los métodos generales para encontrar puntos de equilibrio y soluciones periódicas en las ecuaciones diferenciales lineales o no lineales.

Otra colección que tuvimos a nuestra disposición fué la Revista Colombiana de Física. Se ha publicado 18 números desde 1965, en casi todos figuran contribuciones matemáticas aplicadas a la Física Cuántica y a la Relatividad. Una muestra, más bien arbitraria, es la siguiente:

- 1) Ignacio Arrázola: "Absorción por resonancia magnética nuclear", (1967).
- 2) Wladimir Garrido: "Fluctuaciones en un plasma débilmente ionizado", (1969).
- 3) Octavio Guzmán: "Sobre el formalismo de la segunda cuantización", (1971).

4) Diógenes Campos: "Distribución Maxwelliana de velocidades", (1971).

5) Octavio Guzmán: "Algunos aspectos sobre cálculos moleculares", (1972).

6) Jaime Rodríguez y Mauricio García: "Modelo de electrón casi libre en sólidos cristalinos", (1972).

7) José Granés y Diego Buriticá: "Cálculo sencillo de la sección eficaz elástica para la dispersión de electrones por el átomo de hidrógeno".

8) Hernando Durán: "Relatividad y Electromagnetismo".

9) Alfonso Rueda: "Termodinámica de Haces de radiación térmica. Partes I, II".

En el artículo de Arrázola se da una teoría completa de la estructura hiperfina del espectro de algunos átomos tal como la revelan los efectos Zeeman y Stern-Gerlach. La teoría permite diseñar experimentos para observar la resonancia magnética. La técnica incluye las matrices de los spines nucleares para estudiar la interacción entre núcleos.

El trabajo de Garrido es la tesis presentada en la Universidad "Amistad de los Pueblos" para obtener el título de Master en Física. Se parte de las ecua-

ciones hidrodinámicas de Klimontovich-Ebelin para un plasma débilmente ionizado y se estudian sus fluctuaciones térmicas. El trabajo usa la ecuación del transporte de Boltzmann para un plasma con el método de Bogoliubov de subdivisión de los tiempos de relajamiento. Para el análisis de las fluctuaciones térmicas se utilizó un método análogo al de Gibbs complementando con una ecuación del tipo Langevin.

El trabajo del Profesor Campos sobre distribución de Maxwell de velocidades es clásico, pero logra precisar ciertas ambigüedades que resultan del método combinatorio de Boltzmann. Es un buen capítulo de mecánica estadística moderna.

El artículo del Profesor Octavio Guzmán, presenta tal vez por primera vez en el país la teoría de los operadores de creación y desaparición para sistemas de partículas elementales idénticas.

La contribución de los profesores Granés y Buriticá ilustra hasta qué punto es posible mejorar el método clásico aproximado de Born-Oppenheimer para las colisiones elásticas entre electrones y átomos de hidrógeno con el método de la sección eficaz total y de las ondas parciales y tiene, por lo tanto, gran interés pedagógico.

En el artículo de Octavio Guzmán y Jairo Caro, se utiliza también la aproximación de Born-Oppenheimer

para un potencial de Morse para colisiones ión-molécula con el objeto de calcular potenciales moleculares; con el apoyo adicional del teorema de Feynman y de la ecuación electrónica. Estos resultados se aplican al estudio de colisiones y vibraciones moleculares.

El estudio de Rodríguez y García se dedica a determinar las bandas energéticas y la masa efectiva en un cristal cuyos electrones de valencia se tratan por el método cuántico del "electrón casi libre". La ecuación de Schrodinger, con el apoyo del teorema de Bloch de las traslaciones, se trata con un método operatorial muy conciso.

El trabajo de Hernán Durán empieza con una formulación vectorial de la teoría especial de la relatividad en el espacio 4-dimensional de Minkowski y ofrece, como aspecto de especial interés, la derivación directa de las ecuaciones de Maxwell de consideraciones relativistas adicionadas con la ley de Cooulomb y las leyes de Faraday, Ampère y la ley de la fuerza del electrón de Lorentz.

Los dos artículos de Alfonso Rueda sobre la termodinámica de la radiación térmica, plantean la descomposición de un haz de radiación térmica en conexión con sus grados de libertad. Los componentes son superposiciones coherentes de ondas planas. Pero el haz es la superposición incoherente (en el sentido óptico), de muchos de estos elementos. Esto

forma la base del tratamiento termodinámico estadístico. Es notorio en este trabajo el uso amplio del análisis funcional, en particular funciones de cuadrado integrable según Lebesgue y la teoría de Hilbert-Schmidt sobre núcleos simétricos hermitianos.

No tuvimos suerte en conseguir una colección completa de la Revista "Dyna" que edita la Escuela de Minas de Medellín con notoria regularidad, desde hace varios años; únicamente pudimos consultar el número 79 y la serie desde el número 82 al número 89 que aproximadamente cubre el lapso 1965-1974. Encontramos los siguientes artículos de matemáticas aplicadas:

- 1) Luis de Greiff: "Resolución numérica de ecuaciones algebraicas" (1965).
- 2) Gabriel Poveda : "Sumaciones sucesivas" (1966).
- 3) Alfonso Palacios: "Aplicación de los métodos estadísticos a la lingüística" (1967).
- 4) Darío Suescún Gómez: "Apuntes sobre la aplicación de la Geofísica a la explotación de minerales" (1968).
- 5) Jorge Forcadas Feliu: "Lotes económicos en caso de demanda determinística" (1969).
- 6) Gabriel García Moreno: "Fundamentos de la foto-

elasticidad plana".

- 7) Gabriel García Moreno: "Fundamentos de la extensimetría eléctrica" (1969).
- 8) Jairo Murillo: "La similitud en modelos hidráulicos fluviales" (1972).
- 9) Jorge Mejía Ramírez: "Estudio sobre el impacto" (1972).
- 10) Javier I. Sánchez: "Evaluación de resultados bajo condiciones de riesgo" (1973).
- 11) Darío Valencia R.: "Sobre una clase de modelos para los procesos hidrológicos" (1973).
- 12) Darío Valencia R.: "Algunas ideas fundamentales sobre modelos de Simulación de Sistemas" (1974).

Nos limitamos a formular un breve comentario sobre el trabajo del Doctor Darío Valencia relativo a modelos de procesos hidrológicos y sobre el trabajo del Doctor Forcadas Feliú sobre lotes económicos con demanda determinística.

El primero es una contribución, escrita con claridad y precisión, que va desde los modelos recursivos tipo Markov para un solo punto, con estimación de los parámetros a partir de las series temporales,

hasta los modelos similares para una serie de aforos. Se incluyen modelos generales con los parámetros estimados con las matrices de covarianza, calculadas con la técnica de los componentes principales, para resolver cierto tipo de ecuaciones matriciales. La presentación es completa y rigurosa y, evidentemente, los métodos podrían aplicarse a otras situaciones distintas de los modelos hidrológicos.

La contribución sobre lotes económicos del Ingeniero Forcadas llama la atención por su sencillez con que se plantea un problema de inventarios con minimización de costos, problema que de ordinario conduce a cuestiones de control no lineal. Sin embargo, el autor utiliza una relación sencilla de minimización que aplica al cálculo de los inventarios sucesivos por unidad de tiempo. Se incluye un método gráfico para determinar el lote económico. En esta presentación preliminar de una muestra de trabajos de matemáticas aplicadas realizados en Colombia, incluimos finalmente una serie de estudios de temas varios que hemos conocido.

Son los siguientes, ordenados cronológicamente:

- 1) Alvaro López Toro: "Problemas en la teoría de las poblaciones estables".
- 2) Alvaro López Toro: "Propiedades asintóticas de una distribución de edades bajo una función de



maternidad neta continua".

3) Luis Lorente: "Proyecciones conformes en Geodesia". 1967.

4) Antonio María Gómez y otros: "Líneas de influencia para vigas continuas de sección variable". 1967.

5) Mario Reyes Suárez: "Análisis elástico de placas de espesor constante". 1967.

6) Enrique Volowisky: "Determinación del circuito crítico en análisis de estabilidad de taludes".

7) Héctor Hernández: "Solución de redes eléctricas por métodos topológicos". 1967.

8) Alberto García A.: "Simulación de sistemas físicos en el computador digital". 1967.

9) Carlo Federici: "Estudio lógico de circuitos neuronales". 1967.

10) Carlo Federici: "La red neuronal de un reflejo condicionado". 1967.

11) Alfredo Prada Pulido: "Modelo matemático de una refinería".

12) Alvaro Maldonado: "Aplicación de funciones



de Liapunov a estudios de estabilidad transitiva de sistemas de potencia".

13) Jorge Arias de Greiff: "Empleo de los polinomios armónicos y biarmónicos es la solución numérica de algunos problemas de valores en el contorno". 1967.

14) Oscar Gómez S.: "Interpolación entre 4 puntos". 1967.

15) Eduardo Brieva: "Procesamiento de las observaciones con el anteojo de pasos". 1967.

16) Germán Gutiérrez, Germán Vargas: "Sistema Geométrico coordinado para cálculos topográficos y diseño de carreteras". 1967.

17) Iván Obregón: "Operación óptima de un embalse hidroeléctrico". 1967.

18) Jorge Ramírez: "Formulación de alimentos concentrados para animales mediante programación lineal". 1967.

19) Ricardo Quintana: "Asignación óptima de máquinas". 1967.

20) Alberto León Betancourt: "Técnicas directas de optimización". 1967.

21) Rafael Delgado Nieto: "Modificaciones al método selectivo para la búsqueda del valor óptimo de una función". 1967.

22) Luis Klemas: "Ajuste óptimo de un modelo a un conjunto de datos experimentales, utilizando el método evolutivo". 1967.

23) Jorge Ramírez: "Pronóstico de ventas mediante suavización experimental". 1967.

24) Jorge Castillo, Santiago Monge: "Cálculo de curvas de remanso, métodos de intervalos normalizados". 1967.

25) Antonio Barrera: "El cálculo de hidrógrafas unitarias óptimas". 1967.

26) Alvaro López T.: "Algunas ideas referentes al concepto de sobre carga demográfica". 1968.

27) Carlos García M.: "Correlación de eventos cismicos para cambios laterales y verticales de velocidad". 1968.

28) Iván Obregón: "Determinación de niveles óptimos de inventario para artículos de poco movimiento". 1968.

29) Alberto León: "Método analítico para la solución de una clase de problemas de reemplazo de

equipos". 1968.

30) Alvaro Pabón: "Modelos matemáticos en población". 1968.

31) Iván Obregón: "Localización óptima de centros de producción mediante programación dinámica". 1968.

32) Carlos Rodado, Antonio Villodres: "Un modelo microeconómico de Colombia". 1969.

33) Diego Escobar: "Algunos aspectos numéricos de la ecuación diferencial de Duffing". 1969.

34) Lance Taylor: "Nota sobre el uso de la tabla de insumo-producto en la planificación Colombiana". 1970.

35) L. Mora: "Modelos matemáticos en demografía y en economía". 1971.

36) Y. Takeuchi: "Matemáticas y Física Moderna" 1971.

37) Diego Otero: "Modelo de crecimiento de dos sectores según esquema de la reproducción ampliada para Colombia". 1972.

38) Hernando Durán: "Un método tipo simplex para resolver el problema del flujo de potencia ópti-

ma". 1972.

39) Hernando Durán, Alvaro Maldonado: "La programación dinámica en la selección óptima de unidades en un sistema de potencia". 1973.

40) Rodolfo Heredia Etal: "Aplicación de un modelo de simulación para proyecciones Demográficas y Económicas de Colombia", 1974.

41) D.N.P.: "Aplicación del método del multiplicador de Lagrange a la discriminación de grupos"

42) Escuela Naval: "Una aplicación de la ecuación de Schrodinger a los modelos nucleares".

43) L. Mora: "Predicción y análisis de inventarios de papa". 1974.

44) Johanio Marulanda A.: "Cálculo de cascarones según las fórmulas de las superficies moldeadas de Monge". 1974.

Sin disponer de espacio para comentar cada una de estas contribuciones, es no obstante, necesario consignar que la introducción de los computadores en nuestro medio y la intensificación de las especializaciones en el exterior han acelerado la adopción de métodos modernos como los topológicos para determinar las matrices usuales en los circuitos eléctricos (Héctor Hernández); la introducción

sistemática de modelos de simulación, tanto para sistemas físicos generales (Alberto García Arango), como en sistemas particulares; igualmente la posibilidad de explorar sistemas diferenciales lineales o no lineales y sus propiedades de estabilidad ha familiarizado a los ingenieros con las técnicas modernas de optimización como las funciones de Liapunov (Alvaro Maldonado) y con todo un elenco de métodos directos como aparece en el estudio comparativo del Ingeniero Alberto León B.

En forma análoga los métodos de programación lineal y dinámica se han difundido en la aplicación a toda una serie de problemas que van desde la operación óptima de embalses (Iván Obregón) pasando por el diseño de alimentos concentrado óptimos (Jorge Ramírez) la asignación óptima de máquinas (Ricardo Quintana) la utilización del método del gradiente para ajuste óptimo de un modelo a situaciones generales (Klemas) hasta el cálculo de hidrógrafas unitarias óptimas (Barrera) y el cálculo de flujo de potencia óptimo (Durán).

### 3. Comentarios finales.

- 1) La influencia de Garavito alentó a varios Ingenieros Colombianos hacia el cultivo serio del Análisis y de la Mecánica Analítica cuyos mejores resultados se lograron en el campo de la Elasticidad de Estructuras, la Hidráulica y la Astronomía.

- 2) En las Facultades de Ingeniería de la Universidad Nacional estos antecedentes repercutieron en el mantenimiento de sólidas cátedras de Resistencia de Materiales, Análisis, Análisis Numérico y Gráfico que han nutrido las revistas especializadas que de tiempo atrás mantienen esos centros.
- 3) El Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional es más un Departamento de Matemática Pura, aunque de cuando en cuando, algunos matemáticos dedican algún tiempo a la solución de problemas aplicados, con resultados de alta calidad. Por este motivo el desarrollo de las matemáticas aplicadas se ha efectuado al margen de esta unidad académica.
- 4) Los Físicos han logrado asimilar, los métodos más avanzados para el tratamiento de problemas de Física Teórica y Experimental, en particular la mecánica cuántica y la interacción de partículas sub-atómicas.
- 5) El advenimiento de nuevos instrumentos científicos, en particular los computadores, reanimó la actividad de las matemáticas aplicadas especialmente, la teoría del control, de los sistemas y de la programación lineal, y dinámica.
- 6) Es notoria la escasa actividad y el nivel incipiente en Estadística, Matemática Aplicada, y

Probabilidades y la débil aplicación de las Matemáticas en Ciencias Biológicas y Económicas y en Psicología.

- 7) Es obstatensible la falta de un modelo académico que impulse, oriente y evalúe la difusión de las aplicaciones matemáticas en nuestro medio.
- 8) Desde el punto de vista didáctico es necesario, sobre todo en las Facultades y Escuelas Técnicas, subrayar la naturaleza constructiva de las matemáticas que, eventualmente, puede conducir a la axiomatización como una fase final de cristalización del pensamiento matemático.

*Universidad Nacional de Colombia*  
*Bogotá.*